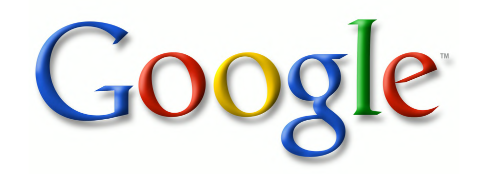

Google



Stanford University Libraries
3 6105 000 993 548

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

Dreiundneunzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1882.

Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des dreiundneunzigsten Bandes.

totum aliquod conficere velim, disquisitionem fere ab initio repetere praeferam. Quem ad finem pars prior huius dissertationis, unitatibus complexis deditae, illas disquisitiones numerorum complexorum quasi fundamentales continebit.

Denique adnotandum recentissimo tempore Clum. *Lejeune-Dirichlet,* dum in Italia versabatur, quaestiones de unitatibus principales ratione maxime generali latissimeque patente mira quidem simplicitate tractavisse, quarum rerum prospectum nunc in publicum editurus est. Quod quidem cum acciperem his meis disquisitionibus iam finitis, eas elaborare tamen non plane inutile videbatur, et quia hae quae proferentur methodi ab illis methodis generalibus omnino differunt, et quia in pertractandis unitatibus ex unitatis radicibus compositis quaestiones quaedam se offerunt, quas ipsas tanquam speciales alicuius momenti esse arbitror.

PARS PRIOR.

§ 1.

Ne postea investigationum ordinem interrumpere oporteat, hoc quod sequitur lemma, cuius frequens erit usus et quo nonnullae demonstrationes praecidentur, antea praemittimus.

Sint aequationis algebraicae n^{ti} gradus coefficientibus integris (coefficiens ipsius x^n sit unitas) n radices: α, β, γ etc. atque eiusdem aequationis, si tanquam congruentiam modulo p (ubi p numerus primus) consideres, n radices: a, b, c etc.; sit porro $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ functio radicum algebraica integra symmetrica, congruentiam

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \equiv f(a, b, c, \ldots) \pmod{p}$$

locum habere dico.

Dem. Etenim quamque functionem radicum algebraicam integram symmetricam *identice* tanquam functionem integram expressionum: $\alpha+\beta+\gamma+\cdots$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\cdots$ etc. repraesentari posse constat. Ergo $f(a, b, c, \ldots)$ eadem functio integra expressionum: $a+b+\cdots$, $ab+ac+\cdots$ etc., quae $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ ipsarum $\alpha+\beta+\gamma+\cdots$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\cdots$ etc. sit oportet. Cum vero $a+b+c+\cdots$ coefficienti ipsius x^{n-1} i. e. quantitati $\alpha+\beta+\gamma+\cdots$ pariterque $ab+ac+\cdots$

ipsi $\alpha\beta+\alpha\gamma+\cdots$ etc. secundum modulum p congrua esse notum est, id quod contendimus facile concludi potest.

Nunc sit ν numerus primus, ω radix aequationis $\omega^\nu=1$ primitiva, sint porro $\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \ldots\ \varepsilon_{\lambda-1}$ periodi radicum ω, quarum quaeque μ terminos contineat, ita ut habeamus $\lambda\mu=\nu-1$ et:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} \varepsilon \;\;= \omega \;\;+\omega^{g^\lambda} \;+\omega^{g^{2\lambda}} \;+\cdots+\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}, \\ \varepsilon_1 \;= \omega^g \;+\omega^{g^{\lambda+1}}+\omega^{g^{2\lambda+1}}+\cdots+\omega^{g^{(\mu-1)\lambda+1}}, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \varepsilon_{\lambda-1} = \omega^{g^{\lambda-1}}+\omega^{g^{2\lambda-1}}+\omega^{g^{3\lambda-1}}+\cdots+\omega^{g^{\mu\lambda-1}}, \end{cases}$$

ubi g est radix primitiva ipsius ν. Ex quibus aequationibus statim colligitur:

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda+r}=\varepsilon_r \quad \text{et} \quad 1+\varepsilon+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}=0.$$

Iam posito

$$a\varepsilon+a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} = f(\varepsilon)\,{}^{*}),$$

ubi literis: $a,\ a_1,\ \ldots\ a_{\lambda-1}$ numeri reales integri designantur, talem expressionem $f(\varepsilon)$ numerum complexum voco. Iam quia omnis periodorum functio rationalis tanquam omnium periodorum functio linearis repraesentari potest, productum numerorum complexorum rursum in formam ipsius $f(\varepsilon)$ redigi posse patet. Deinde eadem, qua Cl. *Kummer* in disputatione illa iam laudata (§ 1) usus est ratione, ex aequatione:

$$a\varepsilon+a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} = b\varepsilon+b_1\varepsilon_1+\cdots+b_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}$$

sequitur, ut sint $a=b,\ a_1=b_1,\ \ldots\ a_{\lambda-1}=b_{\lambda-1}$.

Numeri $f(\varepsilon_1),\ f(\varepsilon_2),\ \ldots\ f(\varepsilon_{\lambda-1})$ numero $f(\varepsilon)$ coniuncti dicuntur et facile, brevitatis causa $f(\varepsilon)=f,\ f(\varepsilon_1)=f_1$ etc. positis, aequationes sequentes locum habere elucet:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} a\varepsilon \;\;+a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} = f, \\ a\varepsilon_1 \;+a_1\varepsilon_2+\cdots+a_{\lambda-1}\varepsilon \;\;\;= f_1, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a\varepsilon_{\lambda-1}+a_1\varepsilon \;+\cdots+a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-2} = f_{\lambda-1}. \end{cases}$$

Quod aequationum systema ut secundum quantitates $a,\ a_1,\ \ldots$ solvamus, litera α aliquam aequationis $\alpha^\lambda=1$ radicem designamus. Tum aequatione prima in 1, secunda in α, tertia in α^2 etc. postrema in $\alpha^{\lambda-1}$ ductis iisque additis aequationem:

---

*) Cum illa periodorum functio linearis eadem tanquam functio ipsius ε rationalis integra repraesentari possit.

$$\text{(III.)}\quad \begin{aligned}(\varepsilon+\varepsilon_1\alpha+\varepsilon_2\alpha^2+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})(a+a_1\alpha^{-1}+a_2\alpha^{-2}+\cdots+a_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-1)})\\ = f+f_1\alpha+f_2\alpha^2+\cdots+f_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}\end{aligned}$$

pro quaque unitatis radice λ^{ta} α obtinemus.

Cum vero expressio $\varepsilon+\varepsilon_1\alpha+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ nihil aliud sit, nisi id quod Cl. *Jacobi* in commentatione illa iam supra laudata*) signo $F(\alpha)$ denotat, formulam l. c. traditam in auxilium vocamus:

$$(\varepsilon+\varepsilon_1\alpha+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1})(\varepsilon+\varepsilon_1\alpha^{-1}+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-1)}) = \nu.\alpha^{\frac{1}{2}(\nu-1)} = \nu.\alpha^{\frac{1}{2}\mu\lambda},$$

quae pro quoque ipsius α valore, excepto illo $\alpha=1$, locum habet. Qua adhibita atque aequatione (III) per ipsum $\varepsilon+\varepsilon_1\alpha^{-1}+\varepsilon_2\alpha^{-2}+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-1)}$ multiplicata aequatio:

$$\text{(IV.)}\quad \begin{aligned}\nu(a+a_1\alpha^{-1}+a_2\alpha^{-2}+\cdots+a_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-1)})\\ = (f+f_1\alpha+\cdots+f_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}).(\varepsilon+\varepsilon_1\alpha^{-1}+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-1)})\end{aligned}$$

(posito μ numerum esse parem) oritur, atque pro quoque ipsius α valore unitate excepta valet. Unde concludi licet:

$$\text{(V.)}\quad \begin{cases}\nu a = f\varepsilon + f_1\varepsilon_1+f_2\varepsilon_2+\cdots+f_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}+m,\\ \nu a_1 = f\varepsilon_1 + f_1\varepsilon_2+f_2\varepsilon_3+\cdots+f_{\lambda-1}\varepsilon + m,\\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \nu a_{\lambda-1} = f\varepsilon_{\lambda-1}+f_1\varepsilon+f_2\varepsilon_1+\cdots+f_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-2}+m.\end{cases}$$

Quando enim pro quibusvis quantitatibus b et c systema aequationum habemus:

$$\begin{aligned}
b+b_1\alpha+\cdots+b_r\alpha^r+\cdots+b_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1} &= c+c_1\alpha+\cdots+c_r\alpha^r+\cdots+c_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},\\
b+b_1\alpha^2+\cdots+b_r\alpha^{2r}+\cdots+b_{\lambda-1}\alpha^{2(\lambda-1)} &= c+c_1\alpha^2+\cdots+c_r\alpha^{2r}+\cdots+c_{\lambda-1}\alpha^{2(\lambda-1)},\\
&\vdots\\
b+b_1\alpha^{\lambda-1}+\cdots+b_r\alpha^{(\lambda-1)r}+\cdots+b_{\lambda-1}\alpha &= c+c_1\alpha^{\lambda-1}+\cdots+c_r\alpha^{(\lambda-1)r}+\cdots+c_{\lambda-1}\alpha,
\end{aligned}$$

facile prima aequatione in α^{-r}, secunda in α^{-2r} etc. ducta iisque additis aequatio colligitur:

$$\lambda b_r-(b+b_1+\cdots+b_{\lambda-1}) = \lambda c_r-(c+c_1+\cdots+c_{\lambda-1}) \quad \text{seu} \quad b_r = c_r+m,$$

ubi m respectu r constans est.

Ut quantitas m definiatur, adnotamus istis aequationibus ν additis fieri:

$$\text{(VI.)}\quad \nu(a+a_1+\cdots+a_{\lambda-1}) = (f+f_1+\cdots+f_{\lambda-1})(\varepsilon+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1})+\lambda m.$$

Cum vero $\varepsilon+\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{\lambda-1}=-1$ sit et $a+a_1+\cdots+a_{\lambda-1} = -(f+f_1+\cdots+f_{\lambda-1})$ esse ex aequatione (III) ibi ponendo $\alpha=1$ colligatur, aequatio (VI) mutatur in:

*) Monatsberichte der Berliner Akademie 1837 (S. 128).

$$-(\nu-1)(f+f_1+\cdots+f_{\lambda-1}) = \lambda m \quad \text{seu} \quad -\mu(f+f_1+\cdots+f_{\lambda-1}) = m.$$

Quo valore ipsius m substituto has consequimur aequationes, systemata (II) et (V) repraesentantes:

$$\text{(VII.)} \quad \begin{cases} f_r = a\varepsilon_r + a_1\varepsilon_{r+1} + \cdots + a_{\lambda-1}\varepsilon_{r-1}, \\ -\nu a_r = f(\mu-\varepsilon_r) + f_1(\mu-\varepsilon_{r+1}) + \cdots + f_{\lambda-1}(\mu-\varepsilon_{r-1}) \end{cases}$$

pro ipsius r valoribus: 0, 1, 2, ... $\lambda-1$.

Iam vero respecta analogia numerorum complexorum, qui radicibus unitatis ad numeros compositos (ν) pertinentibus constant, numeros complexos $f(\varepsilon)$ sub hac forma accipere convenit, scilicet:

$$f(\varepsilon) = a + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_{\lambda-1}\varepsilon^{\lambda-1},$$

quamquam ***unitates*** complexas in posterum illius formae supra exhibitae ponemus. — Productum talium numerorum $f(\varepsilon)$ rursus in eandem formam redigi posse inde elucet, quod quaevis periodus tanquam functio rationalis integra unius repraesentari potest, quodque quaevis functio integra periodi ε per aequationem illam gradus λ^{ti}, quarum radices $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{\lambda-1}$ sunt, ad gradum $(\lambda-1)^{\text{tum}}$ redigi potest. Denique ex aequalitate duorum numerorum complexorum aequalitatem singulorum coefficientium colligi posse inde patet, quod functio periodi integra gradus $(\lambda-1)^{\text{ti}}$ evanescere nequit, nisi omnes eius coefficientes evanescunt.

Productum omnium numerorum coniunctorum, tanquam functio periodorum invariabilis integra, numerus realis integer est atque norma appellatur. Est igitur:

$$f(\varepsilon)f(\varepsilon_1)\ldots f(\varepsilon_{\lambda-1}) = \mathrm{Nm}\,f(\varepsilon)$$

et quidem respectu ε. Quodsi enim $f(\varepsilon)$ tanquam functio alius periodi e. g. ipsius ω consideratur, ita ut sit: $f(\varepsilon) = \varphi(\omega)$, apparet esse

$$\mathrm{Nm}\,\varphi(\omega) = \varphi(\omega)\varphi(\omega_1)\ldots\varphi(\omega_{\nu-2}) \quad \text{sive} \quad \mathrm{Nm}\,\varphi(\omega) = (\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon))^{\mu}.$$

Neque unquam, ne ex aequalitate signorum ambiguitas oriatur, verendum est. Caeterum ex ipsa definitione colliguntur aequationes:

$$\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon) = \mathrm{Nm}\,f(\varepsilon_r) \quad \text{et} \quad \mathrm{Nm}\,(f(\varepsilon).\varphi(\varepsilon)) = \mathrm{Nm}\,f(\varepsilon).\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon).$$

Cum sit

$$(\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon))^{\mu} = \mathrm{Nm}\,\varphi(\omega) \equiv 1 \pmod{\nu},$$

posito numerum $\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon)$ ad ipsum ν primum esse (Disput. Cli. ***Kummer*** § 2), sequitur, ut quaevis norma respectu ε residuum sit λ^{tae} potestatis modulo ν.

§ 2.

Ponatur p numerus primus eiusmodi, ut sit $p^\mu \equiv 1 \pmod{\nu}$, atque sit:

$$p = p(\varepsilon)p(\varepsilon_1)\ldots p(\varepsilon_{\lambda-1}) = \operatorname{Nm} p(\varepsilon),$$

istos factores ulterius in factores complexos ex his ipsis periodis ε compositos discerpi non posse atque inter se diversos esse, eadem qua Cl. ***Kummer*** in disputatione sua (§ 5) usus est ratione probatur. Deinde cum nuper a Clo. ***Kummer*** demonstratum sit, congruentiam λ^{ti} gradus:

$$(x-\varepsilon)(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{\lambda-1}) \equiv 0 \pmod{p}$$

semper habere λ radices, si p condicioni sufficit $p^\mu \equiv 1 \pmod{\nu}$ *), has ipsas designemus literis: $e, e_1, \ldots e_{\lambda-1}$ **). Iam haec duo habentur theoremata:

1. Si $f(\varepsilon)$ numerus est complexus, cuius norma per numerum primum p divisibilis est, unus numerorum $f(e)$, $f(e_1)$, ... secundum modulum p nihilo congruus erit; et quando unus numerorum $f(e)$ ipsum p metitur, etiam $\operatorname{Nm} f(\varepsilon)$ factorem p implicat.

Dem. Cum productum $f(\varepsilon)f(\varepsilon_1)\ldots f(\varepsilon_{\lambda-1})$ functio sit algebraica integra symmetrica radicum aequationis $(x-\varepsilon)(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{\lambda-1}) = 0$, secundum primum nostrum lemma erit:

$$f(\varepsilon)f(\varepsilon_1)\ldots f(\varepsilon_{\lambda-1}) \equiv f(e)f(e_1)\ldots f(e_{\lambda-1}) \pmod{p}$$

$$\text{sive } \operatorname{Nm} f(\varepsilon) \equiv f(e)f(e_1)\ldots f(e_{\lambda-1}) \pmod{p},$$

unde theoremata illa sponte manant.

2. ***Theorema.*** Sint $p(\varepsilon)$, $p(\varepsilon_1)$, ... factores primi complexi numeri primi p sitque $p(e)$ ille factor, qui condicionem explet $p(e) \equiv 0 \pmod{p}$, congruentia haec locum habebit:

$$e \equiv \varepsilon \pmod{p(\varepsilon)}.$$

Dem. Ponatur

$$(e-\varepsilon)p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_2)\ldots p(\varepsilon_{\lambda-1}) = \varphi(\varepsilon),$$

unde

$$(e-\varepsilon_1)p(\varepsilon)p(\varepsilon_2)\ldots p(\varepsilon_{\lambda-1}) = \varphi(\varepsilon_1) \quad \text{etc.};$$

tum erit $\varphi(e) = 0$ et $\varphi(e_1) \equiv \varphi(e_2) \equiv \cdots \equiv \varphi(e_{\lambda-1}) \equiv 0 \pmod{p}$, quia omnes hi numeri factorem $p(e)$ implicant, quem nihilo congruum supposuimus. Iam erit secundum illud lemma:

$$\varphi(\varepsilon) + \varphi(\varepsilon_1) + \cdots + \varphi(\varepsilon_{\lambda-1}) \equiv \varphi(e) + \varphi(e_1) + \cdots + \varphi(e_{\lambda-1}) \equiv 0 \pmod{p}.$$

---

*) In commentatione „de divisoribus formarum quarundam etc.“ quae proximo tempore edetur; vel etiam in commentatione Cli. *Schoenemann* (*Crelles* Journal, Bd. 19, S. 306).

**) Adnotamus quodvis e_r eandem ipsius e functionem integram esse quam ε_r ipsius ε.

Deinde erit $\varphi(\varepsilon)^2+\varphi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon_1)+\cdots+\varphi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon_{\lambda-1})\equiv\varphi(\varepsilon)^2$, cum reliqua producta omnes factores $p(\varepsilon)$ ideoque ipsum p contineant. Ergo habemus: $\varphi(\varepsilon)^2\equiv 0 \pmod{p}$. Iam si p ad ν primum supponitur, erit $p^{\nu-1}\equiv 1 \pmod{\nu}$ atque (cf. § 3, 1)

$$\varphi(\varepsilon)^{p^{\nu-1}}\equiv\varphi(\varepsilon^{p^{\nu-1}})\equiv\varphi(\varepsilon) \pmod{p}.$$

Erit autem

$$\varphi(\varepsilon)^{p^{\nu-1}}=\varphi(\varepsilon)^{p^{\nu-1}-2}.\varphi(\varepsilon)^2\equiv 0 \pmod{p},$$

unde denique:

$\varphi(\varepsilon)\equiv 0 \pmod{p}$, i. e. $(e-\varepsilon)p(\varepsilon_1)p(\varepsilon_2)\dots p(\varepsilon_{\lambda-1})\equiv 0 \pmod{p(\varepsilon)p(\varepsilon_1)\dots p(\varepsilon_{\lambda-1})}$, ergo:

$$e-\varepsilon\equiv 0 \pmod{p(\varepsilon)}.$$

Casu $p=\nu$ habemus $\mathrm{Nm}\,p(\varepsilon)=\nu$ et posito $p(\varepsilon)=f(\omega)$ erit $\mathrm{Nm}f(\omega)=(\mathrm{Nm}\,p(\varepsilon))^\mu$, ergo $\mathrm{Nm}f(\omega)\equiv 0 \pmod{\nu^\mu}$. Eaque de re $f(1)\equiv 0 \pmod{\nu}$ (disputatio Cli. *Kummer* § 2); ergo cum sit $(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots=\nu$, erit quoque $f(1)\equiv 0 \pmod{(1-\omega)}$. Deinde propter congruentiam $1\equiv\omega \pmod{(1-\omega)}$ habemus $f(\omega)\equiv 0 \pmod{(1-\omega)}$.

Iam posito $f(\omega)=(1-\omega)f'(\omega)$ erit $\mathrm{Nm}f'(\omega)\equiv 0 \pmod{\nu^{\mu-1}}$,

ergo sicut supra $f'(\omega)=(1-\omega)f''(\omega)$.

Qua ratione denique obtinemus $f(\omega)=(1-\omega)^\mu\varphi(\omega)$. Est vero

$$\mathrm{Nm}f(\omega)=\nu^\mu=\nu^\mu\mathrm{Nm}\,\varphi(\omega),$$

unde $\varphi(\omega)$ unitatem complexam esse patet. Ergo erit quoque:

$$(1-\omega)^\mu\equiv 0 \pmod{f(\omega)} \text{ seu } \pmod{p(\varepsilon)}.$$

Deinde cum simili modo e congruentia $\mathrm{Nm}(e-\varepsilon)\equiv 0 \pmod{\nu}$ colligatur

$$(e-\varepsilon)=(1-\omega)^\mu\psi(\omega) \quad\text{sive}\quad (e-\varepsilon)\equiv 0 \pmod{(1-\omega)^\mu},$$

denique respecta congruentia illa: $(1-\omega)^\mu\equiv 0 \pmod{p(\varepsilon)}$ habebitur:

$$e-\varepsilon\equiv 0 \pmod{p(\varepsilon)}.$$

3. ***Theorema.*** Si duo habentur factores primi complexi non coniuncti eiusdem numeri primi p e. g. $p(\varepsilon)$ et $p^1(\varepsilon)$, singuli factores $p^1(\varepsilon)$ e singulis $p(\varepsilon)$ multiplicando per unitates complexas deducuntur *).

Dem. Sint $p(e)$ et $p^1(e)$ factores per ipsum p divisibiles, erit:

$$p^1(e)\equiv 0 \pmod{p} \text{ ideoque etiam } \pmod{p(\varepsilon)}.$$

Est vero $e\equiv\varepsilon \pmod{p(\varepsilon)}$, unde $p^1(\varepsilon)\equiv 0 \pmod{p(\varepsilon)}$ i. e. $p^1(\varepsilon)=p(\varepsilon).\varphi(\varepsilon)$, ubi $\varphi(\varepsilon)$ unitas complexa est, quia $\mathrm{Nm}\,p^1(\varepsilon)=p=\mathrm{Nm}\,p(\varepsilon).\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon)=p.\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon)$, ergo $\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon)=1$.

---

*) Quod theorema casus tantum specialis theorematis 2 in § 3 est.

4. *Theorema.* Quando norma numeri complexi $p(\varepsilon)$ numerus primus p est ab ipso ν diversus, unum tantum numerorum $p(e)$ numerus p metiri potest.

Dem. Sit $p(e) \equiv p(e_r) \equiv 0$ (mod. p) ergo $p(e_r) \equiv 0$ (mod. $p(\varepsilon)$). Deinde cum habeamus $e \equiv \varepsilon$ et $e_r \equiv \varepsilon_r$ (mod. $p(\varepsilon)$)*), sequitur, ut sit:

$$p(\varepsilon_r) \equiv 0 \ (\text{mod.} p(\varepsilon)) \quad \text{sive} \quad p(\varepsilon_r) = p(\varepsilon).\varphi(\varepsilon).$$

Ergo cum sit: $p(\varepsilon).p(\varepsilon_1)\ldots p(\varepsilon_{\lambda-1}) \equiv 0$ (mod. p), etiam erit:

$$\varphi(\varepsilon).p(\varepsilon).p(\varepsilon_1)\ldots p(\varepsilon_{\lambda-1}) = p(\varepsilon_r)^2.p(\varepsilon_1)\ldots p(\varepsilon_{r-1})p(\varepsilon_{r+1})\cdots \equiv 0 \ (\text{mod.} p)$$

etiamque

$$p(\varepsilon_r)^{p^\mu}.p(\varepsilon_1)\ldots p(\varepsilon_{r-1})p(\varepsilon_{r+1})\cdots \equiv p(\varepsilon_r).p(\varepsilon_1)\cdots \equiv 0^{**}) \ (\text{mod.} p)$$

i. e. $$\frac{\text{Nm}\,p(\varepsilon)}{p(\varepsilon)} = \frac{p}{p(\varepsilon)} \equiv 0 \ (\text{mod.} p), \quad \text{sive} \quad \frac{p}{p(\varepsilon)} = p.f(\varepsilon)$$

sive denique $1 = f(\varepsilon).p(\varepsilon)$, id quod fieri non posse facile patet, si in utraque aequationis parte normam formes. Tum enim esset $1 = p.\text{Nm}\,f(\varepsilon)$.

§ 3.

Cum omnes numeri complexi, qui periodis constant, etiam tanquam functiones ipsarum radicum considerari possint, cumque iis quae sequuntur haec forma simplicior magis accommodata sit, hanc ipsam accipiemus, ubicunque salva quaestionum generalitate fieri poterit.

1. *Theorema.* Quando norma aliqua $\text{Nm}\,f(\omega)$ numerum primum p continet, qui ad exponentem μ modulo ν pertineat, illam ipsam normam μ^{ta} ipsius p potestas metiri debet.

Dem. Cum sit $\mu.\lambda = \nu - 1$ cumque p ad numerum μ pertineat, ponatur $p \equiv g^\lambda$. Iam erit secundum rationem saepe usitatam:

$$f(\omega) \equiv f(\omega), \ f(\omega)^p \equiv f(\omega^p), \ f(\omega)^{p^2} \equiv f(\omega^{p^2}), \ \ldots \ f(\omega)^{p^{\mu-1}} \equiv f(\omega^{p^{\mu-1}}) \ (\text{mod.} p).$$

Quibus congruentiis inter se multiplicatis obtinemus:

$$f(\omega)^{1+p+p^2+\cdots+p^{\mu-1}} \equiv f(\omega).f(\omega^p)\ldots f(\omega^{p^{\mu-1}}) \ (\text{mod.} p).$$

Qua in congruentia si deinceps valores: $\omega^g, \omega^{g^2}, \ldots \omega^{g^{\lambda-1}}$ loco ipsius ω substituuntur, atque congruentiae, quae hoc modo prodeunt, inter se multiplicantur, fit:

$$\{f(\omega).f(\omega^g)\ldots f(\omega^{g^{\lambda-1}})\}^{1+p+\cdots+p^{\mu-1}} \equiv \text{Nm}\,f(\omega) \equiv 0 \ (\text{mod.} p)$$

---

*) v. adnotationem secundam ad § 2.

**) v. § 3, 1.

sive posito $f(\omega).f(\omega^g)\ldots f(\omega^{g^{\lambda-1}}) = \varphi(\omega)$:

$$\varphi(\omega)^{1+p+\cdots+p^{\mu-1}} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Iam cum sit $1+p+\cdots+p^{\mu-1} < p^\mu$, certo etiam erit

$$\varphi(\omega)^{p^\mu} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Est vero

$$\varphi(\omega)^{p^\mu} \equiv \varphi(\omega^{p^\mu}) \equiv \varphi(\omega) \pmod{p}, \quad \text{ergo} \quad \varphi(\omega) \equiv 0 \pmod{p},$$

unde mutatis radicibus ω oriuntur relationes:

$$\varphi(\omega) \equiv \varphi(\omega^{g^\lambda}) \equiv \varphi(\omega^{g^{2\lambda}}) \equiv \cdots \equiv \varphi(\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}) \equiv 0 \pmod{p},$$

unde denique respecta ipsius $\varphi(\omega)$ definitione:

$$\mathrm{Nm} f(\omega) = \varphi(\omega).\varphi(\omega^{g^\lambda})\ldots\varphi(\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}) \equiv 0 \pmod{p^\mu}.$$

2. *Theorema.* Normam aliquam $\mathrm{Nm} f(\omega)$ si numerus primus p metitur, qui ad exponentem μ modulo ν pertinet quique in λ factores primos complexos e periodis ε compositos dissolvi potest, quotiens illius normae et summae quae ea continetur numeri primi potestatis ipse tanquam norma repraesentari potest.

Dem. Primum adnotamus summam ipsius p potestatem numero $\mathrm{Nm} f(\omega)$ contentam secundum supra dicta multiplum ipsius μ esse debere. Iam sit $p = \mathrm{Nm}\, p(\varepsilon)$, deinde ponatur

$$f(\omega).f(\omega^{g^\lambda}).f(\omega^{g^{2\lambda}})\ldots f(\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}) = \varphi(\varepsilon)\,^{*)}.$$

Tum habemus secundum suppositionem nostram:

$$\mathrm{Nm} f(\omega) = \mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p},$$

unde secundum § 2, 1: $\varphi(e_r) \equiv 0 \pmod{p}$ ideoque $(\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon))$. Cumque habeamus secundum § 2, 2: $e \equiv \varepsilon \ (\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon))$, erit: $\varphi(\varepsilon_r) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon))$, sive mutatis periodis $\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, p(\varepsilon_{-r}))$ i. e.

$$f(\omega).f(\omega^{g^\lambda})\ldots f(\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon_{-r})),$$

sive si congruentiam $p \equiv g^\lambda \pmod{\nu}$ respicimus:

$$f(\omega).f(\omega^p)\ldots f(\omega^{p^{\mu-1}}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon_{-r})).$$

Est vero:

$$f(\omega).f(\omega^p)\ldots f(\omega^{p^{\mu-1}}) \equiv f(\omega)^{1+p+\cdots+p^{\mu-1}} \pmod{p}\,^{**)}$$

ideoque $(\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon_{-r}))$, unde ratione supra exhibita colligimus esse:

$$f(\omega) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p(\varepsilon_{-r})) \quad \text{sive} \quad f(\omega) = \psi(\omega).p(\varepsilon_{-r}).$$

---

*) *Gauss* disq. arithm. 345.

**) v. paragraphum antecedentem.

Ad normam transeuntes obtinemus aequationem:

$$\mathrm{Nm}f(\omega) = p^{\mu}.\mathrm{Nm}\,\psi(\omega) \quad \text{sive} \quad \mathrm{Nm}\frac{f(\omega)}{p^{\mu}} = \mathrm{Nm}\,\psi(\omega) \quad \text{q. e. d.}$$

Iam hac methodo iterum atque iterum adhibita facile patet e suppositione $\mathrm{Nm}f(\omega) \equiv 0 \pmod{p^{n.\mu}}$ congruentiam colligi huiusmodi:

$$f(\omega) \equiv 0 \pmod{p(\varepsilon_k)^m . p(\varepsilon_{k'})^{m'} \ldots},$$

ubi $m + m' + \cdots = n$; denique habebitur theorema hocce: quando norma aliqua divisibilis est per numerum, cuius factores primi reales in factores complexos quam plurimos discerpi possunt*), quotiens illius normae et summae quae ea continetur denominatoris potestatis ipse tanquam norma repraesentari potest.

Adnotatio. Si $\mathrm{Nm}f(\omega) \equiv 0 \pmod{\nu}$, habemus $f(\omega) \equiv 0 \pmod{(1-\omega)}$**), pariterque e congruentia $\mathrm{Nm}\,f(\omega) \equiv 0 \pmod{\nu^m}$ congruentiam colligimus

$$f(\omega) \equiv 0 \pmod{(1-\omega)^m}.$$

§ 4.

Sit $f(\omega)$ numerus aliquis complexus, N numerus realis eiusmodi, ut factores eius primi reales in factores complexos quam plurimos discerpi possint, sitque factor numerorum $f(\omega)$ et N communis maximus $\varphi(\omega)$***), numerus $\psi(\omega)$ inveniri potest talis, ut sit: $\psi(\omega).f(\omega) \equiv \varphi(\omega) \pmod{N}$†).

Dem. Sit primum numerus N potestas numeri primi, ergo: $N = p^n$; sit deinde $p = \mathrm{Nm}\,p(\varepsilon)$ et $p \equiv g^{\lambda} \pmod{\nu}$.

Iam erit secundum §. 3, 2:

$$f(\omega) = F(\omega).p(\varepsilon_k)^m.p(\varepsilon_{k'})^{m'}\ldots,$$

ubi $p^{m+m'+\cdots}$ summa ipsius p potestas numero $\mathrm{Nm}f(\omega)$ contenta. Est igitur $\mathrm{Nm}F(\omega)$ numerus ad ipsum p primus, quare exstat numerus x talis, ut sit: $x.\mathrm{Nm}F(\omega) \equiv 1 \pmod{p^n}$. Hinc habemus:

---

*) Numerum aliquem primum p ad divisorem μ ipsius $\nu - 1$ pertinentem in factores complexos quam plurimos discerpi posse dicimus, si in $\frac{\nu-1}{\mu}$ factores complexos e periodis ε compositos eosque coniunctos dissolvi potest.

**) v. § 2, 2.

***) De factore communi maximo sermonem esse posse inde elucet, quod factores ipsius N primi in factores complexos dissolvi queunt, igitur ad eos omnes theorema § 3, 2 adhiberi potest. Caeterum hoc in ipsa demonstratione probabitur.

†) Modulum realem accipimus, quia si complexus est multiplicando per factores coniunctos realis reddi potest.

$$\text{(I.)}\quad \begin{aligned} x.F(\omega^2)F(\omega^3)\ldots F(\omega^{\nu-1}).f(\omega) &= x.\mathrm{Nm}\,F(\omega).p(\varepsilon_k)^m.p(\varepsilon_{k'})^{m'}\ldots \\ &\equiv p(\varepsilon_k)^m.p(\varepsilon_{k'})^{m'}\ldots \pmod{p^\pi}. \end{aligned}$$

Designemus complexum factorum omnium et producto $p(\varepsilon_k)^m.p(\varepsilon_{k'})^{m'}\ldots$ et numero p^π i. e. producto $p(\varepsilon)^\pi.p(\varepsilon_1)^\pi\ldots$ communium signo $P(\varepsilon)$, ita ut sint:

$$P(\varepsilon).p(\varepsilon_a)^\alpha.p(\varepsilon_{a'})^{\alpha'}\cdots = P(\varepsilon).A(\varepsilon) = p(\varepsilon_k)^m.p(\varepsilon_{k'})^{m'}\ldots,$$
$$P(\varepsilon).p(\varepsilon_b)^\beta.p(\varepsilon_{b'})^{\beta'}\cdots = P(\varepsilon).B(\varepsilon) = p^\pi.$$

Iam nullum indicem a nulli indici b aequalem esse patet. Sint $c, c', \ldots$ indices ii, qui coniuncti cum indicibus a et b seriem $0, 1, 2, \ldots \lambda-1$ efficiunt, atque posito $C(\varepsilon) = p(\varepsilon_c).p(\varepsilon_{c'})\ldots$ formetur expressio:

$$V(\varepsilon) = A(\varepsilon)+B(\varepsilon).C(\varepsilon),$$

normam huius expressionis numerus p metiri nequit; tum enim pro uno valore e congruentiae $\mathrm{Nm}(e-\varepsilon)\equiv 0 \pmod{p}$ esse deberet $V(e)\equiv 0 \pmod{p}$*) i. e.

$$A(e)+B(e).C(e)\equiv 0.$$

Cum vero pro quovis e unus tantum factorum $p(e)$ nihilo congruus esse possit**), aut $A(e)$ aut $B(e)$ aut $C(e)$, minime igitur $A(e)+B(e).C(e)$, nihilo congruum erit. Quare iam existet numerus y talis, ut sit: $y.\mathrm{Nm}\,V(\varepsilon)\equiv 1 \pmod{p^\pi}$ sive substituto ipsius $V(\varepsilon)$ valore:

$$y.V(\varepsilon_1)\ldots V(\varepsilon_{\lambda-1})A(\varepsilon)+y.V(\varepsilon_1)\ldots V(\varepsilon_{\lambda-1})B(\varepsilon).C(\varepsilon)\equiv 1 \pmod{p^\pi}.$$

Qua congruentia in numerum $P(\varepsilon)$ ducta, atque respectu habito aequationis $B(\varepsilon).P(\varepsilon) = p^\pi$, obtinemus:

$$\text{(II.)}\quad y.V(\varepsilon_1)\ldots V(\varepsilon_{\lambda-1})\,A(\varepsilon).P(\varepsilon)\equiv P(\varepsilon) \pmod{p^\pi}.$$

Unde si illam congruentiam (I):

$$x.F(\omega^2)\ldots F(\omega^{\nu-1}).f(\omega)\equiv A(\varepsilon).P(\varepsilon) \pmod{p^\pi}$$

respicimus atque

$$x.F(\omega^2)\ldots F(\omega^{\nu-1}).y.V(\varepsilon_1)\ldots V(\varepsilon_{\lambda-1}) = \psi(\omega)$$

ponimus, denique prodit congruentia:

$$\psi(\omega).f(\omega)\equiv P(\varepsilon) \pmod{p^\pi},$$

ubi numerum $P(\varepsilon)$ factorem esse numerorum $f(\omega)$ et p^π communem maximum ex ipsa expressionis $P(\varepsilon)$ definitione elucet. Istam congruentiam si tanquam aequationem scribimus designante $G(\omega)$ numerum integrum complexum,

---

*) v. § 2, 1.
**) v. § 2, 4.

obtinemus:

$$\psi(\omega).f(\omega) = P(\varepsilon) + G(\omega).p^{\pi} \quad \text{sive} \quad \psi(\omega)\cdot\frac{f(\omega)}{p^{\pi}} = \frac{1}{B(\varepsilon)} + G(\omega).$$

Casu $p = \nu$ habemus $f(\omega) = (1-\omega)^{\pi} F(\omega)$, ubi numerus $\mathrm{Nm}\, F(\omega)$ ad ipsum ν primus est*). Iam posito $x.\mathrm{Nm}\, F(\omega) \equiv 1 \pmod{\nu^{\pi}}$ atque:

$$x.F(\omega^2).F(\omega^3)\ldots F(\omega^{\nu-1}) = \psi(\omega)$$

obtinemus:

$$\psi(\omega) f(\omega) \equiv (1-\omega)^{\pi} \pmod{\nu^{\pi}}.$$

Iam posito $N = p^a.q^b\ldots$, ubi $p, q, \ldots$ sunt numeri primi inter se diversi, inveniri possunt numeri $\psi_1(\omega), \psi_2(\omega), \ldots$ tales, ut sint:

$$\psi_1(\omega).f(\omega) \equiv P(\varepsilon) \pmod{p^a}, \quad \psi_2(\omega).f(\omega) \equiv Q(\varepsilon') \pmod{q^b}, \ldots,$$

ubi $P(\varepsilon)$ factor est communis maximus numerorum $f(\omega)$ et p^a, $Q(\varepsilon')$ factor communis maximus numerorum $f(\omega)$ et q^b etc. Itaque habemus:

$$Q(\varepsilon').R(\varepsilon'')\ldots\psi_1(\omega).f(\omega) = \chi_1(\omega) f(\omega) \equiv P(\varepsilon)\, Q(\varepsilon')\ldots \pmod{p^a},$$
$$P(\varepsilon).R(\varepsilon'')\ldots\psi_2(\omega).f(\omega) = \chi_2(\omega) f(\omega) \equiv P(\varepsilon)\, Q(\varepsilon')\ldots \pmod{q^b}.$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Deinde numerus inveniri potest complexus $\psi(\omega)$ talis, ut sit:

$$\psi(\omega) \equiv \chi_1(\omega) \pmod{p^a}, \quad \psi(\omega) \equiv \chi_2(\omega) \pmod{q^b}, \quad \ldots,$$

quia pro singulis coefficientibus potestatum radicum ω in ipsis $\chi(\omega)$ hae ipsae congruentiae expleri possunt. Unde denique habemus:

$$\psi(\omega).f(\omega) \equiv P(\varepsilon).Q(\varepsilon').R(\varepsilon'')\ldots \pmod{N},$$

ubi dextra congruentiae pars factorem numerorum $f(\omega)$ et N communem maximum continet.

§ 5.

Dato aliquo numero primo p, qui condicionem implet $p^{\mu} \equiv 1 \pmod{p}$, semper exstare numerum π talem, ut sit $\pi p = \mathrm{Nm}(e-\varepsilon)$, iam supra diximus (v. §. 2). Quem numerum π generaliter ita eligere possumus, ut sit ad p primus. Quodsi enim π numerum p ideoque $\mathrm{Nm}(e-\varepsilon)$ numerum p^2 implicat, habemus:

$$\mathrm{Nm}(p+e-\varepsilon) = \pi' p = \mathrm{Nm}(e-\varepsilon) + p\{(e-\varepsilon_1)(e-\varepsilon_2)\cdots + (e-\varepsilon)(e-\varepsilon_2)\cdots + \cdots\} + p^2\{\cdots\}.$$

Iam si et ipsum π' factorem p contineret, etiam illa expressio per ipsum p

*) v. adnotationem in fine paragraphi 3.

multiplicata nihilo congrua foret modulo p. Quae expressio, tanquam functio ipsorum ε symmetrica, etiam mutatis quantitatibus ε cum numeris e nihilo congrua esse deberet. Tum autem omnes termini primo excepto evanescunt, qua de causa obtinemus:

$$(e-e_1)(e-e_2)\cdots \equiv 0 \pmod{p}$$

sive igitur

$$e \equiv e_r \pmod{p},$$

id quod fieri non potest, nisi pro certis quibusdam numeris p, qui et ipsi divisores numeri $\mathrm{Nm}(\varepsilon-\varepsilon_r)$ sunt. Quodsi enim $e \equiv e_r \pmod{p}$, est quoque:

$$(e-e_r)(e_1-e_{r+1})\dots(e_{\lambda-1}-e_{r+\lambda-1}) \equiv 0 \equiv (\varepsilon-\varepsilon_r)(\varepsilon_1-\varepsilon_{r+1})\cdots \equiv \mathrm{Nm}(\varepsilon-\varepsilon_r) \pmod{p}.$$

Theorema. Si normam numeri complexi $\mathrm{Nm}f(\omega)$ numerus primus p metitur ad exponentem μ modulo ν pertinens atque $\pi p = \mathrm{Nm}(e-\varepsilon)$ est, numerum $\pi . f(\omega)$ aliquis factor $e-\varepsilon_k$ metiri debet.

Dem. Ponatur

$$f(\omega).f(\omega^{g^\lambda})\dots f(\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}) = \varphi(\varepsilon)^{*)}.$$

Tum habemus: $\mathrm{Nm}f(\omega) = \mathrm{Nm}\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$, ergo secundum § 2, 1:

$$\varphi(e_r) \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad \pi.\varphi(e_r) \equiv 0 \pmod{\pi.p} \quad \text{ideoque} \quad (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon)).$$

Deinde cum appareat esse $e \equiv \varepsilon$ et $e_r \equiv \varepsilon_r$ $(\mathrm{mod.}(e-\varepsilon))$, obtinemus congruentias:

$$\pi\varphi(e_r) \equiv \pi.\varphi(\varepsilon_r) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon)) \quad \text{sive} \quad \pi.\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon_{-r}))$$

i. e.

$$\pi.f(\omega).f(\omega^{g^\lambda})\dots f(\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon_{-r}))$$

sive, si congruentiam $p \equiv g^\lambda$ respicimus,

$$\pi.f(\omega).f(\omega^p)\dots f(\omega^{p^{\mu-1}}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon_{-r})).$$

Est vero

$$\pi.f(\omega).f(\omega^p)\dots f(\omega^{p^{\mu-1}}) \equiv \pi.f(\omega)^{1+p+\dots+p^{\mu-1}} \ (\mathrm{mod.}\pi p) \ \text{ideoque} \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon_{-r}))$$

ergo ratione supra adhibita:

$$\pi.f(\omega) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon_{-r})) \quad \text{q. e. d.}$$

Qua ratione iterata facile supposita congruentia $\mathrm{Nm}f(\omega) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}p^{n.\mu})$ colligimus congruentiam locum habere huiusmodi:

$$\pi^n.f(\omega) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(e-\varepsilon_k)^m.(e-\varepsilon_{k'})^{m'}\dots),$$

ubi $m+m'+\cdots = n$ est.

---

*) v. *Gauss* disq. arithm. 345.

§ 6.

Sit p numerus primus talis, ut sit $p^{\mu} \equiv 1 \pmod{\nu}$ atque $\pi p = \mathrm{Nm}(e-\varepsilon)$, sitque π numerus ad ipsum p primus. Deinde ponatur

$$(e-\varepsilon_1)(e-\varepsilon_2)\ldots(e-\varepsilon_{\lambda-1}) = \varphi(\varepsilon),$$

ubi $\varphi(\varepsilon)$ ipsum p metiri non posse patet, quia posito $\varphi(\varepsilon) = p.\psi(\varepsilon)$ esset

$$(e-\varepsilon).\varphi(\varepsilon) = \mathrm{Nm}(e-\varepsilon) = \pi p = p.(e-\varepsilon)\psi(\varepsilon),$$

ergo

$$\pi = (e-\varepsilon)\psi(\varepsilon) \text{ et } \pi^{\lambda} = \pi p.\mathrm{Nm}\,\psi(\varepsilon),$$

unde sequeretur, ut ipsum π per numerum p divisibile esset. — Iam numero complexo fracto $\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}$ tanquam modulo ad hanc quae sequitur disquisitionem utamur; id quod facile fieri potest, si statuamus

congruentiam $a \equiv b \left(\mathrm{mod.}\,\frac{m}{n}\right)$ locum tenere huiusce $an \equiv bn \pmod{m}$.

Iam patet esse

$$e \equiv \varepsilon \left(\mathrm{mod.}\,\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}\right);$$

est enim re vera

$$(e-\varepsilon)\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{quia} \quad (e-\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = \mathrm{Nm}(e-\varepsilon) = \pi p.$$

Deinde si numerus complexus $f(\varepsilon)$ congruentiae sufficit

$$f(\varepsilon) \equiv 0 \left(\mathrm{mod.}\,\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}\right),$$

numerus p eius normam metiatur oportet. Ex ista enim congruentia concluditur $f(\varepsilon).\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$ sive $\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon).\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}}$, et cum habeamus $\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon) = p^{\lambda-1}\pi^{\lambda-1}$, obtinemus $\pi^{\lambda-1}\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$, et quia π ad ipsum p primus est,

$$\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ex illa congruentia

$$e \equiv \varepsilon \left(\mathrm{mod.}\,\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}\right)$$

sequitur, ut quivis numerus complexus numero reali congruus sit, scilicet

$$f(\varepsilon) \equiv f(e) \left(\mathrm{mod.}\,\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}\right),$$

unde p residua hoc modulo incongrua exstare elucet eaque numeri $0, 1, 2, \ldots p-1$. Etenim plures non existere inde patet, quod quivis numerus complexus numero

reali quivis autem numerus realis uni illorum numerorum modulo p, etiamque igitur modulo $\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}$, congruus est. Sin vero duo illorum numerorum inter se congrui essent, earum differentia nihilo congrua fieret. Quam si litera d designamus, esset $d.\varphi(\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$, ergo $d^\lambda.\mathrm{Nm}\,\varphi(\varepsilon) = d^\lambda.\pi^{\lambda-1}.p^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p^\lambda}$, ergo: $d^\lambda.\pi^{\lambda-1} \equiv 0 \pmod{p}$, id quod esse nequit, quia π ad ipsum p primus atque $d < p$ est.

Iam accepto numero k eiusmodi, ut sit $k^\lambda \leqq p < (k+1)^\lambda$, statuamus cunctos numeros complexos formae $c + c_1\varepsilon + \cdots + c_{\lambda-1}\varepsilon^{\lambda-1}$, in quibus coefficientes isti c valores $0, 1, 2, \ldots k$ induunt. Horum multitudo erit $(k+1)^\lambda > p$, inter quos igitur certe duo inter se congrui erunt secundum modulum $\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}$. Quorum altero ab altero subtracto obtinemus numerum complexum $f(\varepsilon)$, cuius coefficientes omnes inter $-k$ et $+k$ sunt, et cuius norma numerum p continet, cum ipse nihilo congruus sit modulo $\frac{p}{\varphi(\varepsilon)}$. Quare sit $\mathrm{Nm}\,f(\varepsilon) = np$. Iam si litera M_λ maximum valorem expressionis

$$\mathrm{Nm}(x + x_1\varepsilon + \cdots + x_{\lambda-1}\varepsilon^{\lambda-1})$$

designamus, ea condicione ut quantitates x cunctae inter -1 et $+1$ sint, obtinemus:

$$\frac{np}{k^\lambda} = \mathrm{Nm}\frac{f(\varepsilon)}{k}, \quad \text{ideoque} \quad \frac{np}{k^\lambda} < M_\lambda$$

sive

$$np < M_\lambda k^\lambda < M_\lambda p, \quad \text{unde denique} \quad n < M_\lambda.$$

Hinc habemus hoc theorema magni momenti. Dato aliquo numero p, qui condicionem implet $p^\mu \equiv 1 \pmod{\nu}$, semper invenire licet numerum n minorem finita quadam quantitate ab ipso p independente eumque talem, ut productum np in λ factores complexos coniunctos dissolvi possit. Quod theorema respondet illi in theoria formarum quadraticarum theoremati fundamentali, secundum quod numerus formarum reductarum finitus est. Etiam adnotandum illam rationem agendi adhiberi non posse ad eos numeros primos p, qui divisores sunt numerorum $\mathrm{Nm}(\varepsilon - \varepsilon_r)$, quarum igitur multitudo finita est. — Deinde ope huius theorematis, quantitate M determinata, numerus quam minimus inveniri potest numerorum n, quibus opus est, ut pro quolibet numero primo p, proprietate supra dicta praedito, unum productorum np norma numeri complexi sit.

Ut pro certis quibusdam numeris ν pro quovis ipsius $\nu - 1$ divisore λ omnes numeri primi, residua λ^{tarum} potestatum ipsius ν, in λ factores com-

plexos dissolvi possint *), tantummodo necesse est, numeros primos, qui sint residua λ^{tae} potestatis modulo ν quantitatibus illis M_λ minores, in λ factores complexos coniunctos discerpi posse **). — Sit enim λ divisor ipsius $\nu-1$, designetur deinde signo d quilibet ipsius λ divisor excepto ipso λ; probandum est, quemvis numerum primum, residuum λ^{tae} potestatis, in λ factores complexos dissolvi posse, simodo hoc pro numeris primis p ipso M_λ minoribus eveniat praetereaque omnes numeri primi, residua d^{tarum} potestatum, in d factores complexos discerpi possint. Cum enim np tanquam norma repraesentari liceat, cumque factores ipsius n primi aut residua d^{tarum} potestatum aut residua λ^{tae} potestatis iique $\leqq n < M_\lambda$ sint ideoque in factores complexos discerpi possint, respectu habito theorematis § 3, 2 sententiam illam probari elucet. Iam primum pro ipso λ factores ipsius $\nu-1$ primos accipientes, illa quae ad divisores numeri λ spectat condicione sublata, ea tantum restat, ut numeri primi, residua λ^{tae} potestatis quantitate M_λ minores, in λ factores complexos discerpi possint. Deinde transeundo ad eos ipsius λ divisores, qui duabus tantum numeris primis constant, similem condicionem adiiciendam tantum esse patet; eaque ipsa ratione ad divisores ipsius $\nu-1$, e pluribus factoribus primis compositos, progredientes denique illam condicionem supra indicatam obtineri liquet. — Ita, ut unum tantum exemplum afferamus, posito $\nu=5$ pro ipso numero $\nu-1=4$ simplicissimis iam adiumentis $M_4=49$ invenitur. Iam vero tres numeri primi formae $5n+1$ ipso M minores, scilicet 11, 31, 41, in quatuor factores complexos coniunctos, e radicibus unitatis quintis compositos, discerpi possunt***). Deinde pro divisore $\lambda=2$ omnes numeri primi, residua ipsius 5 quadratica, in duos factores complexos $(a+a_1\varepsilon).(a+a_1\varepsilon_1)$ dissolvi possunt. Id quod vel illa ipsa ratione erui vel e theoria formarum secundi gradus probari potest. Est enim

$$(a+a_1\varepsilon)(a+a_1\varepsilon_1) = (a+a_1\omega+a_1\omega^{-1}).(a+a_1\omega^2+a_1\omega^{-2}) = a^2-aa_1-a_1^2.$$

Hinc igitur quemvis numerum primum formae $5n+1$ in quatuor, quemvis numerum primum formae $5n-1$ in duos factores complexos coniunctos, e radicibus unitatis quintis compositos, discerpi posse colligimus.

---

*) Adnotamus illud etiam ita exhiberi posse, ut pro his numeris ν omnes numeros primos formarum $k\nu+g^\lambda$ in λ factores complexos coniunctos dissolvi posse dicamus. Id quod illi sententiae aequivalere e facili consideratione elucet.

**) Addendum est praeterea eos numeros primos, qui numeros $\mathrm{Nm}(\varepsilon-\varepsilon_r)$ metiantur, pro se quosque disquirendos esse.

***) v. Cli. *Kummer* disput. pag. 21.

§ 7.

Iam transeuntes ad numeros ν compositos adnotamus, nos plerumque, ut iteratione supersedere possimus, ad methodos pro numeris primis exhibitas lectorem delegaturos esse, quippe quae in his quae sequantur paucis exceptis prorsus adhiberi possint.

Ponatur numerus compositus $\nu = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \dots$ designantibus $a, b, c, \dots$ numeros primos inter se diversos, sitque ω radix primitiva aequationis $x^\nu = 1$; hanc ipsam radicem esse aequationis:

$$f(x) = \frac{(x^\nu - 1)(x^{\frac{\nu}{ab}} - 1)(x^{\frac{\nu}{ac}} - 1)\dots}{(x^{\frac{\nu}{a}} - 1)(x^{\frac{\nu}{b}} - 1)(x^{\frac{\nu}{c}} - 1)\dots} = 0$$

notis methodis probatur, quae quidem aequatio $\varphi(\nu)^{\text{ti}}$ gradus*) omnes ν^{tas} radices unitatis primitivas amplectitur. Hanc vero aequationem reduci non posse, sive radices quasdam ω aequatione inferioris gradus atque coefficientium integrorum contineri non posse, hic probare omittimus**), cum limites huius libelli demonstrationem hic tradere non patiantur. Ex ea vero aequationis illius proprietate sequitur, ut quaecunque functio ipsius ω integra pro quibusdam ipsius ω valoribus evanescat eadem pro omnibus quoque reliquis valoribus nihilo aequalis fiat. Quod nisi fieret, factor communis maximus istius functionis et functionis $f(x)$, cum et idem functio sit integra, tamen illas certas tantum radices ω haberet atque factor functionis $f(x)$ foret, id quod fieri nequit. — Iam designentur radices primitivae numerorum $a^\alpha, b^\beta, \dots$ resp. literis $g, h, \dots$, deinde ponatur $\frac{\nu}{a^\alpha} = a'$, $\frac{\nu}{b^\beta} = b'$, $\dots$; tum forma

$$a' g^m + b' h^n + \cdots$$

systema numerorum ad numerum ν primorum atque inter se incongruorum contineri constat, si numeris $m, n, \dots$ sensim sensimque resp. valores $1, 2, \dots a^{\alpha-1}(a-1)$; $1, 2, \dots b^{\beta-1}(b-1)$; etc. tribuuntur. — Nunc sit λ divisor aliquis ipsius $a^{\alpha-1}(a-1)$ talis, ut multiplum sit ipsius $a^{\alpha-1}$, λ' divisor ipsius $b^{\beta-1}(b-1)$, multiplum ipsius $b^{\beta-1}$, etc., ita ut habeamus

$$\lambda\mu = a^{\alpha-1}(a-1), \quad \lambda'\mu' = b^{\beta-1}(b-1), \quad \dots,$$

---

*) $\varphi(\nu)$ numerus ille est numerorum ad ipsum ν primorum eoque minorum.

**) Demonstrationem illam, de qua sermo est, proximo tempore in publicum editurus sum.

et ponatur:

$$\varepsilon_{k,k',\dots} = \sum_{m=0}^{m=\mu-1} \sum_{n=0}^{n=\mu'-1} \dots \omega^{a'g^{m\lambda+k}+b'h^{n\lambda'+k'}+\dots}$$

sive

$$\varepsilon_{k,k',\dots} = \sum_m \omega^{a'g^{m\lambda+k}} . \sum_n \omega^{b'h^{n\lambda'+k'}} \dots,$$

quae expressiones partes periodorum in numeris primis ν agunt. — Numerus terminorum expressionis talis erit: $\mu.\mu'.\mu''\dots$, numerus periodorum ε inter se diversarum: $\lambda.\lambda'.\lambda''\dots$, cum quantitates $k, k', \dots$ resp. valores $0, 1, 2, \dots \lambda-1$; $0, 1, 2, \dots \lambda'-1$; etc. induere possint.

Productum $\Pi(x-\varepsilon)$, ubi signum Π in omnes ipsius ε valores extendi debet, functionem radicum ω symmetricam ideoque integris potestatum x coefficientibus gaudere apparet. — Per aequationem $\Pi(x-\varepsilon) = 0$, quippe quae sit gradus $\lambda.\lambda'.\lambda''\dots$, quaevis ipsius ε potestas $\geqq \lambda\lambda'\lambda''\dots$ potestatibus inferioribus exprimi potest.

Duae periodi ε diversorum indicum aequales esse non possunt.

Primum enim ex aequatione $\varepsilon_{0,0,\dots} = \varepsilon_{k,k',k'',\dots}$ sequeretur aequatio eiusmodi $\varepsilon_{0,0,\dots} = \varepsilon_{k,mk',nk'',\dots}$ *) designantibus $m, n, \dots$ numeros quoscunque integros. Iam ponendo $m = b^{\beta-1}(b-1)$, $n = c^{\gamma-1}(c-1)$, etc. obtinemus $\varepsilon_{0,0,0,\dots} = \varepsilon_{k,0,0,\dots}$ sive respecta illa altera ipsorum ε definitione atque sublatis factoribus utriusque partis communibus:

$$\Sigma \omega^{a'g^{m\lambda}} = \Sigma \omega^{a'g^{m\lambda+k}},$$

cumque $\omega^{a'}$ sit radix aequationis $x^{a^\alpha} = 1$ primitiva, pro iis unitatis radicibus, quae ad numerorum primorum potestates pertinent, illud theorema demonstrare sufficit. Quem ad finem designamus brevitatis causa signo ε_k expressionem $\Sigma \omega^{a'g^{m\lambda+k}}$ et ipsam radicem unitatis $a^{\alpha \text{tam}}$ primitivam litera ω, ponatur denique $a^{\alpha-1}(a-1) = \mathfrak{a}$, ita ut habeamus $\varepsilon_k = \Sigma \omega^{g^{m\lambda+k}}$. Iam colliguntur ex aequatione $\varepsilon_0 = \varepsilon_k$ haece: $\varepsilon_1 = \varepsilon_{k+1}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{k+2}$, etc., unde igitur:

$$\text{I.} \quad \varepsilon + \varrho\varepsilon_1 + \varrho^2\varepsilon_2 + \dots + \varrho^{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} = \varepsilon_k + \varrho\varepsilon_{k+1} + \varrho^2\varepsilon_{k+2} + \dots + \varrho^{\lambda-1}\varepsilon_{k+\lambda-1},$$

ubi ϱ radix quaecunque sit aequationis $x^{\mathfrak{a}} = 1$. Posito:

$$\omega + \varrho\omega^g + \varrho^2\omega^{g^2} + \dots + \varrho^{\mathfrak{a}-1}\omega^{g^{\mathfrak{a}-1}} = (\varrho, \omega)$$

obtinemus secundum I pro quovis ipsius ϱ valore, qui radix est aequationis $x^\lambda = 1$:

$$(\varrho, \omega) = (\varrho, \omega^{g^k}) = (\varrho, \omega).\varrho^{-k}, \text{ unde } (\varrho, \omega)\,(1-\varrho^{-k}) = 0,$$

---

*) Nempe mutando ipsum ω, id quod secundum supra dicta facere licet.

id quod certe fieri non posse pro radicibus ϱ aequationis $x^\lambda = 1$ primitivis iam probemus. Pro his enim $1-\varrho^{-k}$ evanescere nequit, quia $k < \lambda$ est. Deinde (ϱ, ω) non evanescit, quod demonstrari potest*) productum $(\varrho, \omega)(\varrho^{-1}, \omega) = \pm a^a$ evadere nisi $\varrho^{a^{\alpha-2}(a-1)} = 1$; cumque λ multiplum ipsius $a^{\alpha-1}$ atque ϱ radicem aequationis $x^\lambda = 1$ primitivam supposuerimus, radicem ϱ aequationi $\varrho^{a^{\alpha-2}(a-1)} = 1$ sufficere non posse ideoque quantitatem (ϱ, ω) non evanescere facile perspicitur.

Posito $A, A_1, \ldots$ numeros reales integros esse, expressio formae:

$$A + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots + A_{L-1}\varepsilon^{L-1} = f(\varepsilon)^{**})$$

numerus complexus dicetur.

Ex aequatione $f(\varepsilon) = 0$ colligitur $f(\varepsilon_k) = 0$, quia $f(\varepsilon)$ radicum ω functio est integra. — Deinde e relatione $f(\varepsilon) = 0$ colligimus esse $A = A_1 = A_2 = \cdots = 0$. Cum enim $f(x)$ pro omnibus periodis ε i. e. pro L valoribus ipsius x (quos inter se diversos esse supra probavimus) evanescat, tamenque gradus tantum $L-1^{\text{ti}}$ sit, coefficientes evanescere necesse est. Unde haec theoremata patent: duabus numeris complexis inter se aequalibus et singuli numeri coniuncti et coefficientes resp. aequales sunt.

Quaevis periodus $\varepsilon_{k,k',k'',\ldots}$ tanquam functio integra coefficientium rationalium unius periodi repraesentari potest. Ad quod probandum primum numerus ν potestas numeri primi ($\nu = a^\alpha$) ponendus est. Iam designante litera ω radicem primitivam aequationis $x^{a^\alpha} = 1$ ponatur:

$$\omega^{g^k} + \omega^{g^{\lambda+k}} + \cdots + \omega^{g^{(\mu-1)\lambda+k}} = \varepsilon_k = \varepsilon(\omega^{g^k}),$$

denique $\lambda = a^{\alpha-1}.d$ et $d.\mu = a-1$. — Radix ω cum aequationi sufficiat:

$$1 + \omega^{a^{\alpha-1}} + \omega^{2a^{\alpha-1}} + \cdots + \omega^{(a-1)a^{\alpha-1}} = 0$$

ideoque

$$\omega^r + \omega^{r+a^{\alpha-1}} + \omega^{r+2a^{\alpha-1}} + \cdots + \omega^{r+(a-1)a^{\alpha-1}} = 0,$$

habemus aequationes:

$$\varepsilon(\omega^r) + \varepsilon(\omega^{a^{\alpha-1}+r}) + \cdots + \varepsilon(\omega^{(a-1)a^{\alpha-1}+r}) = 0,$$

in quibus numerus r valores 1, 2, ... $a^{\alpha-1}-1$ induere potest. Inter quas vero quaeque μ inter se congruunt, unde numerus aequationum inter se di-

---

*) Id quod fusius exponere omittimus.

**) Posuimus $L = \lambda.\lambda'.\lambda''\ldots$

versarum est $\frac{a^{\alpha-1}-1}{\mu}+1$, addita illa aequatione pro $r=0$ scilicet:

$$\mu+\varepsilon(\omega^{a^{\alpha-1}})+\cdots+\varepsilon(\omega^{(a-1)a^{\alpha-1}})=0.$$

Numerus expressionum omnium $\varepsilon(\omega^r)$ inter se diversarum est $\frac{a^\alpha-1}{\mu}$, quarum autem $\frac{a^{\alpha-1}-1}{\mu}+1$ reliquis per illas aequationes lineariter exprimere licet; qua de causa tantum $\frac{a^\alpha-a^{\alpha-1}}{\mu}-1$ sive $\lambda-1$ restant. Iam quamvis ipsius $\varepsilon(\omega^{g^k})$ potestatem tanquam functionem linearem *omnium* expressionum $\varepsilon(\omega^r)$ ideoque tanquam functionem linearem aliquarum $(\lambda-1)$ quantitatum $\varepsilon(\omega^r)$ repraesentari posse nullo negotio perspicitur. Qua de causa ponamus potestates $\varepsilon_k^2, \varepsilon_k^3, \ldots \varepsilon_k^{\lambda-1}$ repraesentatas $\lambda-1$ expressionibus $\varepsilon(\omega^r)$, inter quas sint ε_k et $\varepsilon(\omega^n)$. Ex quibus $\lambda-2$ aequationibus, reliquis $\lambda-3$ quantitatibus $\varepsilon(\omega^r)$ eliminatis, restabit aequatio huius formae:

$$A+A_1\varepsilon_k+A_2\varepsilon_k^2+\cdots+A_{\lambda-1}\varepsilon_k^{\lambda-1}=B\varepsilon(\omega^n),$$

ubi certe non omnes coefficientes A evanescere possunt. Coefficientem B evanescere non posse, solutionem igitur non illusoriam esse, inde elucet, quod functio periodi ε_k gradus $(\lambda-1)^{\text{ti}}$ integra evanescere nequit, nisi ipsi coefficientes nihilo aequales sunt*).

Quodsi iam ν numerum aliquem compositum ponimus, atque

$$\Sigma\omega^{a'g^{m\lambda+k}}=\varepsilon_k,\quad \Sigma\omega^{b'h^{n\lambda+k'}}=\varepsilon'_{k'},\ \text{etc.}$$

igitur secundum illam definitionem: $\varepsilon_{k,k',\ldots}=\varepsilon_k.\varepsilon'_{k'}\ldots$ scimus hoc productum exprimi posse producto functionum rationalium ipsorum $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$. Restat igitur, ut probemus quodvis productum $\varepsilon^i.\varepsilon'^{i'}\ldots$ repraesentari posse potestatibus $(\varepsilon.\varepsilon'.\varepsilon''\ldots)$, $(\varepsilon.\varepsilon'.\varepsilon''\ldots)^2$, $\ldots$ $(\varepsilon.\varepsilon'.\varepsilon''\ldots)^{L-1}$. Cum vero quaeque i^{ta} ipsius ε potestas potestate prima, secunda, etc., $(\lambda-1)^{\text{ta}}$ exprimi possit, illae $L-1$ potestates quantitatis $(\varepsilon.\varepsilon'.\varepsilon''\ldots)$ repraesentari possunt variis productis $\varepsilon^i.\varepsilon'^{i'}\ldots$, in quibus $i<\lambda$, $i'<\lambda'$, $\ldots$, quorum igitur numerus est $\lambda.\lambda'.\lambda''\ldots=L$, vel excepto producto $\varepsilon^0.\varepsilon'^0\cdots=1$ restant $L-1$ producta, quibus potestates $(\varepsilon.\varepsilon'\ldots)^2$, $(\varepsilon.\varepsilon'\ldots)^3, \ldots$ expressae sunt. Ex quibus aequationibus $L-2$ si omnia eliminamus producta exceptis $\varepsilon.\varepsilon'.\varepsilon''\ldots$ et certo quodam $\varepsilon^i.\varepsilon'^{i'}\ldots$, quorum igitur multitudo $L-3$, obtinemus aequationem formae:

$$A+A_1(\varepsilon.\varepsilon'\ldots)+A_2(\varepsilon.\varepsilon'\ldots)^2+\cdots+A_{L-1}(\varepsilon.\varepsilon'\ldots)^{L-1}=B\varepsilon^i.\varepsilon'^{i'}\ldots,$$

*) Id quod ratione supra (pag. 19) exhibita probatur.

in qua certe non omnes coefficientes A evanescere possunt. Ideoque coefficientem B non evanescere inde patet, quod functio periodi ε gradus $L-1^{\text{ti}}$ evanescere nequit, nisi omnes eius coefficientes evanescunt (v. supra pag. 19).

Ex quibus dictis satis elucet, quodque numerorum complexorum productum rursus in formam:

$$A + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \cdots + A_{L-1}\varepsilon^{L-1}$$

redigi posse ideoque et ipsum numerum complexum esse.

Productum numerorum coniunctorum omnium norma appellatur et sicut supra signo $\mathrm{Nm} f(\varepsilon)$ denotatur.

Iam eadem ratione, qua Cl. *Kummer* in numeris primis ν demonstravit congruentiam λ^{ti} gradus $\mathrm{Nm}(x-\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$ habere λ radices, et numero primo p sufficiente condicioni $p^{\mu} \equiv 1 \pmod{\nu}$ et casu $p = \nu$ (v. § 2), id quod huic rei respondet, posito ν numerum esse compositum, probari potest: scilicet congruentiam gradus $\lambda\lambda'\lambda''\ldots$ hanc $\mathrm{Nm}(x-\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$ habere totidem radices reales, si p supponitur numerus talis, ut sit $p^{\mu} \equiv 1 \pmod{a^{\alpha}}$, $p^{\mu'} \equiv 1 \pmod{b^{\beta}}$, ..., vel etiam pro aliquo ipso ipsius ν factore primo e. g. $p = a$, dummodo $a^{\mu'} \equiv 1 \pmod{b^{\beta}}$ etc. sit*).

Pro talibus numeris primis p, quales tantum congruentiis sufficiunt

$$p^{a^k.\delta} \equiv 1 \pmod{a^{\alpha}}, \quad p^{b^{k'}.\delta'} \equiv 1 \pmod{b^{\beta}}, \quad \ldots,$$

ubi δ, δ'... divisores numerorum $a-1$, $b-1$, ..., numeri autem k, k', ... vel omnes vel partim > 0 sunt, erit $\mathrm{Nm}(x-\varepsilon) \equiv 0 \pmod{p}$ designante ε periodum compositam e radicibus primitivis aequationis $z^{a^{\alpha-k}b^{\beta-k'}\cdots} = 1$ atque habebuntur $\dfrac{\varphi(\nu)}{a^k.\delta.b^{k'}.\delta'\ldots}$ istius congruentiae radices x.

Quibus iam praeparatis theoremata iis, quae in paragraphis 2—6 pro numeris primis ν tradita sunt, respondentia nullo fere negotio pro numeris compositis ν probari possunt.

---

*) Id quod etiam e theoremate quodam generali a Clo. *Schoenemann* tradito colligi potest (*Crelles* Journal Bd. 19, S. 293).

PARS ALTERA.

§ 8.

Posito literas ν, μ, λ, ω, ε eandem habere vim quam in § 1 etiamque acceptis numeris complexis formae illius:

$$a\varepsilon + a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} = f(\varepsilon)$$

numerum talem complexum, cuius norma sit ± 1, unitatem complexam vocamus.

Disquisitio igitur unitatum complexarum eadem est, quae disquisitio formarum quarundam altiorum graduum $F = 1$. Normam enim numeri

$$a\varepsilon + a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}$$

formam esse λ^{ti} gradus atque λ indeterminatarum a, a_1, ... $a_{\lambda-1}$ et quidem determinantis, ut ita dicam, numeri primi ν sponte patet*). Quas aequationes $F = 1$ fere partes aequationis Pellianae agere imprimis ex eo elucet, quod casu $\lambda = 2$ atque $\nu \equiv 1$ (mod. 4) fit

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\nu}, \quad \varepsilon_1 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\nu},$$

unde:

$$\mathrm{Nm} f(\varepsilon) = \tfrac{1}{4}\{(a+a_1)^2 - \nu(a-a_1)^2\}.$$

Nunc primum adnotamus ipsas unitatis radices ω unitates simplices appellari atque quamlibet unitatem complexam, unitate simplici multiplicatam, realem reddi posse demonstrabimus, in qua demonstratione Cli. *Kummer* vestigia fere omnino sequemur**).

Cum omnis periodorum functio etiam tanquam ipsarum radicum functio considerari possit, ponimus $f(\varepsilon) = \varphi(\omega)$, sitque $\mathrm{Nm} f(\varepsilon) = 1$, ergo etiam $\mathrm{Nm}\,\varphi(\omega) = 1$. Sit porro

$$\frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\omega^{-1})} = \psi(\omega),$$

quem numerum integrum esse apertum est, scilicet

$$\psi(\omega) = \varphi(\omega)^2 \varphi(\omega^2) \ldots \varphi(\omega^{\nu-2}).$$

Iam posito

$$\psi(\omega) = c + c_1\omega + c_2\omega^2 + \cdots + c_{\nu-1}\omega^{\nu-1}$$

*) Cf. *Eisenstein* „de formis cubicis etc." (*Crelles* Journal, Bd. 28).

**) Disputatio Cli. *Kummer* § 4.

additis aequationibus:

$$\psi(\omega).\psi(\omega^{-1})=1,\quad \psi(\omega^2).\psi(\omega^{-2})=1,\quad \ldots\quad \psi(\omega^{\nu-1}).\psi(\omega^{-(\nu-1)})=1$$

obtinemus:

$$\nu(c^2+c_1{}^2+\cdots+c_{\nu-1}^2)-(c+c_1+\cdots+c_{\nu-1})^2=\nu-1\ ^{*)},$$

unde

$$c+c_1+\cdots+c_{\nu-1}\equiv\pm1\ (\text{mod.}\,\nu),$$

quocirca haec coefficientium summa etiam aequalis ±1 accipi potest. Itaque habemus:

$$c^2+c_1{}^2+\cdots+c_{\nu-1}^2=1,$$

unde sequitur, ut esse debeat $c_n=\pm1$, omnes reliqui vero numeri c nihilo aequales. Invenimus igitur

$$\psi(\omega)=\frac{\varphi(\omega)}{\varphi(\omega^{-1})}=\pm\omega^n$$

esse, unde (cum signum + valere ex congruentia $\varphi(\omega)\equiv\omega^n\varphi(\omega^{-1})$ (mod. $(1-\omega)$) colligere possimus):

$$\varphi(\omega)=\omega^n.\varphi(\omega^{-1})$$

atque posito $-n\equiv2m$ (mod. ν) denique:

$$\omega^m\varphi(\omega)=\omega^{-m}\varphi(\omega^{-1}).$$

Ex qua aequatione apparet, quamlibet unitatem $\varphi(\omega)$, multiplicando per unitatem quandam simplicem, talem fieri posse, ut mutato ω in ω^{-1} immutata maneat, i. e. ut functio ipsorum $\omega+\omega^{-1}$, $\omega^2+\omega^{-2}$, ..., ergo realis evadat. Igitur si ad unitates formae $f(\varepsilon)$ revertimur, unitates complexae tanquam functiones periodorum *paris* terminorum numeri accipi possunt.

Iam ostendemus pro quibusvis numeris ν et λ unitates existere infinite multas easque inter se diversas. Posito enim:

$$\varphi(\omega)=\frac{(1-\omega^g)(1-\omega^{g^{\lambda+1}})\ldots(1-\omega^{g^{(\mu-1)\lambda+1}})}{(1-\omega)(1-\omega^{g^\lambda})\ldots(1-\omega^{g^{(\mu-1)\lambda}})}=\psi(\varepsilon)$$

normam huius expressionis unitati aequalem facile patet, cum norma et numeratoris et denominatoris sit ν^μ. Deinde illam expressionem numerum complexum integrum esse patet, cum pro se quisque factor numeratoris $(1-\omega^{g^{k\lambda+1}})$ factore quodam denominatoris $(1-\omega^{g^{k\lambda}})$ dividi possit, quia $\frac{1-\omega^{g^{k\lambda+1}}}{1-\omega^{g^{k\lambda}}}=\frac{1-x^g}{1-x}$ posito $\omega^{g^{k\lambda}}=x$. Denique illa expressio functio periodorum ε est, quia mu-

*) Cf. id quod pag. 4 exposuimus.

tata radice ω in $\omega^{g^{k\lambda}}$ immutata manet. Hinc igitur patet $\psi(\varepsilon)$ unitatem esse integram complexam. — Etiamque producta:

$$\psi(\varepsilon)^{n} . \psi(\varepsilon_1)^{n_1} \dots \psi(\varepsilon_{\lambda-1})^{n_{\lambda-1}},$$

designantibus $n_1, n_2, \dots n_{\lambda-1}$ quoscunque numeros integros, unitates integras complexas esse apparet, quas quidem omnes inter se diversas infra probabimus.

Adnotamus quamvis quantitatem $\psi(\varepsilon_k)$ positivam realem esse. Etenim cum numerus μ par suppositus sit, cuique factori

$$1-\omega^{g^{n\lambda+k+1}} \quad \text{factor} \quad 1-\omega^{-g^{n\lambda+k+1}}$$

respondet. Quibus multiplicatis obtinemus $2-2\cos v = 4\sin^2 \frac{1}{2} v$, ubi

$$v = \frac{2}{\nu} \cdot g^{n\lambda+k+1} . \pi.$$

Unde iam et numeratorem et denominatorem ipsius $\psi(\varepsilon_k)$ positivum esse elucet.

§ 9.

Sit unitas illa $\psi(\varepsilon) = c\varepsilon + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}$, quam positivam realem esse modo demonstravimus, atque ponatur:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} c\varepsilon \quad + c_1\varepsilon_1 + \dots + c_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1} = r_1, \\ c\varepsilon_1 \quad + c_1\varepsilon_2 + \dots + c_{\lambda-1}\varepsilon \quad = r_2, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ c\varepsilon_{\lambda-1} + c_1\varepsilon \quad + \dots + c_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-2} = r_\lambda. \end{cases}$$

Deinde sit data aliqua unitas $a\varepsilon + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}$ atque designentur similiter valores absoluti factorum coniunctorum resp. literis $f_1, f_2, \dots f_\lambda$. Iam ponantur:

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} f_1 \quad = r_1^{n_1} \;. r_2^{n_2} \dots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}}, \\ f_2 \quad = r_2^{n_1} \;. r_3^{n_2} \dots r_\lambda^{n_{\lambda-1}}, \\ f_3 \quad = r_3^{n_1} \;. r_4^{n_2} \dots r_1^{n_{\lambda-1}}, \\ \qquad \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ f_{\lambda-1} = r_{\lambda-1}^{n_1} . r_\lambda^{n_2} \dots r_{\lambda-3}^{n_{\lambda-1}}, \\ f_\lambda \quad = r_\lambda^{n_1} \;. r_1^{n_2} \dots r_{\lambda-2}^{n_{\lambda-1}}. \end{cases}$$

Quod systema $\lambda-1$ aequationum atque $\lambda-1$ indeterminatarum n est, nam aequationibus omnibus multiplicatis per condicionem $f_1 f_2 \dots f_\lambda = r_1 r_2 \dots r_\lambda = 1$ aequationem identicam $1 = 1$ obtinemus, unde sequitur, ut quaevis istarum

aequationum e $\lambda-1$ reliquis deduci possit. Quodsi in systemate (II) logarithmos pro numeris adhibemus atque signis $\log f_k = \varphi_k$, $\log r_k = \varrho_k$ valores logarithmorum naturalium denotamus, obtinetur:

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} \varphi_1 = n_1\varrho_1 + n_2\varrho_2 + \cdots + n_{\lambda-1}\varrho_{\lambda-1}, \\ \varphi_2 = n_1\varrho_2 + n_2\varrho_3 + \cdots + n_{\lambda-1}\varrho_\lambda, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \varphi_\lambda = n_1\varrho_\lambda + n_2\varrho_1 + \cdots + n_{\lambda-1}\varrho_{\lambda-2}. \end{cases}$$

Quibus aequationibus deinceps per $1,\ \alpha,\ \alpha^2, \ldots \alpha^{\lambda-1}$ multiplicatis (ubi α radix aliqua unitatis λ^{ta} est) iisque additis eadem qua in § 1 usi sumus ratione obtinemus:

$$\text{(IV.)}\quad \varphi_1+\varphi_2\alpha+\cdots+\varphi_\lambda\alpha^{\lambda-1} = (n_1+n_2\alpha^{-1}+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-2)}).(\varrho_1+\varrho_2\alpha+\cdots+\varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1}).$$

Iam positis:

$$\varphi_1+\varphi_2\alpha+\varphi_3\alpha^2+\cdots+\varphi_\lambda\alpha^{\lambda-1} = \varphi(\alpha),$$
$$\varrho_1+\varrho_2\alpha+\varrho_3\alpha^2+\cdots+\varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1} = \varrho(\alpha)$$

erit

$$\varphi(\alpha) = \varrho(\alpha)(n_1+n_2\alpha^{-1}+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-2)}),$$

ergo:

$$\text{(V.)}\quad \frac{\varphi(\alpha).\varrho(\alpha^2).\varrho(\alpha^3)\ldots\varrho(\alpha^{\lambda-1})}{\varrho(\alpha).\varrho(\alpha^2).\varrho(\alpha^3)\ldots\varrho(\alpha^{\lambda-1})} = n_1+n_2\alpha^{-1}+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-2)},$$

quae aequatio systematis (III) solutionem repraesentat. Etenim posito brevitatis causa:

$$\frac{\varphi(\alpha).\varrho(\alpha^2)\ldots\varrho(\alpha^{\lambda-1})}{\varrho(\alpha).\varrho(\alpha^2)\ldots\varrho(\alpha^{\lambda-1})} = \psi(\alpha)$$

atque designante α radicem unitatis λ^{tam} ***primitivam*** aequatio (V) locum tenet aequationum:

$$\psi(\alpha^k) = n_1+n_2\alpha^{-k}+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{-k(\lambda-2)} \qquad (k=1,2,\ldots\lambda-1).$$

Unde (sicut pag. 4) colligimus esse:

$$\alpha^k\psi(\alpha)+\alpha^{2k}\psi(\alpha^2)+\cdots+\alpha^{(\lambda-1)k}\psi(\alpha^{\lambda-1}) = \lambda n_{k+1}-(n_1+n_2+\cdots+n_{\lambda-1})$$

pro valoribus $k=0,\ 1, \ldots \lambda-2$ et

$$\alpha^{\lambda-1}\psi(\alpha)+\alpha^{2(\lambda-1)}\psi(\alpha^2)+\cdots+\alpha^{(\lambda-1)^2}\psi(\alpha^{\lambda-1}) = -(n_1+n_2+\cdots+n_{\lambda-1}),$$

ergo denique:

$$\text{(VI.)}\quad \lambda n_{k+1} = (\alpha^k-\alpha^{-1})\psi(\alpha)+(\alpha^{2k}-\alpha^{-2})\psi(\alpha^2)+\cdots+(\alpha^{(\lambda-1)k}-\alpha)\psi(\alpha^{\lambda-1}),$$

qua aequatione re vera quodvis n quantitatibus ϱ et φ expressum est.

Sed etiam determinantem systematis (III) non evanescere demonstrandum est. Qui determinans denominator sinistrae partis aequationis (V)

scilicet productum

$$\varrho(\alpha).\varrho(\alpha^2)\ldots\varrho(\alpha^{\lambda-1})$$

est, designante α radicem primitivam. Ergo probandum est, nullum istius producti factorem evanescere, seu quantitatem

$$\varrho_1+\varrho_2\alpha+\varrho_3\alpha^2+\cdots+\varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1} \quad \text{i. e.} \quad \sum_{k=0}^{k=\lambda-1}\varrho_{k+1}\alpha^k$$

pro quavis unitatis radice λ^{ta} unitate excepta a nihilo diversam esse. — Iam substituto ipsius ϱ_{k+1} valore scilicet:

$$\varrho_{k+1} = \log r_{k+1} = \log\frac{(1-\omega^{g^{k+1}})(1-\omega^{g^{k+1+\lambda}})\ldots(1-\omega^{g^{k+1+(\mu-1)\lambda}})}{(1-\omega^{g^k})\;(1-\omega^{g^{k+\lambda}})\;\ldots(1-\omega^{g^{k+(\mu-1)\lambda}})}$$

sive:

$$\begin{aligned}\varrho_{k+1} \;=\; &\log(1-\omega^{g^{k+1}})+\log(1-\omega^{g^{k+1+\lambda}})+\cdots+\log(1-\omega^{g^{k+1+(\mu-1)\lambda}})\\ &-\log(1-\omega^{g^k})\;-\log(1-\omega^{g^{k+\lambda}})\;-\cdots-\log(1-\omega^{g^{k+(\mu-1)\lambda}})\end{aligned}$$

$\varrho(\alpha)$ sive $\Sigma\varrho_{k+1}\alpha^k$ abit in:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_0^{\lambda-1}\{\log(1-\omega^{g^{k+1}})+\log(1-\omega^{g^{k+1+\lambda}})+\cdots+\log(1-\omega^{g^{k+1+(\mu-1)\lambda}})\}\,\alpha^k\\ -&\sum_0^{\lambda-1}\{\log(1-\omega^{g^k})\;\;+\log(1-\omega^{g^{k+\lambda}})\;\;+\cdots+\log(1-\omega^{g^{k+(\mu-1)\lambda}})\}\,\alpha^k\end{aligned}\right.$$

sive

$$\sum_{k=0}^{k=\mu\lambda-1}\alpha^k.\log(1-\omega^{g^{k+1}})-\sum_{k=0}^{k=\mu\lambda-1}\alpha^k.\log(1-\omega^{g^k}),$$

ratione scilicet habita aequationis $\alpha^{k+\iota\lambda}=\alpha^k$.

Iam cum sit:

$$-\log(1-\omega^{g^k}) \;=\; \frac{\omega^{g^k}}{1}+\frac{\omega^{2g^k}}{2}+\frac{\omega^{3g^k}}{3}+\cdots,$$

fit:

$$-\sum_0^{\mu\lambda-1}\alpha^k\log(1-\omega^{g^k}) \;=\; \sum_n\sum_{k=0}^{k=\mu\lambda-1}\alpha^k.\frac{\omega^{ng^k}}{n},$$

in qua summatione n omnes numeros integros positivos ad numerum ν primos designat. Nam pro valoribus $n=r\nu$ fit:

$$\omega^{ng^k}=1 \;\text{ et }\sum_0^{\mu\lambda-1}\frac{\alpha^k}{n}=\frac{1}{n}(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{\mu\lambda-1})=0.$$

Quodsi Cli. *Jacobi* signis utimur, expressio

$$\sum_n\sum_0^{\mu\lambda-1}\alpha^k.\frac{\omega^{ng^k}}{n} \quad \text{abit in} \quad \sum_n\frac{1}{n}(\alpha,\omega^n),$$

ubi

$$(\alpha,\omega) \;=\; \omega+\alpha\,\omega^g+\alpha^2\omega^{g^2}+\cdots+\alpha^{\nu-2}\omega^{g^{\nu-2}},$$

et adhibita relatione $(\alpha, \omega^n) = \alpha^{-\text{Ind}.n}(\alpha, \omega)$ obtinemus:

$$-\Sigma\alpha^k.\log(1-\omega^{g^k}) = (\alpha, \omega)\Sigma\frac{\alpha^{-\text{Ind}.n}}{n}$$

et mutato ω in ω^g:

$$\Sigma\alpha^k.\log(1-\omega^{g^{k+1}}) = -(\alpha, \omega^g)\Sigma\frac{\alpha^{-\text{Ind}.n}}{n}$$

i. e.

$$\Sigma\alpha^k.\log(1-\omega^{g^{k+1}}) = -\alpha^{-1}(\alpha, \omega).\Sigma\frac{\alpha^{-\text{Ind}.n}}{n}.$$

Ergo habemus denique:

$$\varrho(\alpha) = (1-\alpha^{-1})(\alpha, \omega)\sum_n\frac{\alpha^{-\text{Ind}.n}}{n}.$$

Iam neque factor (α, ω) neque $(1-\alpha^{-1})$ evanescere potest. Prior enim sententia ex aequatione $(\alpha, \omega)(\alpha^{-1}, \omega) = \pm\nu$, secunda ex eo, quod α ab unitate diversum positum est, elucet. Restat igitur, ut factorem $\Sigma\frac{\alpha^{-\text{Ind}.n}}{n}$ non evanescere probetur. Tum etiam $\Sigma\frac{\alpha^{+\text{Ind}.n}}{n}$ evanescere deberet, id quod pro nullo α, quod sit radix aequationis $x^{\nu-1} = 1$, ideoque etiam pro nulla radice unitatis λ^{ta} α fieri posse Cl. *Lejeune-Dirichlet* in illustri illa commentatione „de progressione arithmetica infinita" etc. (§ 4 et 5) singularibus illis methodis demonstravit.

§ 10.

Si in valoribus quantitatum n, aequatione IV § 9 determinatis, numeros integros quam maximos secernimus, ita ut sint $n_1 = E_1 + \delta_1$, $n_2 = E_2 + \delta_2$, ..., quantitatibus δ inter 0 et 1 acceptis, aequationes II § 9 mutantur in:

$$\text{(I.)}\quad f_1 = r_1^{E_1}.r_2^{E_2}\ldots r_{\lambda-1}^{E_{\lambda-1}}.r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\ldots r_{\lambda-1}^{\delta_{\lambda-1}} \quad \text{etc.}$$

Ex quibus aequationibus, cum et f_1 et $r_1^{E_1}.r_2^{E_2}\ldots r_{\lambda-1}^{E_{\lambda-1}}$ unitates integrae complexae sint, alter quoque dextrae partis factor: $r_1^{\delta_1}.r_2^{\delta_2}\ldots r_{\lambda-1}^{\delta_{\lambda-1}}$ unitas integra complexa sit oportet. Ponatur igitur:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} r_1^{\delta_1}r_2^{\delta_2}\ldots r_{\lambda-1}^{\delta_{\lambda-1}} = F_1 = A\varepsilon \quad + A_1\varepsilon_1 + \cdots + A_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}, \\ r_2^{\delta_1}r_3^{\delta_2}\ldots r_\lambda^{\delta_{\lambda-1}} = F_2 = A\varepsilon_1 \quad + A_1\varepsilon_2 + \cdots + A_{\lambda-1}\varepsilon, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ r_\lambda^{\delta_1}r_1^{\delta_2}\ldots r_{\lambda-2}^{\delta_{\lambda-1}} = F_\lambda = A\varepsilon_{\lambda-1} + A_1\varepsilon \quad + \cdots + A_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-2} \end{cases}$$

designantibus A, A_1, ... numeros integros. Quo facto secundum aequationes

illas VII § 1 has quae sequuntur aequationes tanquam istius systematis aequationum II solutionem nanciscimur:

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} -\nu.A &= F_1(\mu-\varepsilon) \quad +F_2(\mu-\varepsilon_1)+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{\lambda-1}),\\ -\nu.A_1 &= F_1(\mu-\varepsilon_1) \quad +F_2(\mu-\varepsilon_2)+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon),\\ \quad\vdots & \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -\nu.A_{\lambda-1} &= F_1(\mu-\varepsilon_{\lambda-1})+F_2(\mu-\varepsilon) \quad +\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{\lambda-2}). \end{cases}$$

Periodos ε minores esse numero μ, quo numerum terminorum periodi designavimus, facile perspicitur. Nam quaevis periodus ε (posito $\frac{1}{2}\mu=\mathfrak{m}$) formae est:

$$\omega^{k_1}+\omega^{-k_1}+\omega^{k_2}+\omega^{-k_2}+\cdots+\omega^{k_\mathfrak{m}}+\omega^{-k_\mathfrak{m}}$$

sive igitur formae

$$2\cdot\left\{\cos\frac{2k_1\pi}{\nu}+\cos\frac{2k_2\pi}{\nu}+\cdots+\cos\frac{2k_\mathfrak{m}\pi}{\nu}\right\},$$

quod aggregatum cosinuum ipsorum numero $\frac{1}{2}\mu$ minus esse in promptu est.

Deinde absolutos ipsorum F valores limites quosdam $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, ... superare non posse ex aequationibus II et condicionibus, quibus ibidem quantitates δ sunt circumscriptae, colligi potest. Unde sequitur, ut quantitates quoque $-\nu A$, $-\nu A_1$, ... limitibus quibusdam contineantur, scilicet cum quantitates $\mu-\varepsilon$ sint positivae:

$$\mathfrak{F}_1(\mu-\varepsilon_k)+\mathfrak{F}_2(\mu-\varepsilon_{k+1})+\cdots+\mathfrak{F}_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1}) > -\nu A_k,$$
$$-\mathfrak{F}_1(\mu-\varepsilon_k)-\mathfrak{F}_2(\mu-\varepsilon_{k+1})-\cdots-\mathfrak{F}_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1}) < -\nu A_k,$$

sive

$$\frac{1}{\nu}\{\mathfrak{F}_1(\mu-\varepsilon_k)+\cdots+\mathfrak{F}_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\} > A_k > -\frac{1}{\nu}\{\mathfrak{F}_1(\mu-\varepsilon_k)+\cdots+\mathfrak{F}_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\}.$$

Cum vero A_k numerus integer esse debeat, multitudinem tantum finitam numerorum A, A_1, ... etiamque igitur numerum finitum unitatum F, quae forma in II accepta gaudeant, existere posse patet.

Quae cum conferamus cum aequatione I, sequitur, ut quaelibet unitas f potestatibus integris unitatum coniunctarum r_1, r_2, ... $r_{\lambda-1}$ et unitatibus quibusdam numeri finiti exprimi possint; i. e. ut cunctae unitates forma

$$F.r_1^{k_1}.r_2^{k_2}\ldots r_{\lambda-1}^{k_{\lambda-1}}$$

contineantur, designantibus k_1, k_2, ... numeros integros et F unitatem quandam e numero unitatum finito electam, sive denique ut numerus unitatum fundamentalium, quarum potestatibus integris omnis unitas repraesentari queat, finitus sit.

§ 11.

Iam accuratius, quibus limitibus numeri integri $A, A_1, \ldots$ sint circumscripti, consideraturi sumus, quo labor inveniendi unitates fundamentales aliquanto diminuatur. Ad quem finem disquisitionem instituamus de illa expressione ipsius $-\nu A_k$ (§ 10, III):

$$\text{(I.)} \quad F_1(\mu-\varepsilon_k)+F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1}),$$

ubi

$$F_n = r_n^{\delta_1}.r_{n+1}^{\delta_2}\ldots r_{n-2}^{\delta_{\lambda-1}},$$

eamque consideremus tanquam functionem quantitatum δ. Quotientes differentiales istius functionis I respectu quantitatum $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sunt:

$$\text{(II.)} \begin{cases} F_1(\mu-\varepsilon_k)\varrho_1 \;\; +F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})\varrho_2+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\varrho_\lambda, \\ F_1(\mu-\varepsilon_k)\varrho_2 \;\; +F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})\varrho_3+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\varrho_1, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad , \\ F_1(\mu-\varepsilon_k)\varrho_{\lambda-1}+F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})\varrho_\lambda+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\varrho_{\lambda-2}, \end{cases}$$

in quibus formulis notatione iam supra adhibita, $\log r_k = \varrho_k$, usi sumus.

Quotientes differentiales secundi et quidem ii, quos expressionum (II) prima respectu δ_1, secunda respectu δ_2 etc. differentiatis obtinemus, erunt:

$$\begin{cases} F_1(\mu-\varepsilon_k)\varrho_1^2 \;\; +F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})\varrho_2^2+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\varrho_\lambda^2, \\ F_1(\mu-\varepsilon_k)\varrho_2^2 \;\; +F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})\varrho_3^2+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\varrho_1^2, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad , \\ F_1(\mu-\varepsilon_k)\varrho_{\lambda-1}^2+F_2(\mu-\varepsilon_{k+1})\varrho_\lambda^2+\cdots+F_\lambda(\mu-\varepsilon_{k-1})\varrho_{\lambda-2}^2, \end{cases}$$

quas expressiones pro quibusvis quantitatum δ valoribus positivas manere elucet. Unde facili consideratione colligi potest, functionem illam (I), dum variabiles δ intervallum inter 0 et 1 percurrunt, valorem haud maiorem obtinere posse eo, qui inter valores functionis extremis ipsorum δ valoribus respondentes maximus sit. Quare quaestio de valore ipsius νA_k absolute maximo ad disquisitionem valorum, qui ad valores quantitatum δ hos: 0 et 1 pertinent, restringitur. Valoribus igitur quantitatum r computatis, quantitates F combinationibus quibusvis valorum 0 et 1 pro ipsis δ (multitudinis igitur $2^{\lambda-1}$) respondentes computentur, ut valor earum maximus M inveniatur. Sit numerus integer ipso $\frac{M}{\nu}$ minor eique proximus $= n$; iam unitates omnes complexae, quarum coefficientes inter $-n$ et $+n$ sunt, statuendae atque inter eas, quae ad alias reduci possunt, reiiciendae, ut tandem numerus unitatum fundamentalium quam minimus restet.

Sic e. g. posito $\nu = 7$, $\lambda = 3$ atque

$$r_1 = \omega + \omega^{-1}, \quad r_2 = \omega^2 + \omega^{-2}, \quad r_3 = \omega^3 + \omega^{-3}$$

iste numerus $n = 1$ sine magno labore invenitur, ita ut valores coefficientium sint -1, 0, $+1$. Numeri igitur complexi 24 disquirendi*), inter quos vero terni factores sunt coniuncti. Inter octo illos, qui supersunt, rursus bini numeros aequales sed signo tantum oppositos praebent, ita ut denique hi quatuor restent:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = \omega + \omega^{-1}, \\ &\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \omega + \omega^{-1} + \omega^2 + \omega^{-2} = \varepsilon_2 . \varepsilon_3, \\ &\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \omega + \omega^{-1} + \omega^2 + \omega^{-2} - \omega^3 - \omega^{-3} = -\varepsilon_2 . \varepsilon_3^3, \\ &\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \text{ unitas complexa non est.} \end{aligned}$$

Cumque tres illas unitates unitatibus ipsis ε exprimere liceat, has ipsas tanquam fundamentales accipere possumus, i. e. quarum potestatibus integris omnes unitates complexae ad $\nu = 7$, $\lambda = 3$ pertinentes repraesentari possint.

Haud inutile videtur hoc ipsum exemplum paulo uberius exponere, ut id de quo agitur magis in promptu sit. Cum enim sit:

$$\mathrm{Nm}(x\varepsilon + y\varepsilon_1 + z\varepsilon_2) = (x+y+z)^3 - 7(xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz),$$

solutionem aequationis

$$(x+y+z)^3 - 7(xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz) = \pm 1$$

numeris integris ita invenimus, ut numeri x, y, z integri determinentur aequationibus**):

$$\left\{\begin{aligned} -7x &= (\omega+\omega^{-1})^m(\omega^2+\omega^{-2})^n(2-\omega-\omega^{-1}) + (\omega^2+\omega^{-2})^m(\omega^3+\omega^{-3})^n(2-\omega^2-\omega^{-2}) \\ &\qquad + (\omega^3+\omega^{-3})^m(\omega+\omega^{-1})^n(2-\omega^3-\omega^{-3}), \\ -7y &= (\omega+\omega^{-1})^m(\omega^2+\omega^{-2})^n(2-\omega^2-\omega^{-2}) + (\omega^2+\omega^{-2})^m(\omega^3+\omega^{-3})^n(2-\omega^3-\omega^{-3}) \\ &\qquad + (\omega^3+\omega^{-3})^m(\omega+\omega^{-1})^n(2-\omega-\omega^{-1}), \\ -7z &= (\omega+\omega^{-1})^m(\omega^2+\omega^{-2})^n(2-\omega^3-\omega^{-3}) + (\omega^2+\omega^{-2})^m(\omega^3+\omega^{-3})^n(2-\omega-\omega^{-1}) \\ &\qquad + (\omega^3+\omega^{-3})^m(\omega+\omega^{-1})^n(2-\omega^2-\omega^{-2}), \end{aligned}\right.$$

designantibus m, n quoslibet numeros integros. Quod exemplum analogiam aequationis Pellianae prae se ferre apparet.

---

*) Nempe omissis his: 0, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

**) v. III. § 10.

§ 12.

Postquam demonstravimus numerum unitatum fundamentalium finitum esse, de hoc ipso numero disquisitiones instituamus ac primum quidem illum numerum ipso $\lambda-1$ minorem esse non posse sumus probaturi.

Sint igitur unitates fundamentales: $f, f', f'', \dots$, quarum logarithmi resp. literis $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ designentur. Quodsi literis

$$r_1, \quad r_2, \quad \dots \quad r_\lambda; \quad \varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \dots \quad \varrho_\lambda$$

eandem quam in paragraphis antecedentibus tribuimus vim, hae ipsae unitates potestatibus integris ipsorum f exprimi possint oportet. Quare sit:

$$\begin{array}{ll} r_1 = f^{a_1}.f'^{b_1}.f''^{c_1}\dots, & \varrho_1 = a_1\varphi+b_1\varphi'+c_1\varphi''+\cdots, \\ r_2 = f^{a_2}.f'^{b_2}.f''^{c_2}\dots, & \varrho_2 = a_2\varphi+b_2\varphi'+c_2\varphi''+\cdots, \\ \vdots & \vdots \\ r_{\lambda-1} = f^{a_{\lambda-1}}.f'^{b_{\lambda-1}}.f''^{c_{\lambda-1}}\dots, & \varrho_{\lambda-1} = a_{\lambda-1}\varphi+b_{\lambda-1}\varphi'+c_{\lambda-1}\varphi''+\cdots. \end{array}$$

Cum vero numerus quantitatum φ sit $\leqq \lambda-2$, his ipsis eliminatis certe una restabit aequatio formae:

$$\text{(I.)} \qquad n_1\varrho_1+n_2\varrho_2+\cdots+n_{\lambda-1}\varrho_{\lambda-1} = 0,$$

in qua aequatione $n_1, n_2, \dots$ non omnes nihilo aequales atque numeri integri esse deberent, cum et ipsa $a, b, c, \dots$ numeri sint integri. Id quod esse non posse sequentibus probatur.

Ex aequatione enim (I) colligimus aequationem:

$$r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\dots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}} = 1,$$

unde rursus mutatis periodis, quae expressionibus r continentur, hoc oritur aequationum systema:

$$\begin{array}{l} r_1^{n_1}r_2^{n_2}\dots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}} = 1, \\ r_2^{n_1}r_3^{n_2}\dots r_\lambda^{n_{\lambda-1}} = 1, \\ \vdots \\ r_\lambda^{n_1}r_1^{n_2}\dots r_{\lambda-2}^{n_{\lambda-1}} = 1. \end{array}$$

Unde per aequationem (IV) § 9 obtinemus:

$$(n_1+n_2\alpha^{-1}+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{-(\lambda-2)})(\varrho_1+\varrho_2\alpha+\cdots+\varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1}) = 0$$

pro quoque ipsius α valore. Cum autem factorem secundum non evanescere iam supra (§ 9) demonstratum sit, factor prior pro quoque ipsius α valore unitate excepta evanescere deberet, id quod fieri nequit, nisi $n_1 = n_2 = \cdots = 0$.

§ 13.

Antequam vero ad ulteriorem disquisitionem accedamus, minime a re abhorrere videtur notationem quandam indicare, qua formulae magnopere contrahantur. Designantibus enim $r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_{\lambda-1},\ r_\lambda$ unitates aliquas coniunctas, denotamus productum:

$$r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\ldots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}}$$

signo:

$$r_1^{n_1+n_2\alpha+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-2}} \quad \text{sive} \quad r_1^{n(\alpha)}.$$

Id quod ita quoque exhiberi potest, ut dicamus, posito

$$r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\ldots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}} = f_1,$$

pro aequationibus illis (IV § 9):

$$\varphi(\alpha^k) = (n_1+n_2\alpha^{-k}+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{-k(\lambda-2)})\varrho(\alpha^k)$$

substitui aequationem:

$$f_1 = r_1^{n_1+n_2\alpha+\cdots+n_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-2}}.$$

Iam primum adnotandum est, productum $r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\ldots r_\lambda^{n_\lambda}$ aequatione

$$r_1.r_2\ldots r_\lambda = 1$$

ad productum $\lambda-1$ terminorum pariterque numerum complexum $n(\alpha)$ ope aequationis

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{\lambda-1} = 0$$

ad expressionem $\lambda-1$ terminorum redigi posse.

E definitione statim sequuntur aequationes:

$$r_1^{n(\alpha)} = r_2^{\alpha^{-1}n(\alpha)} = r_3^{\alpha^{-2}n(\alpha)} = \cdots = r_\lambda^{\alpha^{-(\lambda-1)}n(\alpha)},$$

$$r_1^{m(\alpha)+n(\alpha)} = r_1^{m(\alpha)}.r_1^{n(\alpha)}.$$

Etiamque altera verarum potestatum virtute hoc nostrum symbolum gaudet, scilicet:

$$[r_1^{n(\alpha)}]^{m(\alpha)} = r_1^{n(\alpha).m(\alpha)}.$$

Posito enim

$$r_1^{n(\alpha)} = s_1 \quad \text{et} \quad [r_1^{n(\alpha)}]^{m(\alpha)} = s_1^{m(\alpha)} = t_1$$

habemus aequationes:

$$r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\cdots = s_1, \quad r_2^{n_1}.r_3^{n_2}\cdots = s_2, \quad \ldots,$$

quae posito $\log s_k = \sigma_k$ secundum § 9, (II), (III), (IV) eandem habent vim

quam aequatio:

$$n(\alpha^{-1})\varrho(\alpha) = \sigma(\alpha),$$

quae ipsa, ut supra, aequationum $\lambda-1$ locum tenet. Eodem modo est:

$$m(\alpha^{-1}).\sigma(\alpha) = \tau(\alpha), \quad \text{ergo} \quad n(\alpha^{-1}).m(\alpha^{-1})\varrho(\alpha) = \tau(\alpha),$$

pro qua igitur aequatione, quod ad definitionem nostram, substituere possumus hanc: $t_1 = r_1^{n(\alpha).m(\alpha)}$ q. e. d.

Iam patet, posito λ numerum primum esse, istos exponentes symbolicos sicuti numeros complexos tractari posse, cum omnes eorum reductiones eo tantum nitantur, ut sit:

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{\lambda-1} = 0,$$

id quod cum nostra definitione consentit, scilicet

$$r_1^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{\lambda-1}} = r_1.r_2\ldots r_\lambda = 1 = r_1^0.$$

Deinde praemittendum est, literis r illa priore vi gaudentibus, cum nullum factorem $\varrho(\alpha)$ evanescere demonstratum sit, unitates $r_1^{n(\alpha)}$ et $r_1^{m(\alpha)}$ aequales esse non posse nisi $n_1 = m_1$, $n_2 = m_2$, $\ldots$, $n_{\lambda-1} = m_{\lambda-1}$ i. e. nisi $n(\alpha) = m(\alpha)$ pro omnibus λ^{tis} unitatis radicibus excepta unitate.

Demonstravimus in § 9 quamvis unitatem complexam forma

$$r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\ldots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}}$$

contineri, quae quantitates n etiam loco citato determinatae sunt. Iam vero istas quantitates rationales esse probabimus. — Etenim initio § 10, posita unitate integra complexa

$$f_1 = r_1^{n_1}.r_2^{n_2}\ldots r_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}},$$

etiam productum

$$r_1^{\delta_1}.r_2^{\delta_2}\ldots r_{\lambda-1}^{\delta_{\lambda-1}}$$

unitatem integram esse ostendimus, si quantitates δ residua sunt ipsorum n numero integro quam maximo subtracto. Cum vero quivis numerus irrationalis, variis numeris integris multiplicatus, innumera praebeat residua unitate minora eaque inter se diversa, cumque unitas f ad potestatem aliquam integram evecta rursus unitas integra sit, variis potestatibus integris unitatis f innumeras unitates inter se diversas formae

$$r_1^{\delta_1}.r_2^{\delta_2}\ldots r_{\lambda-1}^{\delta_{\lambda-1}}$$

(ubi δ_1, δ_2, $\ldots < 1$) obtineri posse elucet. Illo autem § 10 finitum tantummodo numerum unitatum complexarum huius formae existere demonstravimus;

id quod itaque a propositione nostra, quantitates n irrationales esse, abhorret. — Quod cum conferamus cum forma § 10 (sub finem) omnes unitates formae esse patet:

$$r_1^{\frac{m(\alpha)}{n}}.r_1^{k(\alpha)},$$

designantibus $m(\alpha)$, $k(\alpha)$ numeros integros complexos, n numerum realem, in qua quidem numerus fractionum diversarum $\frac{m(\alpha)}{n}$ finitus est.

§ 14.

Iam primum ad casum simpliciorem accedamus, in quo scilicet λ numerus primus ponitur. Quem quoque talem supponimus, ut quivis numerus formae $k\lambda+g^d$ (designante d divisorem numeri $\lambda-1$) in d factores complexos dissolvi queat (v. § 6).

Cum secundum supra dicta numerus unitatum formae $r^{\frac{m(\alpha)}{n}}$ (quibus praeter ipsas r ad repraesentandas omnes opus sit) finitus sit, hae ipsae sint:

$$\text{(I.)} \quad r^{\frac{m(\alpha)}{n}}, \quad r^{\frac{m'(\alpha)}{n'}}, \quad \ldots\,.$$

Iam sit factor numerorum $m(\alpha)$ et n communis maximus $v(\alpha)$*), ita ut

$$m(\alpha) = a(\alpha).v(\alpha), \quad n = c(\alpha).v(\alpha),$$

loco illius exponentis $\frac{m(\alpha)}{n}$ scribere licet hunc: $\frac{a(\alpha)}{c(\alpha)}$. Cumque $a(\alpha)$ et $c(\alpha)$ nullum amplius factorem communem habeant, numerus inveniri potest $b(\alpha)$ talis, ut sit (v. § 4)

$$b(\alpha).a(\alpha) \equiv 1 \pmod{c(\alpha)}$$

sive

$$b(\alpha).a(\alpha) = 1+F(\alpha).c(\alpha).$$

Cum vero $r^{\frac{m(\alpha)}{n}}$ sive $r^{\frac{a(\alpha)}{c(\alpha)}}$ unitas integra sit, eadem proprietate unitatem $r^{\frac{a(\alpha).b(\alpha)}{c(\alpha)}}$ sive $r^{\frac{1}{c(\alpha)}}.r^{F(\alpha)}$ ideoque etiam unitatem $r^{\frac{1}{c(\alpha)}}$ gaudere patet. De qua unitate cum illa unitas data deduci possit, scilicet evehendo eam ad potestatem integram $a(\alpha)$, hanc ipsam loco illius accipere convenit. Hinc elucet, pro illis unitatibus (I) accipi posse unitates huius formae:

$$\text{(II.)} \quad r^{\frac{1}{n(\alpha)}}, \quad r^{\frac{1}{n'(\alpha)}}, \quad \ldots\,.$$

*) De factore communi maximo sermonem esse posse, e suppositione illa de natura ipsius λ facta elucet. (Cf. adnotatio ad. § 4).

Ut harum unitatum binae in unam conflentur, sit factor numerorum $n(\alpha)$ et $n'(\alpha)$ communis maximus $c(\alpha)$, ita ut sit

$$n(\alpha) = c(\alpha).m(\alpha), \quad n'(\alpha) = c(\alpha).m'(\alpha).$$

Iam cum numeri $m(\alpha)$ et $m'(\alpha)$ nullum amplius habeant factorem communem, numerus inveniri potest $a(\alpha)$ talis, ut sit (v. § 4)

$$a(\alpha).m(\alpha) \equiv 1 \pmod{m'(\alpha)}$$

sive

$$a(\alpha).m(\alpha) + b(\alpha).m'(\alpha) = 1.$$

Cum vero unitates $r^{\frac{1}{n(\alpha)}}$ et $r^{\frac{1}{n'(\alpha)}}$ integrae sint, unitates quoque $r^{\frac{b(\alpha)}{n(\alpha)}}$ et $r^{\frac{a(\alpha)}{n'(\alpha)}}$ etiamque $r^{\frac{b(\alpha)}{n(\alpha)}}.r^{\frac{a(\alpha)}{n'(\alpha)}}$ sive $r^{\frac{b(\alpha)}{n(\alpha)}+\frac{a(\alpha)}{n'(\alpha)}}$ integras esse in promptu est. Est vero:

$$\frac{b(\alpha)}{n(\alpha)} + \frac{a(\alpha)}{n'(\alpha)} = \frac{1}{c(\alpha)}\left\{\frac{b(\alpha)}{m(\alpha)} + \frac{a(\alpha)}{m'(\alpha)}\right\} = \frac{1}{c(\alpha).m(\alpha).m'(\alpha)},$$

unde igitur unitatem $r^{\frac{1}{c(\alpha).m(\alpha).m'(\alpha)}}$ integram esse liquet. De qua cum illae unitates $r^{\frac{1}{n(\alpha)}}$ et $r^{\frac{1}{n'(\alpha)}}$ evehendo eam resp. ad potestates integras $m'(\alpha)$ et $m(\alpha)$ deduci possint, hanc ipsam loco illarum accipere licet. Qua ratione agendi iterata denique loco unitatum (I) vel (II) una restabit formae $r^{\frac{1}{\nu(\alpha)}}$, qua praeter unitates r ad repraesentandas omnes unitates opus erit. Quodsi $r^{\frac{1}{\nu(\alpha)}} = u$ ponimus, est $r = u^{\nu(\alpha)}$, ex qua aequatione, ut ipsae unitates r integris ipsorum u potestatibus exprimi possint, sequitur; ergo forma:

$$u_1^{n(\alpha)} = u_1^{n_1}.u_2^{n_2}\ldots u_{\lambda-1}^{n_{\lambda-1}},$$

designantibus n_1, n_2, ... $n_{\lambda-1}$ quoscunque numeros integros reales, omnes unitates integrae complexae eaeque solae continentur.

Postquam hanc methodum quasi geneticam exposuimus, aliam allaturi sumus rationem, quae huius paragraphi summam a posteriori probet.

§ 15.

Unitas r nisi ipsa fundamentalis est, praeter eas unitates, quae potestatibus ipsius r integris complexis repraesentari possunt, numerus finitus existet unitatum formae: $r^{\frac{m(\alpha)}{n}}$. Inter quas erit una quaedam (vel plures), in qua norma exponentis i. e. $\mathrm{Nm}\frac{m(\alpha)}{n}$ reliquis minor est. Qualem unitatem

litera u designemus. Quae unitas eam habet proprietatem, ut si quae exstet unitas integra formae: $u^{\frac{h(\alpha)}{k}}$, norma exponentis i. e. $\mathrm{Nm}\frac{h(\alpha)}{k}$ unitate maior sit oporteat. Etenim cum

$$r^{\frac{m(\alpha)}{n}} = u$$

ideoque

$$r^{\frac{m(\alpha)}{n}\cdot\frac{h(\alpha)}{k}} = u^{\frac{h(\alpha)}{k}}$$

praetereaque $\mathrm{Nm}\frac{m(\alpha)}{n}\cdot\frac{h(\alpha)}{k} > \mathrm{Nm}\frac{m(\alpha)}{n}$ secundum suppositionem de unitate u factam esse debeat, illa condicio $\mathrm{Nm}\frac{h(\alpha)}{k} > 1$ sponte manat. — Iam demonstrabimus, unitatem u illa ratione electam fundamentalem esse, sive nullam existere unitatem integram, nisi quae eius potestate integra complexa repraesentari possit. Quodsi enim unitas exstet formae $u^{\frac{h(\alpha)}{k}}$ sive formae $u^{\frac{m(\alpha)}{n(\alpha)}}$, ubi numeros $m(\alpha)$ et $n(\alpha)$ omni factore communi carere supponere licet, numerus $a(\alpha)$ inveniri potest talis, ut sit (v. § 4)

$$a(\alpha)m(\alpha) \equiv 1 \pmod{n(\alpha)}.$$

Cum vero unitas $u^{\frac{m(\alpha)}{n(\alpha)}}$ ideoque $u^{a(\alpha)\frac{m(\alpha)}{n(\alpha)}}$ integra sit, ratione supra (§ 14) adhibita unitatem quoque $u^{\frac{1}{n(\alpha)}}$ integram esse colligimus. Ergo secundum supra exhibita $\mathrm{Nm}\frac{1}{n(\alpha)} \geqq 1$ esse debet i. e. $\mathrm{Nm}\,n(\alpha) \leqq 1$. Cum vero $\mathrm{Nm}\,n(\alpha)$ tanquam numerus integer unitate minor esse nequeat, tantum restat, ut sit $\mathrm{Nm}\,n(\alpha) = 1$, i. e. ut numerus $n(\alpha)$ unitas complexa sit. Unde ut fractio $\frac{m(\alpha)}{n(\alpha)}$ tanquam numerus complexus integer scribi possit atque igitur ut omnes unitates integrae potestatibus ipsius u integris complexis repraesentari possint sequitur.

§ 16.

Postquam ostendimus, existere unitates quasdam fundamentales numeri $\lambda-1$ easque coniunctas in numeris λ illa virtute initio § 14 memorata praeditis, de his ipsis quaedam adnotamus. Designentur unitates aliquae fundamentales ut supra literis: $u_1, u_2, \ldots u_{\lambda-1}$, has ipsas tales esse ostendimus, ut $u_1^{n(\alpha)}$ cunctas repraesentet unitates, posito $n(\alpha)$ numerum aliquem integrum complexum. Quaeque unitates u ea ipsa proprietate gaudent, fundamentales

sunt. Nunc designante $k(\alpha)$ unitatem aliquam complexam integram atque posito: $u_1^{k(\alpha)} = v_1$, aperte est:

$$u_1^{k(\alpha)k(\alpha^2)\dots k(\alpha^{\lambda-1})} = u_1 = v_1^{k(\alpha^2)\dots k(\alpha^{\lambda-1})} = v_1^{K(\alpha)},$$

quae aequatio ipsam unitatem u potestate integra complexa ipsius v repraesentat, unde hanc ipsam quoque unitatem v fundamentalem esse elucet. Sive posita aliqua unitate fundamentali u, omnes unitates fundamentales eaeque solae forma continentur: $u^{k(\alpha)}$, designante $k(\alpha)$ unitatem complexam. Hinc colligimus existere tot unitates fundamentales quot unitates diversae ex numeris integris et radicibus unitatis λ^{tis} compositae, ergo pro $\lambda = 2$ duae, pro $\lambda = 3$ sex, pro $\lambda \geqq 5$ numerus infinitus exstat unitatum fundamentalium coniunctarum. — Etiamque unitates $\lambda - 1$ non coniunctae statui possunt, quarum potestatibus integris cunctae repraesentari possunt unitates. Posito enim:

$$\begin{cases} u_1^{a_1}.u_2^{a_2}\dots u_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}} = A, \\ u_1^{b_1}.u_2^{b_2}\dots u_{\lambda-1}^{b_{\lambda-1}} = B, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots, \end{cases}$$

designantibus a, b, ... numeros integros, obtinebimus aequationes $\lambda - 1$:

$$\begin{cases} a_1 \log u_1 + a_2 \log u_2 + \dots + a_{\lambda-1} \log u_{\lambda-1} = \log A, \\ b_1 \log u_1 + b_2 \log u_2 + \dots + b_{\lambda-1} \log u_{\lambda-1} = \log B, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots, \end{cases}$$

ex quo systemate quantitates $\log u_1$, $\log u_2$, ... determinari possunt, idque hac ratione:

$$\Delta . \log u_1 = m_1 . \log A + m_2 . \log B + \cdots,$$

designante Δ determinantem illius systematis, m_1, m_2, ... numeros quosdam integros. Hinc iam patet, si systema istud ea gaudet proprietate, ut sit $\Delta = \pm 1$, unitates u ideoque omnes unitates potestatibus integris unitatum A, B, ... exprimi posse. Unde etiam tales unitates A, B, ... infinitis modis (dummodo $\lambda \geqq 3$) eligi posse, plane in promptu est.

Quae ut ad unum tantum exemplum adhibeamus, ponamus uti in § 11 $\nu = 7$, $\lambda = 3$. Loco citato ostendimus unitates: $u_1 = \omega + \omega^{-1}$, $u_2 = \omega^2 + \omega^{-2}$ sive $u_1 = \varepsilon_1$, $u_2 = \varepsilon_2$ fundamentales esse. Iam cum sint unitates pro $\lambda = 3$ sex scilicet:

$$1, \quad \alpha, \quad \alpha^2, \quad -1, \quad -\alpha, \quad -\alpha^2,$$

habemus sexies binas unitates coniunctas fundamentales:

$$\begin{array}{llll} u_1^1 \text{ ergo } \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & u_1^{-1} \dots \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ u_1^{\alpha} \dots \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & u_1^{-\alpha} \dots \varepsilon_2 + \varepsilon_3, & \varepsilon_3 + \varepsilon_1, \\ u_1^{\alpha^2} \dots \varepsilon_3, & \varepsilon_1, & u_1^{-\alpha^2} \dots \varepsilon_3 + \varepsilon_1, & \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{array}$$

deinde positis $u_1^{a_1}.u_2^{a_2}=A$, $u_1^{b_1}.u_2^{b_2}=B$, erit:

$$a_1\log u_1+a_2\log u_2 = \log A,$$
$$b_1\log u_1+b_2\log u_2 = \log B,$$

ideoque $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=\pm 1$ condicio illa, ut unitates A et B partes unitatum fundamentalium agant. Cui aequationi innumeris modis satisfieri potest. E. g. positis:

$$a_1=3,\quad a_2=2,\quad b_1=4,\quad b_2=3$$

habemus ut unitates fundamentales:

$$A=u_1^3.u_2^2=5\varepsilon_1+\varepsilon_2+3\varepsilon_3,\quad B=u_1^4.u_2^3=11\varepsilon_1+2\varepsilon_2+7\varepsilon_3.$$

§ 17.

Nunc omissa suppositione illa, qua statuitur, omnem numerum primum formae $k\lambda+g^h$ in h factores complexos discerpi posse, servata vero ea, qua λ numerum esse primum continetur, unitates investigemus.

Quodsi literis $r_1, r_2, \dots r_{\lambda-1}$ aliquas unitates coniunctas *) designamus, quaevis unitas integris istius unitatis datae potestatibus repraesentari potest, adiuncto numero finito certarum quarundam fractarum ipsorum r potestatum. Quare sint cunctae unitates, quibus praeter ipsas r ad exprimendas omnes unitates opus sit:

$$\text{(I.)}\qquad r^{\frac{m(\alpha)}{n}},\quad r^{\frac{m'(\alpha)}{n'}},\quad \dots .$$

Iam si $n=kl$ et numerus k ad numerum l primus est, existunt numeri g et h tales, ut sit

$$hk+gl = 1,$$

ergo

$$\frac{hk^2}{n}+g=\frac{1}{l},\quad \frac{gl^2}{n}+h=\frac{1}{k};$$

quare loco unitatis $r^{\frac{m(\alpha)}{n}}$ accipi possunt unitates

$$r^{\frac{m(\alpha)}{k}},\quad r^{\frac{m(\alpha)}{l}},$$

cum illa unitas $r^{\frac{m(\alpha)}{n}}$ tanquam productum

$$r^{g.\frac{m(\alpha)}{k}}.r^{h.\frac{m(\alpha)}{l}}$$

---

*) Quae vero tales esse debent, ut expressio illa $\mathrm{Nm}(\varrho_1+\varrho_2\alpha+\dots+\varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1})$ non evanescat (cf. § 9).

repraesentari potest. Eadem ratione probari potest, pro istis unitatibus (I) accipi posse unitates huius formae

$$\text{(II.)}\quad r^{\frac{k(\alpha)}{p^a}},\quad r^{\frac{k'(\alpha)}{q^b}},\quad \ldots,$$

quorum exponentium numeratores et denominatores factores reales communes non habere supponimus. Sit vero summa ipsius p potestas, qua numerus $\mathrm{Nm}\,k(\alpha)$ dividi possit: $p^{n\delta}$, ubi δ divisor ipsius $\lambda-1$ est is, ad quem p (mod. λ) pertinet. Iam in § 5 probavimus ista statuta condicione eaque addita, ut productum πp *) discerpi possit in δ factores complexos coniunctos, ita ut $\mathrm{Nm}\,p(\varepsilon)=\pi p$ sit, aequationem locum habere:

$$\text{(III.)}\quad \pi^n k(\alpha) = f(\alpha).p(\varepsilon)^m.p(\varepsilon_1)^{m_1}\ldots,$$

ubi $m+m_1+\cdots=n$ esse debet. Iam numero $\mathrm{Nm}\,f(\alpha)$ nullum amplius factorem p contineri patet, ideoque exstare numerum x talem, ut sit $x.\mathrm{Nm}\,f(\alpha)\equiv 1$ (mod. p^a). Unde cum unitas $r^{\frac{\pi^n k(\alpha)}{p^a}}$ integra sit, unitatem quoque hanc:

$$r^{\frac{p(\varepsilon)^m.p(\varepsilon_1)^{m_1}\ldots}{p^a}} = s$$

integram esse colligimus, atque ex hac ipsa illam unitatem datam $r^{\frac{k(\alpha)}{p^a}}$ deduci posse facile intelligitur. Posito enim y numero tali, ut sit $y\pi^n\equiv 1$ (mod. p^a), ex aequatione (III) sequitur congruentia:

$$y f(\alpha).p(\varepsilon)^m.p(\varepsilon_1)^{m_1}\cdots \equiv k(\alpha)\ (\text{mod.}\,p^a)$$

sive aequatio:

$$y f(\alpha).p(\varepsilon)^m.p(\varepsilon_1)^{m_1}\cdots = k(\alpha)+p^a.\varphi(\alpha),$$

$$\text{unde}\quad s^{yf(\alpha)} = r^{\frac{k(\alpha)}{p^a}}.r^{\varphi(\alpha)}\quad \text{sive}\quad r^{\frac{k(\alpha)}{p^a}} = s^{yf(\alpha)}.r^{-\varphi(\alpha)}.$$

Quod si ad omnes illas unitates (II) adhibemus, sequitur, ut pro illis hae accipi possint unitates:

$$\text{(IV.)}\quad r^{\frac{p(\varepsilon)^m.p(\varepsilon_1)^{m_1}\ldots}{p^a}},\quad r^{\frac{q(\varepsilon)^m.q(\varepsilon_1)^{m_1}\ldots}{q^a}},\quad \ldots\ .$$

Qua in serie unitatum, si quae iisdem gaudent denominatoribus, eas hac ratione in unam conflare possumus. Sint datae:

$$r^{\frac{p(\varepsilon)^m.p(\varepsilon_1)^{m_1}\ldots}{p^a}},\quad r^{\frac{p(\varepsilon)^n.p(\varepsilon_1)^{n_1}\ldots}{p^a}}$$

---

*) Numerus π talis eligendus, ut sit ad p primus, id quod tantum pro certis numerorum $\mathrm{Nm}(\varepsilon-\varepsilon_r)$ factoribus fieri nequit (v. § 5). His numeris vero methodus supra exhibita facili negotio adaptatur.

sitque complexus factorum $p(\varepsilon)$ utrique numeratori communium $f(\varepsilon)$, ita ut existant aequationes:

$$p(\varepsilon)^m . p(\varepsilon_1)^{m_1} \cdots = f(\varepsilon) . p(\varepsilon_h)^v . p(\varepsilon_{h'})^{v'} \cdots = f(\varepsilon) . \varphi(\varepsilon),$$
$$p(\varepsilon)^n . p(\varepsilon_1)^{n_1} \cdots = f(\varepsilon) . p(\varepsilon_k)^w . p(\varepsilon_{k'})^{w'} \cdots = f(\varepsilon) . \psi(\varepsilon),$$

ubi nullum k nulli h aequivalere potest. Quodsi numeri i, i'... tales sunt, ut coniuncti cum ipsis k et h seriem indicum 1, 2, ... $\frac{\lambda-1}{\delta}$ expleant, atque ponitur:

$$\varphi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon) . p(\varepsilon_i) p(\varepsilon_{i'}) \cdots = \chi(\varepsilon),$$

in numero $\mathrm{Nm}\,\chi(\varepsilon)$ factor p inesse nequit, id quod ratione supra (§ 4) exhibita probari potest. Quare numerus exstat x, qui congruentiae satisfaciat: $x . \mathrm{Nm}\,\chi(\varepsilon) \equiv 1 \pmod{p^a}$. Deinde cum unitates:

$$r^{\frac{f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)}{p^a}} \quad \text{et} \quad r^{\frac{f(\varepsilon).\psi(\varepsilon)}{p^a}} \quad \text{ideoque} \quad r^{\frac{f(\varepsilon)\chi(\varepsilon)}{p^a}}$$

integrae sint, ope illius congruentiae $x . \mathrm{Nm} f(\varepsilon) \equiv 1 \pmod{p^a}$ etiam unitatem $r^{\frac{f(\varepsilon)}{p^a}}$ integram esse colligimus, ex qua quidem illas duas superiores deduci posse plane in promptu est.

Iam si quae exstant unitates seriei IV, quarum exponentium denominatores diversae potestates eiusdem numeri primi sunt, eas quoque in unam conflari posse hoc modo probamus. Sint datae unitates integrae:

$$r^{\frac{\varphi(\varepsilon)}{p^a}}, \quad r^{\frac{\psi(\varepsilon)}{p^b}},$$

ubi $b < a$. Fractionis $\frac{\psi(\varepsilon)}{p^b}$ et numeratore et denominatore numero πp^{a-b} multiplicatis obtinemus:

$$\frac{\psi(\varepsilon)}{p^b} = \frac{p(\varepsilon_1)^{a-b} p(\varepsilon_2)^{a-b} \ldots \psi(\varepsilon)}{\pi^{a-b} p^a} = \frac{\chi(\varepsilon)}{\pi^{a-b} p^a}.$$

Iam unitates $r^{\frac{\varphi(\varepsilon)}{p^a}}$ et $r^{\frac{\chi(\varepsilon)}{p^a}}$ methodo modo exhibita in unam possunt conflari, ex qua illas duas derivare licet. Ab hac vero unitate $r^{\frac{\chi(\varepsilon)}{p^a}}$ illa data $r^{\frac{\psi(\varepsilon)}{p^b}}$ facile deducitur. Est enim

$$r^{\frac{\chi(\varepsilon)}{p^a}} = r^{\pi^{a-b}\frac{\psi(\varepsilon)}{p^b}},$$

unde si x est numerus talis, ut sit

$$x.\pi^{a-b} \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, p^b) \quad \text{sive} \quad x\pi^{a-b} = 1 + kp^b,$$

erit:

$$r^{x.\frac{\chi(\varepsilon)}{p^a}} . r^{-k\psi(\varepsilon)} = r^{\frac{\psi(\varepsilon)}{p^b}}.$$

Ex quibus dictis patet, loco illarum unitatum (I), vel (II), vel (IV) accipi posse unitates quasdam:

$$\text{(V.)} \quad r^{\frac{k(\alpha)}{p^a}}, \quad r^{\frac{k'(\alpha)}{q^b}}, \quad \ldots,$$

in quibus p, q, ... numeri sint primi inter se diversi, quaeque coniunctae cum ipsis r ad repraesentandas omnes unitates sufficiant. Iam probaturi sumus has ipsas unitates conflari posse in hanc:

$$r_1^{\frac{k(\alpha)}{p^a} + \frac{k'(\alpha)}{q^b} + \frac{k''(\alpha)}{t^c} + \cdots} = s_1.$$

Quam enim unitatem integram esse elucet, atque unitates illas (V) ope unitatum r_1, r_2, ... $r_{\lambda-1}$ ex unitate s deduci posse hoc modo probatur. Cum productum $q^b.t^c\ldots$ ad ipsum p primum sit, numerus inveniri potest x talis, ut sit:

$$x.q^b.t^c\ldots \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\, p^a) \quad \text{sive} \quad x.q^b.t^c\ldots = 1 + np^a,$$

quare erit

$$s^{x.q^b.t^c\ldots} = r_1^{\frac{k(\alpha)}{p^a}} . r_1^{nk(\alpha) + t^c\ldots k'(\alpha) + \cdots},$$

unde unitatem $r_1^{\frac{k(\alpha)}{p^a}}$ re vera potestatibus integris unitatum r et s exprimi posse manifestum est. Cuius explicationis summam hoc modo exhibere possumus: Acceptis quibuslibet unitatibus coniunctis r_1, r_2, ... $r_{\lambda-1}$, semper inveniri potest systema unitatum coniunctarum s_1, s_2, ... $s_{\lambda-1}$ tale, ut omnes unitates integris istarum unitatum r et s potestatibus exprimi liceat.

Iam cum summam tam determinatam neque de numero neque de natura unitatum fundamentalium casu generali huc usque consequi potuerimus, quam paragraphis 14 et 15 suppositione illa speciali explicavimus, relictis iis, quae insuper his methodis derivari possunt, si unitates „r" certa quadam ratione eliguntur, ad casum eum transeamus, in quo λ numerus est compositus.

§ 18.

Nostra methodus cum eo nitatur, quod istas symbolicas exponentium expressiones ratione numerorum re vera complexorum tractavimus, etiam casu quo λ numerus est compositus, tales instituamus unitates, ut his adiumentis

uti possimus. Quem ad finem sit „d" aliquis ipsius λ divisor, qui factores primos p q, ... contineat, atque „r" unitas illa in § 9 memorata; ostendamus exstare unitates s_1, s_2, ... eiusmodi, ut his aequationibus satisfaciant:

$$\text{(I.)}\qquad s_k = s_{d+k} = s_{2d+k} = \cdots = s_{(\delta-1)d+k} \quad \text{posito} \quad \delta d = \lambda,$$

praetereaque his:

$$\text{(II.)}\qquad \begin{cases} s_k \cdot s_{\frac{d}{p}+k} \cdot s_{2\frac{d}{p}+k} \cdots s_{(p-1)\frac{d}{p}+k} = 1, \\ s_k \cdot s_{\frac{d}{q}+k} \cdot s_{2\frac{d}{q}+k} \cdots s_{(q-1)\frac{d}{q}+k} = 1, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots, \end{cases}$$

sive his quae illis aequivalent, si $\log s_k = \sigma_k$ et α radix quaevis aequationis $x^\lambda = 1$ ponitur:

$$\text{(III.)}\ \sigma_1+\sigma_2\alpha+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\lambda-1} = \sigma_{d+1}+\sigma_{d+2}\alpha+\cdots+\sigma_d\alpha^{\lambda-1}, \text{ ergo } = \alpha^{-d}(\sigma_1+\sigma_2\alpha+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\lambda-1})$$

atque his:

$$\text{(IV.)}\qquad \begin{cases} (\sigma_1+\sigma_2\alpha+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\lambda-1})(1+\alpha^{-\frac{d}{p}}+\alpha^{-2\frac{d}{p}}+\cdots+\alpha^{-(p-1)\frac{d}{p}}) = 0, \\ (\sigma_1+\sigma_2\alpha+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\lambda-1})(1+\alpha^{-\frac{d}{q}}+\alpha^{-2\frac{d}{q}}+\cdots+\alpha^{-(q-1)\frac{d}{q}}) = 0, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots. \end{cases}$$

Quae ipsae condiciones explentur, si expressio $\sigma(\alpha)$ pro quovis ipsius α valore exceptis iis, qui radices unitatis d^{tae} primitivae sunt, evanescit. Quod si fit, aequatio (III), quae pro valoribus ipsius α aequationi $\alpha^d = 1$ sufficientibus re ipsa expletur, etiam pro reliquis ipsius α valoribus locum tenet. Deinde aequationes (IV), quae pro iis tantum ipsius α valoribus, qui radices primitivae d^{tae} sunt, re ipsa explentur, etiam pro reliquis ipsius α valoribus valent. Iam ponamus:

$$\text{(V.)}\qquad s_1 = r_1^{a_1+a_2\alpha+\cdots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-2}} = r_1^{a_1} r_2^{a_2} \ldots r_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}},$$

ubi

$$a_1+a_2\alpha+\cdots+a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-2}$$
$$= (1+\alpha^d+\cdots+\alpha^{(\delta-1)d})(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{\frac{d}{p}-1})(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{\frac{d}{q}-1})\ldots\,.$$

Ex qua aequatione numeri a_1, a_2, ... ita sunt determinandi, ut explicato producto dextrae partis eoque solius aequationis $\alpha^\lambda = 1$ ope reducto singularum ipsius α potestatum coefficientes quantitatibus a_1, a_2... aequales ponantur, sive hoc modo, ut positis in aequatione (V) singulis ipsius α valoribus ex his $(\lambda-1)$ aequationibus illae $(\lambda-1)$ quantitates „a" determinentur. — Unitates „s" sic definitas illis aequationibus (I), (II), (III), (IV) satisfacere

iam probaturi sumus. — Ex illa enim aequatione (V) sequitur modo in § 10 tradito, ut sit:

$$\sigma_1+\sigma_2\alpha+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\lambda-1} = a(\alpha^{-1})(\varrho_1+\varrho_2\alpha+\cdots+\varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1})$$

pro quavis radice α. Cum vero expressio:

$$a(\alpha^{-1}) = \frac{1-\alpha^{-\lambda}}{1-\alpha^{-d}}\cdot\frac{1-\alpha^{-\frac{d}{p}}}{1-\alpha^{-1}}\cdot\frac{1-\alpha^{-\frac{d}{q}}}{1-\alpha^{-1}}\cdots$$

pro omnibus ipsius α valoribus exceptis radicibus d^{tis} primitivis evanescat, etiam expressionem $\sigma(\alpha)$ hanc ipsam habere proprietatem ideoque unitates „s" illis condicionibus sufficere patet.

Quaecunque unitates illis aequationibus (I), (II), (III), (IV) satisfaciunt classem efficiunt unitatum eam, quam ad divisorem „d" pertinere dicimus. Iam primum unitates eiusdem classis inter se comparabimus, et quidem omnes potestatibus vel integris vel fractis unius systematis unitatum coniunctarum exprimi posse probabimus. Etenim sint unitates aliquae ad divisorem d pertinentes hae: $f_1, f_2, \ldots f_d$; designentur deinde valores absoluti logarithmorum harum quantitatum signis: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_d$; hoc aequationum systema semper solvi potest:

$$\text{(VI.)}\quad\begin{cases}\varphi_1 = n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+\cdots+n_k\sigma_k,\\ \varphi_2 = n_1\sigma_2+n_2\sigma_3+\cdots+n_k\sigma_{k+1},\\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \varphi_d = n_1\sigma_d+n_2\sigma_1+\cdots+n_k\sigma_{k-1},\end{cases}$$

ubi indeterminatae sunt quantitates $n_1, n_2, \ldots n_k$ atque numerus harum quantitatum, litera k designatus, numerus ille est, quem *Gauss* signo $\varphi(d)$ denotat, i. e. numerus numerorum ad ipsum „d" primorum eoque minorum. Designante w radicem aequationis $w^d=1$ pro qualibet hac radice w, ratione in § 9 exhibita prodit aequatio:

$$\text{(VII.)}\quad \varphi_1+\varphi_2 w+\cdots+\varphi_d w^{d-1} = (n_1+n_2 w^{-1}+\cdots+n_k w^{k-1})(\sigma_1+\sigma_2 w+\cdots+\sigma_d w^{d-1}).$$

Quam aequationem pro omnibus radicibus w non primitivis re ipsa expleri ex eo elucet, quod his casibus et $\varphi(w)$ et $\sigma(w)$ evanescunt, cum et unitates f et unitates s in classe ad divisorem d pertinente insint*). — Singuli ipsius w valores primitivi totidem aequationes praebent formae (VII), quarum igitur numerus k numero indeterminatarum aequalis est. Ut igitur indeterminatas ex iis determinari posse ostendamus, tantummodo determinantem systematis

*) v. quae supra indicata sit unitatum ad classem pertinentium proprietas.

illius non evanescere probandum est. Determinans autem cum sit:

$$\sigma(w).\sigma(w^h).\sigma(w^{h'})\ldots,$$

designantibus h, h', ... systema numerorum inter se incongruorum ad ipsum d primorum, aliquis factor $\sigma(w^h)$ evanescere deberet, ideoque foret:

$$\sigma_1+\sigma_2 w+\sigma_3 w^2+\cdots+\sigma_d w^{d-1} = 0$$

pro aliqua radice primitiva w, sive ratione habita aequationum (I) nec non aequationis huius: $\alpha^\delta = w$ esse deberet:

$$\sigma_1+\sigma_2\alpha^\delta+\sigma_3\alpha^{2\delta}+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\delta(\lambda-1)} = 0$$

pro aliqua radice primitiva α. — Iam cum sit secundum aequationem (V):

$$\sigma_1+\sigma_2\alpha^\delta+\cdots+\sigma_\lambda\alpha^{\delta(\lambda-1)} = (\varrho_1+\varrho_2\alpha^\delta+\cdots+\varrho_\lambda\alpha^{\delta(\lambda-1)})(a_1+a_2\alpha^\delta+\cdots),$$

esse deberet:

$$\varrho(\alpha^\delta)(a_1+a_2\alpha^\delta+\cdots) = 0,$$

sive substituto ipsius $a(\alpha^\delta)$ valore et posito $\alpha^\delta = w$:

$$\varrho(\alpha^\delta).\delta.\frac{1-w^{\frac{d}{p}}}{1-w}.\frac{1-w^{\frac{d}{q}}}{1-w}\cdots = 0,$$

id quod fieri nequit, cum nullum factorem $(1-w^{\frac{d}{p}})$, ..., designante w radicem *primitivam* d^{tam}, evanescere pateat, neque factorem $\varrho(\alpha^\delta)$ nihilo aequivalere posse supra in § 9 demonstratum sit.

Iam cum probaverimus, quamvis unitatem ad ipsum „d" pertinentem potestatibus ipsorum s repraesentari posse*), exponentes harum potestatum non irrationales esse ex eo elucet, quod, cum unitates s potestatibus integris unitatum r expressae sint, etiam unitates quaedam potestatibus ipsorum „r" irrationalibus repraesentari possent, id quod fieri non posse in § 13 demonstravimus. Quare forma generalis unitatum ad divisorem „d" pertinentium erit:

$$s_1^{\frac{m_1}{n}}.s_2^{\frac{m_2}{n}}\ldots s_k^{\frac{m_k}{n}}$$

sive:

$$s_1^{\frac{1}{n}(m_1+m_2 w+\cdots+m_k w^{k-1})}$$

designantibus n, m_1, m_2, ... numeros integros reales.

In quibus unitatibus exponentes symbolicos tanquam veros numeros complexos tractare possumus, quia omnes eorum reductiones aequationibus nituntur:

---

*) Nempe si in aequationibus (VI) a logarithmis ad numeros transeas.

$$\begin{cases} 1+w^{\frac{d}{p}}+w^{2\frac{d}{p}}+\cdots+w^{(p-1)\frac{d}{p}} = 0, \\ 1+w^{\frac{d}{q}}+w^{2\frac{d}{q}}+\cdots+w^{(q-1)\frac{d}{q}} = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

et

$$1+w+w^2+\cdots+w^{d-1} = 0,$$

cumque re vera sit:

$$s^{1+w^{\frac{d}{p}}+\cdots+w^{(p-1)\frac{d}{p}}} = s_1.s_{\frac{d}{p}+1}\ldots s_{(p-1)\frac{d}{p}+1} = 1 = s_1^{0} \quad \text{etc.}$$

nec non:

$$s_1^{1+w+\cdots+w^{d-1}} = s_1.s_2\ldots s_d = 1 = s_1^{0}.$$

§ 19.

Respectu habito eorum, quae in § 7 cum explicata tum indicata sint, atque posito „λ“ numerum esse eiusmodi, ut quivis numerus primus formae $k\lambda+r$ in n factores complexos, compositos e radicibus unitatis λ^{tis}, discerpi possit, si statuamus $g, g', g'', \ldots$ resp. numerorum $p^a, q^b, t^c, \ldots$ radices primitivas,

$$\lambda = p^a.q^b.t^c\ldots, \quad r \equiv \frac{\lambda}{p^a}\cdot g^h + \frac{\lambda}{q^b}\cdot g'^{h'} + \frac{\lambda}{t^c} g''^{h''} + \cdots \ (\text{mod.}\,\lambda),$$
$$n = h.h'.h''\ldots{}^{*}),$$

omnino eadem qua in § 15 usi sumus ratione probatur, exstare in quavis classe unitatem u, cuius potestatibus integris complexis omnes unitates ad eandem classem pertinentes repraesentari possint. Cumque quivis numerus complexus integer ex unitatis radicibus d^{tis} compositus ad expressionem $\varphi(d)$ terminorum integram redigi possit**), $\varphi(d)$ unitates coniunctas exstare patet, quarum potestatibus integris omnes unitates ad divisorem d pertinentes exprimi possint.

Iam eadem qua in § 16 usi sumus ratione probari potest, designante „u“ unitatem fundamentalem classis ad ipsum d pertinentis, omnes reliquas eiusdem classis unitates fundamentales easque solas forma contineri: $u^{m(w)}$, si $m(w)$ numerus est talis, ut $\text{N}m\,m(w) = 1$. Etiamque unitates non coniunctae statui possunt fundamentales multitudinis $\varphi(d)$, et quidem numerus unitatum diversarum, quae statui possunt, fundamentalium coniunctarum erit

*) Numeri $h, h', \ldots$ resp. multipla numerorum $p^{a-1}, q^{b-1}, \ldots$ esse debent.
**) v. § 7.

infinitus, dummodo $\varphi(d) > 2$, ergo $d \geqq 8$, numerus vero unitatum fundamentalium non coniunctarum erit infinitus, quando $\varphi(d) \geqq 2$, ergo $d > 2$.

Denique omissa illa suppositione, qua statuitur, omnem numerum primum formae $k\lambda + r$ in n factores complexos discerpi posse, ratione illa in § 17 exhibita demonstrari potest: dato quocunque systemate unitatum coniunctarum ad classem aliquam pertinentium*), semper existere aliud systema, quo alteri adiuncto cunctae eiusdem classis unitates repraesentari possint. Et quidem secundum supra adnotata utrarumque unitatum tantummodo $\varphi(d)^{\text{nis}}$ opus erit.

Iam etiam probemus numerum unitatum fundamentalium ipso $\varphi(d)$ minorem non sufficere ad repraesentandas omnes unitates eiusdem classis. Quem ad finem sint unitates quaedam fundamentales: $f, f', f'', \ldots$, itaque illas quoque unitates „s" potestatibus harum f integris repraesentari posse oportet. Quare sit posito $\log f = \varphi$, $\log f' = \varphi'$, ... et $k = \varphi(d)$:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_1\varphi + b_1\varphi' + c_1\varphi'' + \cdots, \\ \sigma_2 = a_2\varphi + b_2\varphi' + c_2\varphi'' + \cdots, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \sigma_k = a_k\varphi + b_k\varphi' + c_k\varphi'' + \cdots. \end{cases}$$

Cum vero numerus ipsorum f itaque ipsorum φ sit $\leqq k-1$, his ipsis eliminatis certe una restabit aequatio formae huiusce:

$$\text{(I.)} \qquad n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_k\sigma_k = 0,$$

in qua aequatione $n_1, n_2, \ldots$ numeri esse debent integri atque non omnes nihilo aequales. Id quod fieri non posse sequentibus probatur. Ex aequatione enim (I) sequitur: $s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k} = 1$, unde mutatis periodis iis, quae unitatibus „s" continentur, oritur systema aequationum:

$$\begin{cases} s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k} = 1, \\ s_2^{n_1} s_3^{n_2} \ldots s_{k+1}^{n_k} = 1, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots, \end{cases}$$

ex quo ope formulae (IV) § 9 deducimus aequationem:

$$(n_1 + n_2 w^{-1} + \cdots + n_k w^{-k+1})(\sigma_1 + \sigma_2 w + \cdots + \sigma_d w^{d-1}) = 0$$

pro qualibet d^{ta} radice unitatis w. Cum autem factorem alterum pro nulla

*) Ea tantum condicione, ut expressio illa $\sigma(w)$ pro nullo valore ipsius w primitivo evanescat. v. § 18.

radice w primitiva evanescere supra (§ 18) demonstratum sit, factor prior pro his omnibus k valoribus ipsius w evanescere deberet; id quod (nisi $n_1 = n_2 = \cdots = 0$) fieri non posse ex § 7 colligitur.

§ 20.

Iam quid ex hac singularum classium disquisitione pro universis unitatibus colligi possit, inquiramus. Quodsi supponimus numerum λ illa virtute, initio § 19 memorata, gaudere, ea ipsa proprietate divisores quoque ipsius λ praeditos esse patet. Hoc igitur casu pro quolibet divisore „d" exstant quaedam unitates fundamentales coniunctae, quarum $\varphi(d)$ ad repraesentandas omnes huius classis unitates sufficiunt; quae designentur notis $u_{d,1}$, $u_{d,2}$, ..., earumque logarithmi sint $v_{d,1}$, $v_{d,2}$, ...

Sit „r" unitas aliqua, atque formetur ex ea unitas classis ad divisorem „d" pertinentis illa ipsa ratione, qua initio § 18 usi sumus. Sitque haec unitas „s", ita ut habeamus servata designatione illic adhibita:

$$r_1^{a_1} r_2^{a_2} \ldots r_{\lambda-1}^{a_{\lambda-1}} = r_1^{a(\alpha)} = s_1.$$

Sed esse debet

$$s_1 = u_{d,1}^{n_1} . u_{d,2}^{n_2} \ldots u_{d,k}^{n_k}$$

designantibus n_1, n_2... numeros quosdam integros. Itaque habemus aequationem:

(I.) $\sigma_1 + \sigma_2 w + \cdots + \sigma_d w^{d-1} = (n_1 + n_2 w^{-1} + \cdots + n_k w^{-(k-1)})(v_{d,1} + v_{d,2} w + \cdots + v_{d,d} w^{d-1})$

ratione saepe usitata pro qualibet radice w aequationis $w^d = 1$. Deinde est:

$$\text{(II.)} \quad \sigma_1 + \sigma_2 \alpha \cdots + \sigma_\lambda \alpha^{\lambda-1} = a(\alpha^{-1})(\varrho_1 + \varrho_2 \alpha + \cdots + \varrho_\lambda \alpha^{\lambda-1})$$

pro quaque radice unitatis λ^{ta}. Substituta igitur pro α radice w obtinemus:

$$a(w^{-1})(\varrho_1 + \varrho_2 w + \cdots + \varrho_\lambda w^{\lambda-1}) = \sigma_1 + \sigma_2 w + \cdots + \sigma_\lambda w^{\lambda-1},$$

atque per aequationem (I) aliquanto mutatam:

$$\text{(III.)} \quad \begin{cases} a(w^{-1})(\varrho_1 + \varrho_2 w + \cdots + \varrho_\lambda w^{\lambda-1}) \\ = (n_1 + n_2 w^{-1} + \cdots + n_k w^{-(k-1)})(v_{d,1} + v_{d,2} w + \cdots + v_{d,\lambda} w^{\lambda-1}). \end{cases}$$

Quotiescunque igitur $n(w^{-1})$, numero $a(w^{-1})$ divisus, residuum habet $c(w^{-1})$, ita ut

$$n(w^{-1}) = m(w^{-1}) a(w^{-1}) + c(w^{-1})$$

sit (designante w radicem primitivam), habemus aequationem:

$a(w^{-1})(\varrho_1 + \varrho_2 w + \cdots) = a(w^{-1}) m(w^{-1})(v_{d,1} + v_{d,2} w + \cdots) + c(w^{-1})(v_{d,1} + v_{d,2} w + \cdots)$,

atque si ponimus unitatem:

$$r_1 \cdot u_{d,1}^{-m_1} \cdot u_{d,2}^{-m_2} \dots u_{d,k}^{-m_k} = t_1$$

et $\log . t_1 = \tau_1$, erit:

$$a(\alpha^{-1})(\tau_1 + \tau_2\alpha + \dots + \tau_\lambda\alpha^{\lambda-1}) = c(\alpha^{-1})(v_{d,1} + v_{d,2}\alpha + \dots + v_{d,\lambda}\alpha^{\lambda-1})$$

pro quoque ipsius α valore, qui radicem d^{tam} primitivam praebet. Pro omnibus reliquis ipsius α valoribus erit:

$$\tau_1 + \tau_2\alpha + \dots + \tau_\lambda\alpha^{\lambda-1} = \varrho_1 + \varrho_2\alpha + \dots + \varrho_\lambda\alpha^{\lambda-1},$$

cum pro his ipsius α valoribus sit $v_{d,1} + v_{d,2}\alpha + \dots = 0$.

Unde elucet, quamvis unitatem „r" ope unitatum „u" ad unitatem „t" reduci posse talem, ut si unitas classis ad „d" pertinentis ratione supra indicata ex ea formetur atque potestate ipsius „u" complexa repraesentetur, exponens certo quodam residuorum systemate modulo $a(w)$ contineatur*). Hinc tanquam corollarium sequitur, ut si tales tantum unitates existant, quarum exponentes illi cuncti residua nihilo aequalia habeant, quascunque unitates integris ipsorum „u" potestatibus exprimere liceat, itaque numerus unitatum fundamentalium sit:

$$\varphi(\lambda) + \dots + \varphi(d) + \dots = \lambda - 1$$

secundum notum illud theorema.

Statutis certis quibusdam residuorum systematis modulis $a(w)$, $a'(w')$, ... pro singulis ipsius λ divisoribus, sit unitas „r" eiusmodi, ut exponentes, ad quos pertinent unitates classium ex illa „r" formatae, pro singulis $a(w)$ residuis quibusdam ex istis systematis aequales sint; tum brevitatis causa seriem quandam residuorum ad unitatem „r" pertinere dicemus. Iam primum ex illis supra dictis concludimus, cunctas unitates unitatibus „u" et unitatibus „r" repraesentari posse.

Deinde supponamus divisores ipsius λ certo aliquo ordine dispositos:

$$d_1,\ d_2,\ \dots\ d_i;$$

sint porro unitates „r" tales, ut residua, quae ad eas respectu divisoris d_1 pertineant, non evanescant; sint unitates „s" tales, ut residuis respectu d_1 evanescentibus residua, quae ad eas respectu divisoris d_2 pertineant, non evanescant etc. Inter has unitates r, s, t, ... omnes illas, quae supra ipso „r" denotatae sunt, inveniri apertum est. Deinde adnotamus, pro divisore

*) Sic supra pro unitate „r", ad quam exponens $k(w)$ pertinebat, ad unitatem „t" reducta est, ad quam exponens $c(w)$, qui est residuum ipsius $n(w)$ modulo $a(w)$, pertinet.

ultimo tales unitates existere non posse. Tum enim residua respectu omnium divisorum, excepto ipso d_i, evanescere deberent ideoque, posito illam unitatem z eiusque logarithmum ζ esse, aequatio

$$\zeta_1+\zeta_2\alpha+\cdots+\zeta_\lambda\alpha^{\lambda-1} = 0$$

pro omnibus ipsius α valoribus exceptis radicibus d_i^{tis} primitivis locum habere deberet. Itaque unitas z in ipsa classe ad divisorem d_i pertinente inest (v. § 18) atque in aequatione:

$$a(w^{-1})(\zeta_1+\zeta_2 w+\cdots+\zeta_\lambda w^{\lambda-1}) = (n_1+n_2 w^{-1}+\cdots)(v_{d_i,1}+v_{d_i,2}w+\cdots),$$

ubi w est radix d_i^{ta} primitiva, numerus $n(w)$ ipso $a(w)$ dividi posse deberet, propter eaque residuum respectu divisoris d_i quoque evanesceret.

Iam unitates „r" inter se reducendae sunt. Primum, si quae existant, ad quas idem residuum respectu ipsius d_1 pertineat, e. g. r et r', pro his accipi possunt unitates r et $\frac{r}{r'}$, quarum alteram ad genus unitatum „s" (vel inter ipsas t, ...) referendam esse patet, quippe quae eius residuum respectu d_1 evanescat. Unde concludimus, quaecunque unitates r eodem residuo respectu d_1 gaudeant, ex eis unam tantum eligendam esse, cum ceterae ope huius et unitatum s, t, ... repraesentari possint. — Deinde sit $n(w)$ residuum alicuius „r" respectu d_1 (ubi w radix primitiva d_1^{ta}), sitque $\varphi(w)$ factor communis maximus numerorum $n(w)$ et illius $a(w)$, ita ut sit

$$n(w) = \varphi(w).m(w),$$

numerum invenire licet $\psi(w)$ talem, ut sit

$$m(w)\psi(w) \equiv 1 \pmod{a(w)} \text{ *)},$$

ergo

$$n(w)\psi(w) \equiv \varphi(w) \pmod{a(w)}.$$

Itaque cum unitas $r_1^{\psi(w)}$ quoque integra sit, unitas existit, cuius residuum respectu d_1 ipse numerus $\varphi(w)$ est. Quae si litera r' designatur, erit $r'^{m(\alpha)}$ unitas, cuius residuum respectu d_1 numerus $n(w)$, quae igitur secundum supra dicta pro illa unitate r accipi potest. Hinc sequitur, ut loco omnium earum unitatum, quarum residua eundem factorem communem maximum $\varphi(w)$ cum numero $a(w)$ habeant, unam tantum, cuius residuum ipse hic numerus $\varphi(w)$ sit, accipere liceat.

---

*) Cf. § 4 et § 7.

Sint unitatum r et r' residua respectu d_1 numeri $\varphi(w)$ et $\psi(w)$, qui uterque numerum illum $a(w)$ metiens supponi potest. Tum erit factor communis maximus numerorum

$$m(w)\varphi(w)+n(w)\psi(w), \quad a(w)$$

ipse factor communis numerorum $\varphi(w)$ et $\psi(w)$. Positis enim $m(w)$, $n(w)$ numeros esse tales, ut sit

$$m(w)\varphi(w)+n(w)\psi(w)\equiv\chi(w) \pmod{a(w)},$$

ubi $\chi(w)$ factor est communis maximus ipsorum $\varphi(w)$ et $\psi(w)$, illa sententia elucet. Cumque etiam $r^{m(w)}.r'^{n(w)}$ unitas sit integra eaque talis, ut residuum respectu d_1 sit $\chi(w)$, hanc ipsam unitatem, ex qua ope unitatum $s, t, \ldots$ unitates illae (r, r') derivari possunt, loco duarum unitatum r, r' accipere licet. Quaecunque igitur unitates variorum respectu d_1 residuorum existunt, semper una talis pro iis accipi potest, cuius residuum respectu d_1 factor omnium residuorum communis maximus sit. Et, si respicimus supra dicta, pro hac ipsa talis statui potest unitas, ut residuum respectu d_1 sit factor ipsius $a(w)$.

Quae cum de unitatibus r exposuerimus, ad unitates $s, t, \ldots$ adhibere liceat, concludimus, praeter unitates „u“ ad repraesentandas omnes unitates his tantum opus esse: unitate quadam „r“ (cum eius coniunctis), cuius residuum respectu d_1 est factor ipsius $a(w)$; unitate quadam „s“, cuius residuum respectu d_2 est factor ipsius $b(w')$ etc. Itaque hanc obtinemus seriem unitatum fundamentalium:

$$\begin{array}{cccccc} u_{d_1}, & u_{d_2}, & u_{d_3}, & \ldots & u_{d_{i-1}}, & u_{d_i}, \\ r, & s, & t, & \ldots & z. & \end{array}$$

Iam si residuum, quod ad unitatem r respectu d_1 pertinet, $\varphi(w)$ ponitur, ita ut sit $a(w)=\varphi(w).\psi(w)$, habemus aequationem:

$$a(w^{-1})(\varrho_1+\varrho_2 w+\cdots) = \varphi(w^{-1})(v_{d_1,1}+v_{d_1,2}w+\cdots)$$

vel

$$\psi(w^{-1})(\varrho_1+\varrho_2 w+\cdots) = v_{d_1,1}+v_{d_1,2}w+\cdots,$$

pro qualibet radice d_1^{ta} primitiva w. Unde patet unitatem $r^{\psi(\alpha)}.u_{d_1,1}^{-1}$ esse talem, ut eius residuum respectu d_1 sit nihilo aequale, eamque igitur unitatibus $u_{d_2}, u_{d_3}, \ldots$ et $s, t, \ldots$ repraesentari posse. Ergo ipsae unitates coniunctae u_{d_1} unitatibus „r“ et reliquis utriusque seriei unitatibus expri-

muntur. Inter has vero unitates „r“ eae, quarum index numero $\varphi(d_1)$ maior est, ad priores reducuntur. Sit enim (posito $\varphi(d_1) = k$)

$$x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c = 0$$

illa aequatio, quarum radices sunt radices unitatis d_1^tae^ primitivae, in qua coefficientem ipsius x^k unitatem esse e forma illius aequationis in § 7 exhibita manifestum est, et fingamus unitatem integram:

$$r_1^c . r_2^{c_1} \ldots r_{k-1}^{c_{k-2}} . r_k^{c_{k-1}} . r_{k+1} = x_1,$$

ideoque posito $\log x_i = \xi_i$:

$$(c + c_1\alpha + \cdots + c_{k-1}\alpha^{k-1} + \alpha^k)(\varrho_1 + \varrho_2\alpha + \cdots) = \xi_1 + \xi_2\alpha + \cdots.$$

Cum vero $c(\alpha)$, eaque de re $\xi(\alpha)$, pro illo ipsius α valore $\alpha = w$ evanescat, unitas x_1 unitatibus $u_{d_2} \ldots$ atque unitatibus $s, t, \ldots$ repraesentari potest. Ergo r_{k+1} unitatibus $r_1, r_2, \ldots r_k$ et unitatibus utriusque illius seriei reliquis exprimi potest; pariterque r_{k+2} unitatibus $r_2, r_3, \ldots r_{k+1}$ ideoque unitatibus $r_1, r_2, \ldots r_k$ et reliquis etc. etc. Itaque pro illis unitatibus „u_{d_1}“ et „r“ tantum accipiendae sunt unitates:

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots \quad r_{\varphi(d_1)}.$$

Simili modo pro unitatibus u_{d_2} et s tantum accipiendae sunt unitates

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots \quad s_{\varphi(d_2)},$$

quia sicuti supra et unitates ceterae cum s_1 coniunctae et unitates „u_{d_2}“ per unitates $s_1, s_2, \ldots s_{\varphi(d_2)}$ adiunctis illis $u_{d_3}, \ldots t, \ldots z$, exprimi possunt. Denique pro unitatibus $u_{d_{i-1}}$ et z accipiendae sunt unitates

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_{\varphi(d_{i-1})},$$

quia his ipsis ope unitatum u_{d_i} illae repraesentari possunt. Habemus igitur tanquam unitates fundamentales, ad repraesentandas omnes unitates sufficientes, has:

$$\begin{array}{llll} r_1, & r_2, & \ldots & r_{\varphi(d_1)}, \\ s_1, & s_2, & \ldots & s_{\varphi(d_2)}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1, & z_2, & \ldots & z_{\varphi(d_{i-1})}, \\ u_{d_i,1}, & u_{d_i,2}, & \ldots & u_{d_i,\varphi(d_i)}, \end{array}$$

quia ceteras cum ipsis u_{d_i} coniunctas unitates „u" illis exprimi posse iam supra adnotavimus. Numerus igitur unitatum fundamentalium erit:

$$\varphi(d_1)+\varphi(d_2)+\cdots+\varphi(d_i) = \lambda-1,$$

eumque numerum ipso $\lambda-1$ minorem esse non posse in § 12 demonstravimus.

Numerus igitur unitatum fundamentalium hic idem est, qui erat casu quo λ numerus primus, sed cum casu generali, tanquam unitates fundamentales semper unitates accipi posse *coniunctas*, non probaverimus, num re vera unitates fundamentales *coniunctae* pro quovis λ existant, in dubio remanet. Haec autem quaestio quanti sit momenti ex eo elucet, quod problema illud Diophanteum (v. § 11) inveniendorum numerorum $x, x_1, \ldots x_{\lambda-1}$ aequationi

$$\mathrm{Nm}(x\varepsilon+x_1\varepsilon_1+\cdots+x_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1}) = \pm 1$$

satisfacientium systematis unitatum fundamentalium *coniunctarum* perfecte solvitur. Nam si omnes unitates forma $u_1^{n(\alpha)}$ sive

$$(\xi\varepsilon+\xi_1\varepsilon_1+\cdots+\xi_{\lambda-1}\varepsilon_{\lambda-1})^{n(\alpha)}$$

continentur, cuncta ipsorum x systemata *functionibus rationalibus integris* illius unius systematis (ξ) repraesentari possunt. Sin vero duorum systematum unitatum coniunctarum opus est, omnia systemata ipsorum x nonnisi duobus systematis (ξ), (ξ') modo rationali exprimi possunt. Quoniam autem in § 17 demonstratum est, acceptis quibuslibet unitatibus coniunctis $r_1, r_2, \ldots r_{\lambda-1}$ semper inveniri posse alterum systema $s_1, s_2, \ldots s_{\lambda-1}$ tale, ut omnes unitates integris istarum unitatum r et s potestatibus exprimi liceat, sequitur, ut accepto quolibet systemate $x^0, x_1^0, \ldots x_{\lambda-1}^0$ alterum systema $x', x_1', \ldots x_{\lambda-1}'$ inveniri possit tale, ut omnia systemata ipsorum x tanquam functiones rationales integrae illarum 2λ quantitatum x^0, x' repraesentari possint. Sed cum e disquisitionibus illis generalibus Cli. *Lejeune-Dirichlet*, quas supra pagina huius dissertationis secunda commemoravimus, tantummodo concludi possit, $\lambda-1$ quantitatum x systemata sive $\lambda(\lambda-1)$ quantitates x ad repraesentanda cuncta ipsorum x systemata sufficere, casu quem in hac dissertatione tractavimus speciali problema Diophanteum, quaestione unitatum complexarum exhibitum, peculiarem ac simpliciorem solutionem admittere bene animadvertendum est.

Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

Eine *elliptische Function zweiter Art* wird nach Herrn *Hermite* jede Function genannt, die im Endlichen überall den Charakter einer rationalen hat, und deren logarithmische Ableitung doppelt periodisch ist. (Comptes Rendus, tome 85). Sind 2ω und $2\omega'$ die Perioden von $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$, so ist

$$(1.)\qquad \varphi(u+2\omega) = m\varphi(u),\quad \varphi(u+2\omega') = m'\varphi(u),$$

wo m und m' zwei Constanten sind, welche die *Multiplicatoren* von $\varphi(u)$ heissen. Es erweist sich vortheilhaft, an ihrer Stelle zwei andere Constanten μ und μ' einzuführen, welche ich durch die Gleichungen

$$(2.)\qquad m = e^{-2\pi i\mu'},\quad m' = e^{2\pi i\mu}$$

definire und die (den Perioden 2ω und $2\omega'$ entsprechenden) *Parameter* von $\varphi(u)$ nenne. Dieselben können, ohne ihre Bedeutung zu ändern, beliebig um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden.

Sind ν und ν' zwei ganze Zahlen, so ist

$$(3.)\qquad \varphi(u+2\nu\omega+2\nu'\omega') = e^{2\pi i(\mu\nu'-\mu'\nu)}\varphi(u).$$

Ist also

$$\omega_1 = \alpha\omega+\beta\omega',\quad \varepsilon\mu = \alpha\mu_1+\gamma\mu'_1,$$
$$\omega'_1 = \gamma\omega+\delta\omega',\quad \varepsilon\mu' = \beta\mu_1+\delta\mu'_1,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze Zahlen sind, und die Determinante $\varepsilon = \alpha\delta-\beta\gamma$ von Null verschieden ist, so entsprechen den Perioden $2\omega_1$, $2\omega'_1$ die Parameter μ_1, μ'_1.

Sind μ, μ' beide Null, so ist $\varphi(u)$ eine elliptische Function erster Art. In der Theorie der elliptischen Functionen zweiter Art ist aber nicht nur dieser Fall als ein Ausnahmefall anzusehen, sondern allgemeiner der, wo $2\mu\omega+2\mu'\omega'$ eine Periode ist, wo also zwei ganze Zahlen ν, ν' so bestimmt werden können, dass $\mu\omega+\mu'\omega' = \nu\omega+\nu'\omega'$ ist. (Vgl. *Mittag-Leffler*,

Comptes Rendus tome 90, p. 177.) Unter dieser Annahme ist nämlich, falls

$$\frac{a}{i\pi} = -\frac{\mu'-\nu'}{\omega} = \frac{\mu-\nu}{\omega'}$$

gesetzt wird, $\varphi(u) = e^{au}\psi(u)$, wo $\psi(u)$ eine doppeltperiodische Function ist. Diesen nur geringes Interesse darbietenden Fall schliesse ich hier ganz aus. Wenn im Folgenden gleichzeitig mehrere elliptische Functionen zweiter Art betrachtet werden, so wird, falls nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist, immer vorausgesetzt, dass sie nicht nur dieselben Perioden, sondern auch dieselben Parameter haben.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften.

Die *Weierstrass*sche Function $\sigma(u)$ genügt der Gleichung

$$(4.)\quad \sigma(u+2\nu\omega+2\nu'\omega') = (-1)^{\nu\nu'+\nu+\nu'} e^{2(\nu\eta+\nu'\eta')(u+\nu\omega+\nu'\omega')}\sigma(u),$$

wo ν, ν' zwei ganze Zahlen bedeuten. Zwischen den in diese Formel eingehenden Constanten besteht die Relation

$$(5.)\quad \eta\omega'-\eta'\omega = +\frac{i\pi}{2}$$

oder $-\frac{i\pi}{2}$, je nachdem die Ordinate der complexen Grösse $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ positiv oder negativ ist. Wählt man 2ω, $2\omega'$ so, dass sie positiv ist, so genügt folglich die Function

$$(6.)\quad \mathfrak{q}(u) = \frac{\sigma(2\mu\omega+2\mu'\omega'-u)}{\sigma(2\mu\omega+2\mu'\omega')\sigma(u)} e^{(2\mu\eta+2\mu'\eta')u}$$

der Bedingung (3.), ist also eine elliptische Function zweiter Art mit den Parametern μ, μ'. Mit Hülfe derselben lässt sich die Theorie der elliptischen Functionen zweiter Art gänzlich auf die der Functionen erster Art zurückführen.

Die Function $\mathfrak{q}(u)$, welche ungeändert bleibt, falls μ, μ' sich um ganze Zahlen ändern, wird nur für den Werth 0 (und die congruenten Werthe) unendlich gross von der ersten Ordnung, und ihre Entwicklung nach Potenzen von u beginnt mit $\frac{1}{u}$; sie verschwindet nur für den Werth $k = 2\mu\omega+2\mu'\omega'$.

Da der Quotient von je zwei elliptischen Functionen zweiter Art doppelt periodisch ist, so ist jede solche Function $\varphi(u) = \mathfrak{q}(u)\psi(u)$, wo $\psi(u)$ eine elliptische Function erster Art ist. Wird $\varphi(u)$ für keinen Werth

von u unendlich, so kann $\psi(u)$ nur für $u = k$ unendlich gross von der ersten Ordnung werden. Eine elliptische Function $\psi(u)$, die nicht für mehr als einen Werth unendlich wird, ist aber eine Constante. Da ferner für $u = 0$ auch $\psi(u) = 0$ ist, so verschwindet $\psi(u)$ identisch.

I. *Eine elliptische Function zweiter Art, die für keinen Werth unendlich gross wird, verschwindet identisch.*

Da die Function $\varphi(u)$ im Endlichen überall den Charakter einer rationalen hat, so kann sie nur für eine endliche Anzahl incongruenter Werthe $b_1, b_2, \dots b_n$ unendlich gross werden, und nur für eine endliche Anzahl von Werthen $a_1, a_2, \dots a_m$ verschwinden. Die elliptische Function $\psi(u)$ wird dann für die $n+1$ Werthe $b_1, b_2, \dots b_n, k$ unendlich und für die $m+1$ Werthe $a_1, a_2, \dots a_m, 0$ gleich Null. Nun wird aber eine doppeltperiodische Function für ebenso viele Werthe Null wie unendlich, falls man jeden Werth so oft zählt, wie seine Ordnungszahl angiebt, und die Summe der Werthe, für die sie verschwindet, ist der Summe der Werthe, für die sie unendlich wird, congruent. Daraus folgt:

II. *Eine elliptische Function zweiter Art wird für ebenso viele incongruente Werthe Null wie unendlich.*

III. *Sind $a_1, a_2, \dots a_n$ die incongruenten Werthe, für die eine elliptische Function zweiter Art verschwindet, und $b_1, b_2, \dots b_n$ die Werthe, für die sie unendlich wird, so ist*

$$(7.) \qquad \Sigma a - \Sigma b \equiv 2\mu\omega + 2\mu'\omega'.$$

Indem man die Grössen a, b um Perioden oder die Parameter μ, μ' um ganze Zahlen passend ändert, kann man immer bewirken, dass

$$\Sigma a - \Sigma b = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

wird. Die beiden letzten Sätze können auch direct gefunden werden durch Berechnung des über den Rand eines Periodenparallelogramms erstreckten Integrals $\int (u-c)\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du$, wo c eine unbestimmte Constante ist. Während also eine elliptische Function erster Art jeden beliebigen Werth innerhalb eines Periodenparallelogramms gleich oft annimmt, gilt dies bei den elliptischen Functionen zweiter Art allgemein nur von den Werthen 0 und ∞. Die Zahl n möge die *Ordnung* der Function $\varphi(u)$ genannt werden. Ist

$$(8.) \qquad \Sigma a - \Sigma b = 2(\mu+\nu)\omega + 2(\mu'+\nu')\omega',$$

wo ν, ν' ganze Zahlen sind, so ist

$$(9.)\qquad \varphi(u) = C\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_n)}e^{2((\mu+\nu)\eta+(\mu'+\nu')\eta')u},$$

wo C eine Constante ist. Denn der Formel (4.) zufolge ist die durch Gleichung (9.) definirte Grösse C eine doppeltperiodische Function von u, die für keinen Werth unendlich wird.

Die elliptische Function zweiter Art $\varphi(u)$ möge für $u = a$ von der α^{ten}, für $u = b$ von der β^{ten} u. s. w. Ordnung unendlich werden, und in ihren Entwicklungen in den Umgebungen der betreffenden Stellen mögen die Glieder, welche negative Potenzen der Aenderung des Arguments enthalten, die folgenden sein:

$$A(u-a)^{-1}+A_1D(u-a)^{-1}+A_2D^2(u-a)^{-1}+\dots+A_{\alpha-1}D^{\alpha-1}(u-a)^{-1},$$
$$B(u-b)^{-1}+B_1D(u-b)^{-1}+B_2D^2(u-b)^{-1}+\dots+B_{\beta-1}D^{\beta-1}(u-b)^{-1},$$

u. s. w. Dann ist

$$(10.)\qquad \begin{cases} \varphi(u) = A\,\mathrm{q}(u-a)+A_1\mathrm{q}'(u-a)+A_2\mathrm{q}''(u-a)+\dots+A_{\alpha-1}\mathrm{q}^{(\alpha-1)}(u-a) \\ \qquad + B\,\mathrm{q}(u-b)+B_1\mathrm{q}'(u-b)+B_2\mathrm{q}''(u-b)+\dots+B_{\beta-1}\mathrm{q}^{(\beta-1)}(u-b) \\ \qquad +\cdots. \end{cases}$$

Denn die Differenz zwischen der rechten und linken Seite dieser Gleichung ist eine elliptische Function zweiter Art, die für keinen Werth unendlich wird, also nach Satz I. identisch Null. Diese Formel hat Herr ***Hermite*** (l. c. pag. 693) durch Betrachtung des über den Rand eines Periodenparallelogramms erstreckten Integrals $\int \mathrm{q}(u-v)\varphi(v)dv$ gefunden.

§ 2.

Addition und Multiplication.

Seien $u_1, v_1, \dots u_n, v_n$ $2n$ unabhängige Variabeln, und sei

$$Q = |\mathrm{q}(u_\alpha+v_\beta)|.$$

Betrachtet man zunächst alle in diesem Ausdrucke vorkommenden Grössen ausser u_1 als constant, so ist er eine elliptische Function zweiter Art von u_1, welche nur für die n Werthe $-v_1, -v_2, \dots -v_n$ unendlich wird, also auch für genau n Werthe verschwindet. $n-1$ derselben sind $u_2, u_3, \dots u_n$. Der n^{te} Werth ist daher nach (7.) gleich $k-u_2-\dots-u_n-v_1-v_2-\dots-v_n$. Nach (9.) ist folglich die Determinante Q bis auf einen von u_1 unabhängigen Factor gleich

$$\mathrm{q}(u_1+v_1+\dots+u_n+v_n)\sigma(u_1+v_1+\dots+u_n+v_n)\frac{\sigma(u_1-u_2)\dots\sigma(u_1-u_n)}{\sigma(u_1+v_1)\dots\sigma(u_1+v_n)}.$$

Indem man in ähnlicher Art ihre Abhängigkeit von $u_1, \dots u_n, v_1, \dots v_n$ untersucht, findet man, bis auf einen constanten Factor genau,

$$(11.)\quad \begin{cases} |\mathfrak{q}(u_\alpha+v_\beta)| \\ = \mathfrak{q}(u_1+v_1+\cdots+u_n+v_n)\,\sigma(u_1+v_1+\cdots+u_n+v_n)\dfrac{\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\Pi\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}. \end{cases}$$

Im Nenner der rechten Seite durchlaufen α und β unabhängig von einander die Zahlen von 1 bis n, im Zähler nur solche Zahlenpaare, für welche $\alpha > \beta$ ist. Dass der constante Factor in der Gleichung (11.) richtig angegeben ist, erkennt man ohne Weiteres für $n = 1$ und allgemein durch den Schluss von $n-1$ auf n. Multiplicirt man nämlich die Elemente der letzten Zeile von Q mit u_n+v_n und setzt dann $u_n = -v_n$, so verschwinden sie mit Ausnahme des letzten, das gleich 1 wird, und daher geht Q in den analog aus den $n-1$ Argumentenpaaren $u_1, v_1, \dots u_{n-1}, v_{n-1}$ gebildeten Ausdruck über. Da dasselbe von der rechten Seite der Gleichung (11.) gilt, so ist sie damit allgemein bewiesen.

Setzt man in der entwickelten Formel

$$2\mu\eta+2\mu'\eta' = 0 \quad \text{und} \quad 2\mu\omega+2\mu'\omega' = -w,$$

so erhält man

$$(12.)\quad \left|\frac{\sigma(u_\alpha+v_\beta+w)}{\sigma(u_\alpha+v_\beta)}\right| = \sigma(w)^{n-1}\sigma(u_1+v_1+\cdots+u_n+v_n)\frac{\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\Pi\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}.$$

Die auf der linken Seite stehende Determinante R ist gleich

$$-\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \dfrac{\sigma(u_1+v_1+w)}{\sigma(u_1+v_1)} & \cdots & \dfrac{\sigma(u_1+v_n+w)}{\sigma(u_1+v_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dfrac{\sigma(u_n+v_1+w)}{\sigma(u_n+v_1)} & \cdots & \dfrac{\sigma(u_n+v_n+w)}{\sigma(u_n+v_n)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(13.)\quad \mathfrak{r}(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

und entwickelt jedes Element nach Potenzen von w mittelst der Formel

$$\frac{\sigma(u+v+w)}{\sigma(u+v)} = 1+\mathfrak{r}(u+v)w+\cdots,$$

zieht dann die erste Zeile der Determinante von allen folgenden ab, dividirt die Elemente der zweiten bis $(n+1)^{\text{ten}}$ Zeile durch w und multiplicirt die der ersten Colonne mit w, so erhält man

$$R = -w^{n-1}\begin{vmatrix} -w & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{r}(u_1+v_1)+\cdots & \cdots & \mathrm{r}(u_1+v_n)+\cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \mathrm{r}(u_n+v_1)+\cdots & \cdots & \mathrm{r}(u_n+v_n)+\cdots \end{vmatrix}.$$

Indem man daher auf beiden Seiten der Formel (12.) die Coefficienten von w^{n-1} vergleicht, findet man die Relation

$$(14.)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{r}(u_1+v_1) & \cdots & \mathrm{r}(u_1+v_n) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & \mathrm{r}(u_n+v_1) & \cdots & \mathrm{r}(u_n+v_n) \end{vmatrix} \\ = \sigma(u_1+v_1+\cdots+u_n+v_n)\dfrac{\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)\Pi\sigma(v_\alpha-v_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha+v_\beta)}, \end{cases}$$

welche Herr *Stickelberger* mit mir zusammen in einer kleinen Notiz, dieses Journal Bd. 83, S. 175 direct entwickelt hat. Daselbst haben wir aus dieser Formel zwei andere abgeleitet, indem wir durch einen passenden Grenzübergang erst die Grössen $v_1, \dots v_n$ alle gleich Null und dann die Grössen $u_1, \dots u_n$ alle einander gleich werden liessen. Auf demselben Wege gelangt man von der Gleichung (11.) zu den Relationen

$$(15.)\quad \begin{cases} |\mathrm{q}(u_\alpha),\ \mathrm{q}'(u_\alpha),\ \dots\ \mathrm{q}^{(n-1)}(u_\alpha)| \\ = \mathrm{q}(u_1+\cdots+u_n)\sigma(u_1+\cdots+u_n)\dfrac{\Pi(\alpha-\beta)\Pi\sigma(u_\alpha-u_\beta)}{\Pi\sigma(u_\alpha)^n}, \end{cases}$$

$$(16.)\quad \begin{vmatrix} \mathrm{q}(u) & \mathrm{q}'(u) & \cdots & \mathrm{q}^{(n-1)}(u) \\ \mathrm{q}'(u) & \mathrm{q}''(u) & \cdots & \mathrm{q}^{(n)}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathrm{q}^{(n-1)}(u) & \mathrm{q}^{(n)}(u) & \cdots & \mathrm{q}^{(2n-2)}(u) \end{vmatrix} = \mathrm{q}(nu)\frac{\sigma(nu)}{\sigma(u)^{n^2}}\Pi(\alpha-\beta)^2.$$

§ 3.

Multiplication und Division.

In den folgenden Entwicklungen nehme ich an, dass $2\mu\eta+2\mu'\eta'=0$ ist. Setzt man ferner $2\mu\omega+2\mu'\omega'=-v$, so ist

$$(17.)\quad \mathrm{q}(u, v) = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)}$$

eine elliptische Function zweiter Art mit den Parametern

$$\mu = \frac{\eta' v}{i\pi},\quad \mu' = -\frac{\eta v}{i\pi},$$

welche ungeändert bleibt, wenn das Argument u mit dem Parameter v vertauscht wird. Ist n eine positive ganze Zahl, so sind folglich $\mathrm{q}(u, nv)$ und $\mathrm{q}(nu, v)$ elliptische Functionen zweiter Art mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ und den Parametern $n\mu$, $n\mu'$. Die erste ist eine Function erster Ordnung, die nur für $u=0$ unendlich wird, die andere ist eine Function der Ordnung n^2, und wird, falls man

$$(18.)\qquad \omega_{\alpha\beta} = \frac{2\alpha\omega+2\beta\omega'}{n},\quad \eta_{\alpha\beta} = \frac{2\alpha\eta+2\beta\eta'}{n}$$

setzt, für die Werthe $u=-\omega_{\varkappa\lambda}$, wo jede der beiden Zahlen $\varkappa$, λ ein vollständiges Restsystem (mod. n) zu durchlaufen hat, unendlich von der ersten Ordnung. Nach Formel (10.) ist daher

$$n\,\mathrm{q}(nu, v) = \sum_{\varkappa,\lambda} C_{\varkappa\lambda}\,\mathrm{q}(u+\omega_{\varkappa\lambda}, nv).$$

Entwickelt man nach Potenzen von $u+\omega_{\alpha\beta}$, so findet man durch Vergleichung der Coefficienten von $(u+\omega_{\alpha\beta})^{-1}$, dass $C_{\alpha\beta} = e^{-(2\alpha\eta+2\beta\eta')v}$ ist. Mithin ist

$$(19.)\qquad \frac{n\sigma(nu+v)}{\sigma(nu)\sigma(v)} = \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{\sigma(nv+u+\omega_{\varkappa\lambda})}{\sigma(nv)\sigma(u+\omega_{\varkappa\lambda})} e^{-\eta_{\varkappa\lambda} nv}.$$

Ersetzt man v durch $v+\omega_{\alpha\beta}$, so erhält man allgemeiner

$$(20.)\qquad \frac{n\sigma(nu+v+\omega_{\alpha\beta})}{\sigma(nu)\sigma(v+\omega_{\alpha\beta})} e^{-\eta_{\alpha\beta} nu} = \sum_{\varkappa,\lambda} \varrho^{\alpha\lambda-\beta\varkappa} \frac{\sigma(nv+u+\omega_{\varkappa\lambda})}{\sigma(nv)\sigma(u+\omega_{\varkappa\lambda})} e^{-\eta_{\varkappa\lambda} nv},$$

wo

$$(21.)\qquad \varrho = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

ist. Vergleicht man in den Entwicklungen der beiden Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von v die constanten Glieder, so ergiebt sich, falls α und β beide Null sind,

$$(22.)\qquad n\,\mathrm{r}(nu) = \sum_{\varkappa,\lambda} (\mathrm{r}(u+\omega_{\varkappa\lambda})-\eta_{\varkappa\lambda}),$$

falls aber α und β nicht beide Null sind,

$$(23.)\qquad \frac{n\sigma(\omega_{\alpha\beta}+nu)}{\sigma(\omega_{\alpha\beta})\sigma(nu)} e^{-\eta_{\alpha\beta} nu} = \sum_{\varkappa,\lambda} \varrho^{\alpha\lambda-\beta\varkappa} (\mathrm{r}(u+\omega_{\varkappa\lambda})-\eta_{\varkappa\lambda}).$$

Vergleicht man ferner in den Entwicklungen nach Potenzen von u die constanten Glieder, so findet man (bei Ersetzung von v durch u)

$$(24.)\qquad n(\mathrm{r}(u+\omega_{\alpha\beta})-\eta_{\alpha\beta}) = \mathrm{r}(nu)+\sum_{\varkappa,\lambda}{}' \varrho^{\varkappa\beta-\lambda\alpha} \frac{\sigma(\omega_{\varkappa\lambda}+nu)}{\sigma(\omega_{\varkappa\lambda})\sigma(nu)} e^{-\eta_{\varkappa\lambda} nu},$$

wo der Strich bei dem Summenzeichen andeuten soll, dass das Werthepaar $\varkappa, \lambda = 0, 0$ auszuschliessen ist. Will man diese Formeln, aus denen sich

durch Differentiation nach u die *Jacobi*schen Formeln für die Auflösung der Theilungsgleichungen ergeben, direct aus der Theorie der elliptischen Functionen ableiten, so muss man den *Hermite*schen Satz (vgl. z. B. dieses Journal Bd. 88, S. 154, Formel (5.)) auf die doppeltperiodischen Functionen

$$\mathrm{r}(nu)-n\,\mathrm{r}(u), \quad \frac{\sigma(\omega_{\alpha\beta}+nu)}{\sigma(\omega_{\alpha\beta})\,\sigma(nu)}\,e^{-\eta_{\alpha\beta}nu}$$

anwenden. So erhält man zunächst die n^2 Gleichungen (22.) und (23.) und durch *Auflösung* derselben die n^2 Gleichungen (24.). Auf dem hier eingeschlagenen Wege wird die Auflösung solcher linearen Gleichungen vermieden, weil die n^2 Relationen (20.) die Eigenthümlichkeit haben, dass sich die aufgelösten Gleichungen aus den ursprünglichen durch Vertauschung der beiden Variabeln u und v ergeben.

Setzt man nun

$$(25.)\quad \begin{cases} r_{\alpha\beta}=\mathrm{r}(\omega_{\alpha\beta})-\eta_{\alpha\beta}, & s_{\alpha\beta}=\wp(\omega_{\alpha\beta}), \quad t_{\alpha\beta}=\wp'(\omega_{\alpha\beta}), \\ r_{00}=0, & s_{00}=0, \quad t_{00}=0, \end{cases}$$

so findet man durch Entwicklung der Gleichungen (22.) und (23.) nach Potenzen von u und Vergleichung der Coefficienten der Anfangsglieder die Relationen

$$(26.)\quad n\,r_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda}\varrho^{\alpha\lambda-\beta\varkappa}r_{\varkappa\lambda},$$

$$(27.)\quad \tfrac{1}{2}n^2(s_{\alpha\beta}-r_{\alpha\beta}^2) = \sum_{\varkappa,\lambda}\varrho^{\alpha\lambda-\beta\varkappa}s_{\varkappa\lambda},$$

$$(28.)\quad \tfrac{1}{3}n^3(t_{\alpha\beta}+3s_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta}-r_{\alpha\beta}^3) = \sum_{\varkappa,\lambda}\varrho^{\alpha\lambda-\beta\varkappa}t_{\varkappa\lambda}.$$

Die Ausdrücke (25.) bleiben ungeändert, wenn α, β durch congruente Zahlen (mod. n) ersetzt werden. Ferner ist

$$(29.)\quad r_{-\alpha,-\beta}=-r_{\alpha\beta}, \quad s_{-\alpha,-\beta}=s_{\alpha\beta}, \quad t_{-\alpha,-\beta}=-t_{\alpha\beta}.$$

Ist daher $n=2k$ eine gerade Zahl, so ist $r_{00}=r_{0k}=r_{k0}=r_{kk}=0$. Von dieser Ausnahme abgesehen sind aber die Grössen $r_{\alpha\beta}$ n^2 ***verschiedene*** Functionen der beiden Variabeln ω, ω'. Denn ist $h=e^{i\pi\tau}$, so ist

$$(30.)\quad \frac{\omega}{\pi}\mathrm{r}(u) = \frac{\eta u}{\pi}+\tfrac{1}{2}\cot\Big(\frac{\pi u}{2\omega}\Big)+2\sum_{\nu}{}_1^{\infty}\frac{h^{2\nu}}{1-h^{2\nu}}\sin\Big(\frac{\nu\pi u}{\omega}\Big).$$

Diese Reihe *) ist convergent, falls u in dem Streifen der Constructions-

---

*) Dieselbe ergiebt sich durch Coefficientenvergleichung aus der Reihe

$$\frac{2\omega}{\pi}\frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)}e^{-\frac{\eta}{\omega}uv} = \cot\Big(\frac{\pi u}{2\omega}\Big)+\cot\Big(\frac{\pi v}{2\omega}\Big)+4\sum_{\varkappa,\lambda}{}_1^{\infty}h^{2\varkappa\lambda}\sin\frac{\pi}{\omega}(\varkappa u+\lambda v).$$

(Vgl. die während des Druckes dieser Abhandlung erschienene Arbeit des Herrn *Kronecker*, Zur Theorie der elliptischen Functionen, Berliner Monatsber. 1881, S. 1165.)

ebene liegt, der von zwei durch die Punkte $2\omega'$ und $-2\omega'$ zu der Verbindungslinie der Punkte 0 und ω gezogenen Parallelen liegt.

Wählt man daher für β eine der Zahlen $0, 1, \dots n-1$, so darf man $u = \omega_{\alpha\beta}$ setzen. Entwickelt man die so erhaltene Reihe nach Potenzen von $h^{\frac{2}{n}} = x$, so ergiebt sich

$$\frac{i\omega}{\pi} r_{\alpha\beta} = \sum_{\nu}{}_0^{\infty} c_\nu x^\nu.$$

Hier ist

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\,\frac{1+\varrho^\alpha}{1-\varrho^\alpha} \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} - \frac{\beta}{n},$$

je nachdem $\beta = 0$ oder von Null verschieden ist, und falls $\nu > 0$ ist,

$$c_\nu = \sum_\delta \varrho^{\frac{\alpha\nu}{\delta}} - \sum_\varepsilon \varrho^{-\frac{\alpha\nu}{\varepsilon}},$$

wo δ die (positiven) Divisoren von ν durchläuft, welche $\equiv \beta \pmod{n}$ sind, und ε die, welche $\equiv -\beta$ sind. Die ersten Glieder der Entwicklung von $\frac{i\omega}{\pi} r_{\alpha\beta}$ sind also, falls $\beta = 0$ und α von Null verschieden ist,

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{1+\varrho^\alpha}{1-\varrho^\alpha} + \cdots,$$

falls $\beta = \frac{n}{2}$ (also n gerade) ist,

$$(\varrho^\alpha - \varrho^{-\alpha})\, x^{\frac{n}{2}} + \cdots,$$

falls β eine der Zahlen $1, 2, \dots n-1$ mit Ausschluss von $\frac{n}{2}$ ist,

$$\left(\tfrac{1}{2} - \frac{\beta}{n}\right) + \varrho^\alpha x^\beta - \varrho^{-\alpha} x^{n-\beta} + \cdots.$$

Daher können die Differenzen der n^2 Grössen $r_{\alpha\beta}$ nicht identisch verschwinden, ausser wenn n gerade, und α, β gleich Null oder $\frac{n}{2}$ sind.

Ferner ist

$$(31.) \qquad r_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta} f(s_{\alpha\beta}), \quad r_{\alpha\beta}^2 = g(s_{\alpha\beta}),$$

wo $f(s)$ und $g(s)$ (von α, β unabhängige) rationale Functionen von s und g_2 und g_3 mit rationalen Zahlencoefficienten sind. Denn setzt man

$$\frac{\sigma(n-1)u}{\sigma(u)^{(n-1)^2}} = \varphi(u),$$

so ist

$$\frac{\varphi'}{\varphi}(\omega_{\alpha\beta}) = -n(n-1) r_{\alpha\beta}, \quad \frac{\varphi''}{\varphi}(\omega_{\alpha\beta}) = -n(n-1)^2 r_{\alpha\beta}^2.$$

Nun ist aber (vgl. *Kiepert*, dieses Journal Bd. 76, S. 31)

$$\varphi(u) = \wp'(u)^{\varepsilon} G(\wp(u)),$$

wo $\varepsilon = 0$ oder 1 ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und $G(s)$ eine ganze Function von s, g_2, g_3 ist, und mithin ist

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \wp'(u)\Big(\frac{\varepsilon\wp''(u)}{\wp'(u)^2} + \frac{G'(\wp(u))}{G(\wp(u))}\Big),\quad \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = (2\varepsilon+1)\frac{G'(\wp(u))}{G(\wp(u))} + \wp'(u)^2 G''(\wp(u)).$$

Ist $\omega_{\alpha\beta}$ ein primitiver n^{ter} Theil einer Periode, so genügt $s_{\alpha\beta}$ einer irreductibeln Gleichung vom Grade

$$m = \tfrac{1}{2}n^2 \Pi\Big(1-\frac{1}{p^2}\Big),$$

wo p die verschiedenen in n aufgehenden Primzahlen durchläuft. In derselben ist der Coefficient der höchsten Potenz 1, und die der übrigen sind *ganze* Functionen von g_2 und g_3. Weil nun die Grössen $r^2_{\alpha\beta}$ rationale Functionen der Grössen $s_{\alpha\beta}$ und ausserdem unter einander verschieden sind, so genügen sie ebenfalls einer irreductibeln Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 mit rationalen Zahlencoefficienten sind, und es lassen sich auch die Grössen $s_{\alpha\beta}$ und $\frac{t_{\alpha\beta}}{r_{\alpha\beta}}$ durch die Grössen $r^2_{\alpha\beta}$ rational ausdrücken. Aus Gleichung (27.) folgt noch nach einem bekannten algebraischen Princip, dass auch die Coefficienten der Gleichung für $r^2_{\alpha\beta}$, falls man den der höchsten Potenz gleich 1 voraussetzt, *ganze* Functionen von g_2 und g_3 sind.

§ 4.

Transformation.

Betrachtet man in der durch die Formel (6.) definirten Function $\mathrm{q}(u)$ die Grössen u, ω, ω', μ, μ' als unabhängige Variabeln, und setzt man

$$\mathrm{q}(u) = \mathrm{q}(u, \omega, \omega', \mu, \mu'),\quad \sigma(u) = \sigma(u, \omega, \omega'),\quad \eta = \eta(\omega, \omega'),\quad \eta' = \eta'(\omega, \omega'),$$

$$\bar{\mathrm{q}}(u) = \mathrm{q}\Big(u, \frac{\omega}{n}, \omega', \mu, \frac{\mu'}{n}\Big),\quad \bar{\sigma}(u) = \sigma\Big(u, \frac{\omega}{n}, \omega'\Big),\quad \bar{\eta} = \eta\Big(\frac{\omega}{n}, \omega'\Big),\quad \bar{\eta}' = \eta'\Big(\frac{\omega}{n}, \omega'\Big),$$

so ist

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \bar{\eta}\omega' - \bar{\eta}'\frac{\omega}{n} = \frac{i\pi}{2},$$

und daher genügt die durch die erste der beiden Gleichungen

$$(32.)\qquad \bar{\eta} = \eta + G_1\frac{\omega}{n},\quad \bar{\eta}' = n\eta' + G_1\omega'$$

definirte Grösse G_1 auch der andern. Da ferner

$$\bar{\mathrm{q}}\left(u+\frac{2\omega}{n}\right) = e^{-\frac{2\pi i\mu'}{n}}\bar{\mathrm{q}}(u)$$

ist, so ist

$$\bar{\mathrm{q}}(u+2\omega) = e^{-2\pi i\mu'}\bar{\mathrm{q}}(u), \quad \bar{\mathrm{q}}(u+2\omega') = e^{2\pi i\mu}\bar{\mathrm{q}}(u).$$

Betrachtet man also 2ω, $2\omega'$ als die Perioden von $\bar{\mathrm{q}}(u)$, so sind μ, μ' die ihnen entsprechenden Parameter. Unter dieser Voraussetzung ist aber die Function $\bar{\mathrm{q}}(u)$ nicht mehr von der ersten, sondern von der n^{ten} Ordnung, und wird für die n Werthe $u = -\frac{2\lambda\omega}{n}$, wo λ ein vollständiges Restsystem (mod. n) zu durchlaufen hat, unendlich gross von der ersten Ordnung. Nach Formel (10.) ist daher

$$\bar{\mathrm{q}}(u) = \sum_\lambda C_\lambda \mathrm{q}\left(u+\frac{2\lambda\omega}{n}\right).$$

Entwickelt man nach Potenzen von $u+\frac{2\alpha\omega}{n}$, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von $\left(u+\frac{2\alpha\omega}{n}\right)^{-1}$, dass $C_\alpha = e^{\frac{2\pi i\mu'\alpha}{n}}$, also

$$\bar{\mathrm{q}}(u) = \sum_\lambda e^{\frac{2\pi i\mu'\lambda}{n}}\mathrm{q}\left(u+\frac{2\lambda\omega}{n}\right)$$

ist. Ist speciell

$$2\mu\eta+2\mu'\eta' = 0, \quad 2\mu\omega+2\mu'\omega' = -nv,$$

so ist nach (32.)

$$2\mu\bar{\eta}+2\frac{\mu'}{n}\bar{\eta}' = -G_1 v$$

und daher

$$(33.)\quad \frac{\bar{\sigma}(u+v)}{\bar{\sigma}(u)\bar{\sigma}(v)}e^{-G_1uv} = \sum_\lambda \frac{\sigma\left(nv+u+\frac{2\lambda\omega}{n}\right)}{\sigma(nv)\sigma\left(u+\frac{2\lambda\omega}{n}\right)}e^{-2\lambda\eta v}.$$

Vermehrt man u um $\frac{2\alpha\omega'}{n}$ und v um $\frac{2\beta\omega'}{n}$, so erhält man

$$(34.)\quad \begin{cases} \dfrac{\bar{\sigma}\left(u+v+\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\right)}{\bar{\sigma}\left(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)\bar{\sigma}\left(v+\frac{2\beta\omega'}{n}\right)}e^{-G_1uv-\frac{2\bar{\eta}'}{n}\left(\beta u+\alpha v+\frac{2\alpha\beta\omega'}{n}\right)} \\ \quad = \sum_\lambda \varrho^{-\lambda\beta}\dfrac{\sigma(nv+u+\omega_{\lambda\alpha})}{\sigma(nv)\sigma(u+\omega_{\lambda\alpha})}e^{-\eta_{\lambda\alpha}nv}. \end{cases}$$

Vergleicht man in den Entwicklungen der beiden Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von v die constanten Glieder, so ergiebt sich (vgl. ***Kiepert,*** dieses Journal Bd. 76, S. 37), falls $\beta = 0$ ist,

$$(35.)\qquad \bar{\mathrm{r}}\Big(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)-G_1 u-\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n} = \sum_\lambda(\mathrm{r}(u+\omega_{\lambda\alpha})-\eta_{\lambda\alpha}),$$

falls aber β von Null verschieden ist,

$$(36.)\qquad \frac{\bar{\sigma}\Big(u+\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\Big)}{\bar{\sigma}\Big(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)\bar{\sigma}\Big(\frac{2\beta\omega'}{n}\Big)}e^{-\frac{2\beta\bar{\eta}'}{n}\left(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)} = \sum_\lambda \varrho^{-\lambda\beta}(\mathrm{r}(u+\omega_{\lambda\alpha})-\eta_{\lambda\alpha}).$$

Vergleicht man ferner in den Entwicklungen nach Potenzen von u die constanten Glieder, so findet man (bei Ersetzung von v durch u und Vertauschung von β mit α), falls $\beta = 0$ ist,

$$(37.)\qquad \bar{\mathrm{r}}\Big(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)-G_1 u-\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n} = \mathrm{r}(nu)+\sum_\lambda{}' \varrho^{-\lambda\alpha}\frac{\sigma(nu+\omega_{\lambda 0})}{\sigma(nu)\sigma(\omega_{\lambda 0})}e^{-\eta_{\lambda 0}nu},$$

falls aber β von Null verschieden ist,

$$(38.)\qquad \frac{\bar{\sigma}\Big(u+\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\Big)}{\bar{\sigma}\Big(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)\bar{\sigma}\Big(\frac{2\beta\omega'}{n}\Big)}e^{-\frac{2\beta\bar{\eta}'}{n}\left(u+\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)} = \sum_\lambda \varrho^{-\lambda\alpha}\frac{\sigma(nu+\omega_{\lambda\beta})}{\sigma(nu)\sigma(\omega_{\lambda\beta})}e^{-\eta_{\lambda\beta}nu}.$$

Der Strich bei dem Summenzeichen in Formel (37.) deutet an, dass der Werth $\lambda = 0$ auszuschliessen ist. Entwickelt man diese Gleichungen nach Potenzen von u und vergleicht die constanten Glieder, so erhält man, falls α und β von Null verschieden sind,

$$(39.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\bar{\sigma}\Big(\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\Big)}{\bar{\sigma}\Big(\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)\bar{\sigma}\Big(\frac{2\beta\omega'}{n}\Big)}e^{-\frac{2\alpha\omega'}{n}\frac{2\beta\bar{\eta}'}{n}} = \sum_\lambda \varrho^{-\lambda\alpha}r_{\lambda\beta} = \sum_\lambda \varrho^{-\lambda\beta}r_{\lambda\alpha}, \\ \bar{\mathrm{r}}\Big(\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)-\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n} = \sum_\lambda \varrho^{-\lambda\alpha}r_{\lambda 0} = \sum_\lambda r_{\lambda\alpha}, \end{cases}$$

oder wenn man β durch $-\beta$ ersetzt,

$$(40.)\qquad \frac{\bar{\sigma}\Big(\frac{2(\alpha-\beta)\omega'}{n}\Big)}{\bar{\sigma}\Big(\frac{2\alpha\omega'}{n}\Big)\bar{\sigma}\Big(\frac{2\beta\omega'}{n}\Big)}e^{\frac{2\alpha\omega'}{n}\frac{2\beta\bar{\eta}'}{n}} = \sum_\lambda \varrho^{\lambda\alpha}r_{\lambda\beta} = -\sum_\lambda \varrho^{\lambda\beta}r_{\lambda\alpha}.$$

Vergleicht man in jenen Entwicklungen die Coefficienten von u, so findet man durch passende Combination der erhaltenen Formeln die Gleichungen

$$(41.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\bar{\sigma}\left(\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\right)}{\bar{\sigma}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)\bar{\sigma}\left(\frac{2\beta\omega'}{n}\right)} e^{-\frac{2\alpha\omega'}{n}\frac{2\beta\bar{\eta}'}{n}}\left(2\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. -\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\beta\omega'}{n}\right)-\frac{2(\alpha+\beta)\bar{\eta}'}{n}\right) \\ = \Sigma\varrho^{-\lambda\beta}(n r_{\lambda\alpha}^2-(n+2)s_{\lambda\alpha}) = \Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}(n r_{\lambda\beta}^2-(n+2)s_{\lambda\beta}), \end{cases}$$

$$(42.)\quad \begin{cases} 2\dfrac{\bar{\sigma}\left(\frac{2(\alpha+\beta)\omega'}{n}\right)}{\bar{\sigma}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)\bar{\sigma}\left(\frac{2\beta\omega'}{n}\right)} e^{-\frac{2\alpha\omega'}{n}\frac{2\beta\bar{\eta}'}{n}}\left(\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\beta\omega'}{n}\right)-\frac{2(\alpha-\beta)\bar{\eta}'}{n}\right) \\ = \Sigma\varrho^{-\lambda\beta}(n r_{\lambda\alpha}^2-(n-2)s_{\lambda\alpha}) = -\Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}(n r_{\lambda\beta}^2-(n-2)s_{\lambda\beta}), \end{cases}$$

$$(43.)\quad \begin{cases} \left(\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n}\right)^2-3\bar{\wp}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-2G_1 \\ = \Sigma(n r_{\lambda\alpha}^2-(n+2)s_{\lambda\alpha}) = \Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}(n r_{\lambda 0}^2-(n+2)s_{\lambda 0}), \end{cases}$$

$$(44.)\quad \begin{cases} \left(\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n}\right)^2+\bar{\wp}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)+2G_1 \\ = \Sigma(n r_{\lambda\alpha}^2-(n-2)s_{\lambda\alpha}) = -\Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}(n r_{\lambda 0}^2-(n-2)s_{\lambda 0}), \end{cases}$$

$$(45.)\quad \bar{\wp}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-\left(\bar{\mathrm{r}}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)-\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n}\right)^2 = 2\Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}s_{\lambda 0} = n\Sigma(s_{\lambda\alpha}-r_{\lambda\alpha}^2),$$

$$(46.)\quad \bar{\wp}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)+G_1 = \Sigma s_{\lambda\alpha} = \frac{n}{2}\Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}(s_{\lambda 0}-r_{\lambda 0}^2),$$

$$(47.)\quad \frac{e^{\frac{2\alpha\omega'}{n}\frac{2\alpha\bar{\eta}'}{n}}}{\bar{\sigma}\left(\frac{2\alpha\omega'}{n}\right)^2} = \Sigma\varrho^{\lambda\alpha}s_{\lambda\alpha} = \frac{n}{n-2}\Sigma\varrho^{\lambda\alpha}r_{\lambda\alpha}^2,$$

$$(48.)\quad G_1 = \Sigma s_{\lambda 0} = \frac{n}{n-2}\Sigma r_{\lambda 0}^2.$$

Der Formel (40.) zufolge verschwindet, wenn man $r_{\lambda 1} = r_\lambda$ setzt, die ganze Function $f(x) = \sum_\lambda{}_0^{n-1} r_\lambda x^\lambda$ für $x = \varrho$, aber nicht für $x = \varrho^\alpha$, falls α von 1 und 0 verschieden ist. Ist also $g(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$, so haben die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ nur die Wurzel $x = \varrho$ gemeinsam. Der grösste gemeinsame Theiler von $f(x)$ und $g(x)$ ist daher eine ganze Function ersten Grades $x-R(r_0, r_1, \dots r_{n-1})$, wo R eine rationale Function mit rationalen

Zahlencoefficienten bezeichnet, und mithin ist

$$(49.)\quad \varrho = R(r_0, r_1, \dots r_{n-1}).$$

Die n^{ten} Einheitswurzeln lassen sich demnach als rationale Functionen der n Grössen r_λ und folglich nach (31.) auch der $2n$ Grössen $s_{\lambda 1}$, $t_{\lambda 1}$ darstellen (*Sylow*, Forhandlinger etc. Christiania, 1871, S. 419; *Kronecker*, Berliner Monatsber. 1875, S. 501.), und diese Darstellung bleibt möglich, welche speciellen endlichen Werthe die Invarianten g_2, g_3 haben mögen. Setzt man

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_{n-3} & r_{n-2} & r_{n-1} & \dots & r_{2n-4} \end{vmatrix} = \Sigma R_\lambda x^\lambda,$$

so ist

$$(50.)\quad 1 : \varrho : \varrho^2 : \dots : \varrho^{n-1} = R_0 : R_1 : R_2 : \dots : R_{n-1}.$$

Dagegen verschwindet nach Formel (42.) die Function

$$\Sigma(n r_{\lambda 1}^2 - (n-2) s_{\lambda 1}) x^\lambda$$

sowohl für $x = \varrho$ wie für $x = \varrho^{-1}$, aber (specielle Werthe der Invarianten ausgeschlossen) nicht für $x = \varrho^\alpha$, falls α von 1, -1, 0 verschieden ist. Daher lässt sich $\varrho + \varrho^{-1}$ durch die n Grössen $s_{\lambda 1}$ rational ausdrücken.

Aus den für die Transformation entwickelten Formeln kann man die in § 3 für die Multiplication und Division aufgestellten Formeln von neuem herleiten, entweder durch Zusammensetzung zweier supplementären Transformationen, oder viel einfacher mittelst der Bemerkung, dass die linke Seite der Relation (34.) ungeändert bleibt, wenn man u mit v und α mit β vertauscht. So gelangt man unmittelbar zu der Gleichung

$$(51.)\quad \Sigma \varrho^{-\lambda\beta} \frac{\sigma(nv+u+\omega_{\lambda\alpha})}{\sigma(nv)\sigma(u+\omega_{\lambda\alpha})} e^{-\eta_{\lambda\alpha} nv} = \Sigma \varrho^{-\lambda\alpha} \frac{\sigma(nu+v+\omega_{\lambda\beta})}{\sigma(nu)\sigma(v+\omega_{\lambda\beta})} e^{-\eta_{\lambda\beta} nu},$$

aus der sich, indem man $\alpha = 0, 1, \dots n-1$ setzt und die erhaltenen Gleichungen auflöst, die Formel (20.) ergiebt. Speciell ist für $v = u$

$$(52.)\quad \Sigma \varrho^{-\lambda\beta} \frac{\sigma((n+1)u+\omega_{\lambda\alpha})}{\sigma(u+\omega_{\lambda\alpha})} e^{-\eta_{\lambda\alpha} nu} = \Sigma \varrho^{-\lambda\alpha} \frac{\sigma((n+1)u+\omega_{\lambda\beta})}{\sigma(u+\omega_{\lambda\beta})} e^{-\eta_{\lambda\beta} nu}$$

und für $v = -u$ und Ersetzung von β durch $-\beta$

$$(53.)\quad \Sigma\varrho^{\lambda\beta}\frac{\sigma((n-1)u-\omega_{\lambda\alpha})}{\sigma(u+\omega_{\lambda\alpha})}e^{\eta_{\lambda\alpha}nu} = -\Sigma\varrho^{\lambda\alpha}\frac{\sigma((n-1)u-\omega_{\lambda\beta})}{\sigma(u+\omega_{\lambda\beta})}e^{\eta_{\lambda\beta}nu},$$

also für $\alpha=\beta$

$$(54.)\quad \Sigma\varrho^{\lambda\alpha}\frac{\sigma((n-1)u-\omega_{\lambda\alpha})}{\sigma(u+\omega_{\lambda\alpha})}e^{\eta_{\lambda\alpha}nu} = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichungen nach Potenzen von u, so erhält man von neuem einige der bereits oben und in § 3 abgeleiteten Gleichungen, speciell die Relationen (*Abel,* Précis etc. Introd. 6; *Sylow,* Forhandlinger etc. Christiania 1864, S. 68; *Kronecker,* l. c.)

$$(55.)\quad \Sigma\varrho^{-\lambda\beta}r_{\lambda\alpha} = \Sigma\varrho^{-\lambda\alpha}r_{\lambda\beta},$$

$$(56.)\quad \Sigma\varrho^{\lambda\beta}r_{\lambda\alpha} = -\Sigma\varrho^{\lambda\alpha}r_{\lambda\beta},$$

$$(57.)\quad \Sigma\varrho^{\lambda\alpha}r_{\lambda\alpha} = 0.$$

Die Formeln (56.) ergeben sich aus den Gleichungen (55.), indem man β durch $-\beta$ und auf der rechten Seite λ durch $-\lambda$ ersetzt. Ist

$$\Sigma\varrho^{\lambda\beta}r_{\lambda\alpha}=v_{\alpha\beta},\quad \text{also}\quad \Sigma\varrho^{-\alpha\lambda}v_{\beta\lambda}=r_{\alpha\beta},$$

so ist

$$v_{\alpha\beta}=-v_{\beta\alpha},\quad v_{-\alpha,-\beta}=-v_{\alpha\beta}.$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist, wie eine leichte Abzählung zeigt, $\frac{3n^2+\varepsilon}{4}$, wo $\varepsilon=1$ oder 4 ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Ebenso gross ist daher die Anzahl der Relationen (56.), verbunden mit den Gleichungen

$$(58.)\quad r_{-\alpha,-\beta} = -r_{\alpha\beta}.$$

Die Anzahl der letzteren ist aber $\frac{n^2+\varepsilon}{2}$. Daher ist die Anzahl der von einander unabhängigen Relationen (56.), die nicht mittelst der Gleichungen (58.) aus einander hergeleitet werden können, $\frac{n^2-\varepsilon}{4}$.

Ersetzt man in den Formeln (56.) ω, ω' durch $-\omega'$, ω (und λ durch $-\lambda$), so erhält man

$$(59.)\quad \Sigma\varrho^{-\beta\lambda}r_{\alpha\lambda} = -\Sigma\varrho^{-\alpha\lambda}r_{\beta\lambda},$$

weil $\mathrm{r}(u,\omega,\omega')=\mathrm{r}(u,-\omega',\omega)$ ist. Doch sind diese Formeln lineare Combinationen der Gleichungen (56.), wie man leicht erkennt, indem man aus denselben zunächst durch Auflösung nach einer Grösse $r_{\alpha\beta}$ die Relationen (26.) herstellt, aus denen sich dann die Formeln (59.) unmittelbar ergeben.

Den hier abgeleiteten Relationen zwischen den elliptischen Functionen und der Einheitswurzel ϱ liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Ordinate der Grösse τ positiv ist. Ist dieselbe negativ, so ist ϱ überall durch ϱ^{-1} zu ersetzen. Für alle nicht reellen Werthe von τ bleiben also jene Formeln gültig, wenn ϱ statt durch die Gleichung (21.) durch

$$(60.) \qquad \varrho = e^{\frac{4(\eta\omega' - \eta'\omega)}{n}}$$

definirt wird.

Zürich, Juli 1881.

Ueber Integrale zweiter Gattung.

(Von Herrn *J. Thomae* in Jena).

Stellt man nach *Riemann* die Function

$$\frac{d\lg(v_1, v_2, \ldots v_p)}{d\zeta},$$

$$v_\nu = u_\nu(\sigma, \zeta) - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_\nu(s_\mu, z_\mu),$$

durch Integrale zweiter Gattung in der Form dar

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma, \zeta;\ s_\mu, z_\mu) + C,$$

so bleibt, wenn die Anfangswerthe der Integrale t gegeben sind, noch C zu bestimmen, welche Grösse von $s_1, z_1;\ s_2, z_2;\ \ldots;\ s_p, z_p$ unabhängig ist, aber eine Function von σ, ζ und den Klassenmoduln ist. Sind

$$s_{1,\zeta}, z_{1,\zeta};\ s_{2,\zeta}, z_{2,\zeta};\ \ldots;\ s_{p,\zeta},\ z_{p,\zeta}$$

diejenigen p Werthepaare, für welche

$$(u_1(\sigma, \zeta),\ u_2(\sigma, \zeta),\ \ldots,\ u_p(\sigma, \zeta)) \equiv (\Sigma u_1(s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}),\ \ldots\ \Sigma u_p(s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}))$$

ist, so ergiebt sich für C sofort der Werth

$$C \equiv -\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma, \zeta;\ s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}),$$

und es ist C durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung dargestellt. Diese Summe lässt sich jedoch durch speciellere Integrale und durch algebraische Functionen darstellen, was hier geschehen soll. Zuerst soll der allgemeine Fall behandelt werden, dann der Fall, in welchem s eine Quadratwurzel ist, vollständig. Ist s eine dritte Wurzel, so habe ich die Bestimmung bereits in zwei Monographieen über dreiwerthige *Abel*sche Functionen ausgeführt. Im allgemeinen Falle bleiben noch gewisse algebraische Schwierigkeiten zu überwinden, die sich für $p = 3$ besiegen lassen, worauf ich ein andermal zurückkommen will.

§ 1.

Bezeichnung.

Die *Riemann*sche Fläche T sei wie die algebraische Function s verzweigt, welche durch die Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = F(s, z) = a_0 s^n + n a_1 s^{n-1} + \tfrac{1}{2} n (n-1) a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

vom Grade n in s, vom Grade m in z und vom Geschlecht p gegeben ist. Die Grössen $u_1(s, z)$, $u_2(s, z)$, $\ldots$, $u_p(s, z)$ seien in der canonisch durch Querschnitte a_1, b_1; a_2, b_2; $\ldots$; a_p, b_p auf einfachen Zusammenhang gebrachten Fläche T' solche überall endliche Integrale, und haben solche Anfangswerthe, wie sie nach *Riemann* in die ϑ-Functionen zur Lösung des Umkehrproblems eingesetzt werden. Die Bezeichnung „eine Function φ" und „durch eine Function φ verknüpfte Werthepaare oder Punkte" werde in *Riemanns* Sinne genommen, und es werde

$$\frac{du_\mu(s, z)}{dz} = \varphi_\mu(s, z) : \frac{\partial F(s, z)}{\partial s}$$

gesetzt, wodurch φ_μ bestimmt ist. Diejenigen Functionen φ, die, von den sich aufhebenden Verzweigungspunkten abgesehen, in $p-1$ Punkten ***doppelt*** verschwinden, die Quadrate der *Abel*schen Functionen im engeren Sinne, sollen mit $ab(s, z)$, $ab_1(s, z)$, $ab_\mu(s, z)$, ... bezeichnet werden, und zwar sollen die Doppelnullpunkte von $ab(s, z)$ $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\ldots$, $\varepsilon^{(p-1)}$, die von $ab_\mu(s, z)$ $\varepsilon_\mu^{(1)}$, $\varepsilon_\mu^{(2)}$, $\ldots$, $\varepsilon_\mu^{(p-1)}$ sein. Der Function $\sqrt{ab(s, z)}$ eine Charakteristik zuzuschreiben, ist im Grunde nicht correct, doch soll der Kürze halber hier die Charakteristik des Systems

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} u_1(\varepsilon^{(\nu)}), \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} u_2(\varepsilon^{(\nu)}), \ldots, \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} u_\mu(\varepsilon^{(\nu)})\right)$$

die Charakteristik von $\sqrt{ab(s, z)}$ genannt werden. $F_1(s, z)$ soll der nach , $F_2(s, z)$ der nach z, F_{11} der zweimal nach s, F_{12} der nach s und z genommene partielle Differentialquotient von F sein. Fällt der Punkt (s, z) auf einen einfachen Verzweigungspunkt, in welchem $z = k$, $s = s_k$ ist, so soll derselbe nicht immer durch s_k, k, sondern kurz durch k gegeben werden, so dass z. B. $u(k) = u(s_k, k)$ und s_k derjenige Werth von s ist, der zum Verzweigungspunkt k gehört, während die noch übrigen über k liegenden Punkte mit $s_k^{(1)}, s_k^{(2)}, \ldots, s_k^{(n-2)}$ markirt werden. Die zu einem bestimmten Werthe von z, bez. die zu einem bestimmten Werthe von s gehörenden Paare seien:

$$s,\ z;\quad s^{(1)},\ z;\quad s^{(2)},\ z;\quad \ldots;\quad s^{(n-1)},\ z;$$
$$s,\ z;\quad s,\ z^{(1)};\quad s,\ z^{(2)};\quad \ldots;\quad s,\ z^{(m-1)}.$$

Das Integral zweiter Gattung $t(\sigma, \zeta;\ s, z)$ wird als Function von s und z im Punkte σ, ζ wie $1:(\zeta - z)$ unendlich gross und besitzt an den Querschnitten $a_1, a_2, \ldots, a_p$ den Periodicitätsmodul Null, wodurch es bis auf eine additive Constante bestimmt ist. Lässt man σ, ζ auf einen Verzweigungspunkt k fallen, so wird, wie man sehen wird, $t(\sigma, \zeta;\ s, z)$ identisch unendlich, und hat daher keinen Sinn. Multiplicirt man aber erst mit $F_1(\sigma, \zeta)$ und setzt dann k für σ, ζ, so erhält man ein canonisches Integral zweiter Gattung, welches im Punkt k unendlich gross erster Ordnung wird, und es mag

$$\lim_{\sigma,\zeta=k} F_1(\sigma, \zeta)\, t(\sigma, \zeta;\ s, z) = t(s, z),\quad \lim_{\sigma,\zeta=k_\varrho} F_1(\sigma, \zeta)\, t(\sigma, \zeta;\ s, z) = t_\varrho(s, z)$$

gesetzt werden.

Für ein System von p Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ soll kürzer $((v))$ geschrieben werden, so dass z. B.

$$\vartheta((u(s, z))) = \vartheta(u_1(s, z),\ u_2(s, z),\ \ldots,\ u_p(s, z))$$

und ähnlich

$$\left(\binom{h}{g}\right) = \binom{h_1, h_2, \ldots, h_p}{g_1, g_2, \ldots, g_p}$$

wird. Das Summenzeichen Σ wird nicht mit einer Marke versehen, wenn μ hinter demselben vorkommt, welcher Buchstabe dann Summationsbuchstabe ist und die Werthe 1, 2, ... p annimmt, so dass z. B. $\Sigma v_\mu = v_1 + v_2 + \cdots + v_p$ ist.

§ 2.

Anwendung des *Abel*schen Satzes.

Wir haben hier mehrfach Gelegenheit den *Abel*schen Satz sowohl auf Integrale zweiter Gattung als auch auf algebraische Functionen anzuwenden. Zuerst fragen wir, welchen Werth die Summe annimmt

$$\sum_{\varphi=0} t(\sigma, \zeta;\ s, z),$$

die über $2p-2$ Werthepaare s, z zu erstrecken ist, die durch die Gleichung $\varphi = 0$ mit einander verknüpft sind, wobei also die sich aufhebenden Verzweigungspunkte nicht zu den Nullpunkten von φ gezählt werden. — Es sei $\varphi^{(1)} : \varphi^{(2)}$ der Quotient zweier Functionen φ, und $\bar{\Sigma}$ bedeute eine Summe

über $2p-2$ Werthepaare s, z, für welche jener Quotient einen bestimmten Werth annimmt. Alsdann ist nach dem *Abel*schen Satze

$$\Sigma t(\sigma,\zeta;\ s,z) \equiv \frac{d\lg}{d\zeta}\Big(\frac{\varphi^{(1)}(\sigma,\zeta)}{\varphi^{(2)}(\sigma,\zeta)} - \frac{\varphi^{(1)}(s,z)}{\varphi^{(2)}(s,z)}\Big) + C,$$

worin C von dem Werthe von $\varphi^{(1)}:\varphi^{(2)}$, oder von s, z (wenn der Quotient durch ein solches Werthepaar bestimmt ist) unabhängig ist. Setzen wir jenen Quotienten einmal der Null, ein andermal Unendlich gleich, und bilden die Differenz, so folgt

$$(1.)\qquad \sum_{\varphi^{(1)}=0} t(\sigma,\zeta;\ s,z) - \sum_{\varphi^{(2)}=0} t(\sigma,\zeta;\ s,z) \equiv \frac{d\lg\varphi^{(1)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta} - \frac{d\lg\varphi^{(2)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}.$$

Ist also φ eine beliebige Function φ, $\varphi^{(0)}$ eine bestimmte fest und möglichst einfach zu wählende (z. B. wenn keine sich aufhebenden Verzweigungspunkte, oder nur unendlich ferne vorhanden sind, $\varphi^{(0)} = \text{const.}$) Function φ, so ist

$$(2.)\qquad \sum_{\varphi=0} t(\sigma,\zeta;\ s,z) \equiv \frac{d\lg\varphi(\sigma,\zeta)}{d\zeta} + \sum_{\varphi^{(0)}=0} t(\sigma,\zeta;\ s,z) - \frac{d\lg\varphi^{(0)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}.$$

Diese Congruenz erhält eine bemerkenswerthe Vereinfachung, wenn man sie mit $F_1(\sigma,\zeta)$ multiplicirt, und dann σ, ζ auf einen einfachen Verzweigungspunkt k fallen lässt. Da nämlich im Allgemeinen $\varphi(k)$ und $\varphi^{(0)}(k)$ nicht Null ist, so werden

$$\lim F_1(\sigma,\zeta)\frac{d\lg\varphi(\sigma,\zeta)}{d\zeta},\quad \lim F_1(\sigma,\zeta)\frac{d\lg\varphi^{(0)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}$$

Null, wenn σ, ζ auf k fällt, und es ergiebt sich also

$$(3.)\qquad \sum_{\varphi=0} t(s,z) = \sum_{\varphi^{(0)}=0} t(s,z),$$

oder es gilt für diese Integrale derselbe Satz, der für die Integrale erster Gattung gilt, dass die Summe ihrer Werthe für $2p-2$ durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpfte Werthepaare von den in φ enthaltenen Constanten unabhängig ist, und nur von den Anfangswerthen der Integrale abhängt. In den speciellen Fällen, in welchen $\varphi^{(1)}:\varphi^{(2)}$ gleich z oder gleich s ist, hat man

$$t(\sigma,\zeta;\ s,z) + t(\sigma,\zeta;\ s^{(1)},z) + t(\sigma,\zeta;\ s^{(2)},z) + \cdots + t(\sigma,\zeta;\ s^{(n-1)},z)$$
$$\equiv \frac{1}{\zeta-z} + t(\sigma,\zeta;\ s_\infty,\infty) + t(\sigma,\zeta;\ s_\infty^{(1)},\infty) + \cdots + t(\sigma,\zeta;\ s_\infty^{(n-1)},\infty),$$
$$t(\sigma,\zeta;\ s,z) + t(\sigma,\zeta;\ s,z^{(1)}) + \cdots + t(\sigma,\zeta;\ s,z^{(m-1)})$$
$$\equiv \frac{d\lg(\sigma-s)}{d\zeta} + t(\sigma,\zeta;\ \infty,z_\infty) + t(\sigma,\zeta;\ \infty,z_\infty^{(1)}) + \cdots + t(\sigma,\zeta;\ \infty,z_\infty^{(m-1)}).$$

Ein anderer Specialfall ist der, in welchem für φ Quadrate *Abel*scher Functionen eintreten. Alsdann ist

$$(4.)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1}\left(t(\sigma,\zeta;\,\varepsilon_{\varrho}^{(\nu)})-t(\sigma,\zeta;\,\varepsilon_{\varrho'}^{(\nu)})\right)\equiv \tfrac{1}{2}\frac{d\lg ab_{\varrho}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}-\tfrac{1}{2}\frac{d\lg ab_{\varrho'}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}+\tfrac{1}{2}\Sigma\tau_{\mu}^{(\varrho,\varrho')},$$

worin $((\tau^{(\varrho,\varrho')}))$ ein System ganzer gleichzeitiger Periodicitätsmoduln des Integrales $t(\sigma,\zeta;\,s,z)$ ist. Diese Gleichung kann auch mit Hilfe der ϑ-Functionen erwiesen werden. Denn es lässt sich der in $ab_{\varrho}(s,z)$ noch willkürliche constante Factor so einrichten, dass

$$\frac{\vartheta\left(\left(u(\sigma,\zeta)-u(s,z)-\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p-1}u(\varepsilon_{\varrho}^{(\nu)})\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u(\sigma,\zeta)-u(s,z)-\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p-1}u(\varepsilon_{\varrho'}^{(\nu)})\right)\right)}e^{\Sigma h_{\mu}(u_{\mu}(\sigma,\zeta)-u_{\mu}(s,z))} = \sqrt{\frac{ab_{\varrho}(s,z)\,ab_{\varrho'}(\sigma,\zeta)}{ab_{\varrho'}(s,z)\,ab_{\varrho}(\sigma,\zeta)}}$$

ist, woraus durch logarithmische Differentiation nach ζ folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p-1}\left(t(\sigma,\zeta;\,\varepsilon_{\varrho}^{(\nu)})-t(\sigma,\zeta;\,\varepsilon_{\varrho'}^{(\nu)})\right)\equiv\tfrac{1}{2}\frac{d\lg ab_{\varrho}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}-\tfrac{1}{2}\frac{d\lg ab_{\varrho'}(\sigma,\zeta)}{d\zeta}+\Sigma h_{\mu}\frac{\partial u_{\mu}(\sigma,\zeta)}{\partial\zeta},$$

was mit der obigen Gleichung übereinstimmt.

Weiter fragen wir nach dem Werthe, welchen die Summe

$$\sum_{\sqrt{\psi}=0} t(\sigma,\zeta;\,s,z) = \Sigma t(\sigma,\zeta;\,s_{\mu,\zeta},z_{\mu,\zeta})$$

annimmt, wenn sie über die p Werthepaare erstreckt wird, in welchen die Function

$$\sqrt{\psi(\sigma,\zeta;\,s,z)} = \frac{\vartheta((u(\sigma,\zeta)-u(s,z)))}{\vartheta((u(\sigma,\zeta)-u(s,z)-\omega))}e^{\Sigma h_{\mu}(u_{\mu}(s,z)-u_{\mu}(\sigma,\zeta))}$$

verschwindet, worin

$$((\omega)) = (\tfrac{1}{2}\Sigma h_{\mu}a_{1\mu}+\tfrac{1}{2}g_1 i\pi,\ \tfrac{1}{2}\Sigma h_{\mu}a_{2\mu}+\tfrac{1}{2}g_2 i\pi,\ \dots,\ \tfrac{1}{2}\Sigma a_{p\mu}h_{\mu}+\tfrac{1}{2}g_p i\pi)$$

ein System halber Periodicitätsmoduln mit *ungerader* Charakteristik bedeutet, welche mit der Charakteristik der Function $\sqrt{ab(s,z)}$ übereinstimmen mag. — Offenbar ist

$$((u(\sigma,\zeta)))\equiv((\Sigma u(s_{\mu,\zeta},z_{\mu,\zeta}))).$$

Eine solche Charakteristik lässt sich immer in zwei andere ungerade Charakteristiken zerlegen; wir nehmen an, dass es die Charakteristiken der Functionen $\sqrt{ab_1(s,z)}$, $\sqrt{ab_2(s,z)}$ seien. Dann lässt sich $\sqrt{\psi}$ in der Form darstellen

$$(5.)\quad \sqrt{\psi(\sigma,\zeta;\,s,z)} = f(\sigma,\zeta;\,s,z):(\zeta-z)\,ab(s,z)\sqrt{ab_1(s,z)}\sqrt{ab_2(s,z)},$$

worin $f(\sigma,\zeta;\,s,z)$ eine in T einwerthige Function ist, welche in den

sich aufhebenden Verzweigungspunkten doppelt, in den Punkten $\sigma^{(1)}, \zeta$; $\sigma^{(2)}, \zeta$; ...; $\sigma^{(n-1)}, \zeta$ und in den $3p-3$ Punkten $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(p-1)}$; $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_1^{(2)}, \ldots$; $\varepsilon_1^{(p-1)}$; $\varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_2^{(2)}, \ldots$; $\varepsilon_2^{(p-1)}$ einfach verschwindet. Die übrigen p Punkte, in denen f noch verschwindet, sind die Punkte $s_{1,\zeta}, z_{1,\zeta}$; ...; $s_{p,\zeta}, z_{p,\zeta}$ und sind durch unsere Festsetzungen im Allgemeinen völlig bestimmt.

Das Zeichen $\bar{\Sigma}$ bezeichne für den Augenblick eine Summe über die $2p-1$ Werthepaare, für welche

$$f(\sigma, \zeta;\ s, z) : (\zeta - z)\, ab(s, z)\, ab_1(s, z) = \eta$$

einen bestimmten Werth annimmt. Nach dem *Abel*schen Satze ist dann $\bar{\Sigma} t(\sigma, \zeta;\ s, z)$ eine ganze lineare Function von η, und man findet leicht die Gleichung

$$\bar{\Sigma} t(\sigma, \zeta;\ s, z) \equiv \frac{f(\sigma, \zeta;\ s, z)\, ab(\sigma, \zeta)\, ab_1(\sigma, \zeta)}{(\zeta - z) f(\sigma, \zeta;\ \sigma, \zeta)\, ab(s, z)\, ab_1(s, z)} + M,$$

worin M von s, z unabhängig ist. Setzen wir

$$\lim_{(s,z)=(\sigma,\zeta)} \left\{ t(\sigma, \zeta;\ s, z) - \frac{f(\sigma, \zeta;\ s, z)}{f(\sigma, \zeta;\ \sigma, \zeta)} \frac{ab(\sigma, \zeta)\, ab_1(\sigma, \zeta)}{ab(s, z)\, ab_1(s, z)} \right\} = N(\sigma, \zeta),$$

so ergiebt die obige Summe für $s, z = \sigma, \zeta$, oder was dasselbe ist, für $\eta = \infty$

$$M \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} \left(t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon^{(\nu)}) + t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon_1^{(\nu)}) \right) + N(\sigma, \zeta);$$

lassen wir aber η verschwinden, s, z auf einen der Punkte $s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}$ fallen, so folgt

$$\Sigma t(\sigma, \zeta;\ s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}) + \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon_2^{(\nu)}) \equiv M$$

und durch Subtraction beider Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Sigma t(\sigma, \zeta;\ s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}) \equiv N(\sigma, \zeta) + \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p-1} \left\{ t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon^{(\nu)}) + t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon_1^{(\nu)}) - t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon_2^{(\nu)}) \right\} \\ \equiv N(\sigma, \zeta) + \frac{1}{2} \dfrac{d \lg ab_1(\sigma, \zeta)}{d\zeta} - \frac{1}{2} \dfrac{d \lg ab_2(\sigma, \zeta)}{d\zeta} + \frac{1}{2} \Sigma \tau_\mu^{(1,2)} + \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p-1} t(\sigma, \zeta;\ \varepsilon^{(\nu)}). \end{cases}$$

§ 3.

Darstellung der Integrale zweiter Gattung.

Um die Grösse $N(\sigma, \zeta)$, die durch Grenzübergang zu gewinnen ist, näher zu bestimmen, müssen wir zur Darstellung von $t(\sigma, \zeta;\ s, z)$ eine Form wählen, in der dieser Uebergang leicht auszuführen ist. Am nächsten liegt es wohl, zu diesem Grenzübergange die Gleichung zu benutzen:

$$t(\sigma,\zeta;\ s,z)+t(\sigma^{(1)},\zeta;\ s,z)+\cdots+t(\sigma^{(n-1)},\zeta;\ s,z)\equiv\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0},$$

in der s_0, z_0 ein Werth ist, für welchen $t(\sigma,\zeta;\ s,z)$ Null wird, der also die untere Grenze des Integrales t sein wird, wenn diese Grenze von σ,ζ unabhängig angenommen wird. Die Richtigkeit dieser Congruenz ergiebt sich daraus, dass die Differenz von Rechts und Links überall endlich ist, und über die Querschnitte a hinweg sich stetig ändert.

Es scheint jedoch vorzuziehen, für das Integral eine Form zu wählen, die den Grenzübergang unmittelbar gestattet, etwa die Form, welche ich B. 66 dieses Journals auf Seite 94 angewendet habe, wobei der Einfachheit wegen hier angenommen werden soll, dass die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte sämmtlich einfache seien. Wir setzen also

$$(7.)\quad t(\sigma,\zeta;\ s,z)=\frac{F_1(\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}\Big(\sum_{(k)}\frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)}{(\zeta-k)\varphi_0(k)}+\frac{\chi(\sigma,\zeta;\ s,z)}{(\zeta-z)F_1(s,z)}\Big)+\text{Const.},$$

wo ν beliebig ist, und die Summe über alle im Endlichen liegenden, sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte zu erstrecken ist. Die Function χ aber ist eine leicht zu construirende, in s und z ganze Function, vom Grade m in z, vom Grade $n-2$ in s, die aber ausserdem noch ein Glied $c.a_0 s^{n-1}$ enthalten darf, so dass für unendlich grosse z oder s der Quotient $\chi:(\zeta-z)F_1$ endlich bleibt. Ferner muss χ in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten und in den über ζ liegenden $n-1$ Punkten $\sigma^{(1)},\zeta;\ \sigma^{(2)},\zeta;\ \ldots;\ \sigma^{(n-1)},\zeta$ verschwinden. Die so definirte Function enthält im Allgemeinen mehrere willkürliche Constanten. Setzt man in (7.) noch Const. $=0$, so ergiebt sich in dieser Form

$$(8.)\ \begin{cases} N(\sigma,\zeta)=\dfrac{F_1(\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}\sum\limits_{(k)}\dfrac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\,\dfrac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)}+L(\sigma,\zeta),\\[2mm] L(\sigma,\zeta)=\lim\limits_{z=\zeta}\Big\{\dfrac{\chi(\sigma,\zeta;\ s,z)}{(\zeta-z)F_1(s,z)}\,\dfrac{F_1(\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}-\dfrac{f(\sigma,\zeta;\ s,z)}{(\zeta-z)f(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}\,\dfrac{ab(\sigma,\zeta)ab_1(\sigma,\zeta)}{ab(s,z)ab_1(s,z)}\Big\}.\end{cases}$$

Verstehen wir unter χ', f', ab', ab'_ϱ bez. die nach z genommenen totalen Differentialquotienten der Functionen χ, f, ab, ab_ϱ, so erhalten wir durch Entwickelung nach Potenzen von $z-\zeta$,

$$(9.)\ \begin{cases} L(\sigma,\zeta)=\dfrac{f'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{f(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}-\dfrac{\chi'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}-\dfrac{ab'(\sigma,\zeta)}{ab(\sigma,\zeta)}-\dfrac{ab'_1(\sigma.\zeta)}{ab_1(\sigma,\zeta)}-\dfrac{d\lg F_1(\sigma,\zeta)}{d\zeta}\\[2mm] \qquad\Big(\dfrac{d\lg F_1(\sigma,\zeta)}{d\zeta}=\dfrac{F_{11}(\sigma,\zeta)F_2(\sigma,\zeta)-F_1(\sigma,\zeta)F_{12}(\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta).F_1(\sigma,\zeta)}\Big).\end{cases}$$

Dies in die Congruenz (6.) des § 2 eingesetzt, führt zu dem Resultat:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Sigma t(\sigma,\zeta;\ s_{\mu,\zeta},\ z_{\mu,\zeta}) \equiv \dfrac{F_1(\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)} \sum\limits_{(k)} \dfrac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k} \dfrac{\chi(\sigma,\zeta;\ k)}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)} \\ + \dfrac{f'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{f(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)} - \dfrac{\chi'(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\ \sigma,\zeta)} + \tfrac{1}{2}\Sigma\tau_\mu^{(1,2)} - \dfrac{d\lg F_1(\sigma,\zeta)}{d\zeta} \\ + \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p-1} t(\sigma,\zeta;\ \varepsilon^{(\nu)}) - \dfrac{ab'(\sigma,\zeta)}{ab(\sigma,\zeta)} - \tfrac{1}{2}\dfrac{ab_1'(\sigma,\zeta)}{ab_1(\sigma,\zeta)} - \tfrac{1}{2}\dfrac{ab_2'(\sigma,\zeta)}{ab_2(\sigma,\zeta)}. \end{cases}$$

Darin könnte noch

$$\Sigma t(\sigma,\zeta;\ \varepsilon^{(\nu)}) - \tfrac{1}{2}\frac{ab'(\sigma,\zeta)}{ab(\sigma,\zeta)}$$

durch

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\varphi^{(0)}=0} t(\sigma,\zeta;\ s,z) - \tfrac{1}{2}\frac{d\lg\varphi^{(0)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta} + \tfrac{1}{2}\Sigma\tau_\mu$$

ersetzt werden, ν aber in u_ν ist willkürlich.

Multipliciren wir $t(\sigma,\zeta;\ s,z)$ mit $F_1(\sigma,\zeta)$ und setzen k für σ,ζ, so erhalten wir

$$t(s,z) = \frac{X(k)X(k)}{\varphi_\nu(k)} \frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k} + \text{Const.},$$

worin

$$X(k) = \lim F_1(\sigma,\zeta):\sqrt{\zeta-k},\quad \lim\zeta = k$$

ist. Dieser Grenzwerth lässt sich vollständig ausdrücken. Es ist nämlich

$$X(k) = \lim\frac{F_1(\sigma,\zeta)}{\sqrt{\zeta-k}} = 2\lim\Big(F_{12}(\sigma,\zeta) + F_{11}(\sigma,\zeta)\frac{d\sigma}{d\zeta}\Big)\sqrt{\zeta-k}\cdot$$

$$= 2\lim(F_{12}(\sigma,\zeta)F_1(\sigma,\zeta) - F_{11}(\sigma,\zeta)F_2(\sigma,\zeta))\sqrt{\zeta-k}:F_1(\sigma,\zeta) = -2F_{11}(k)F_2(k):X(k),$$

$$(11.)\quad X(k)X(k) = -2F_{11}(k)F_2(k),$$

woraus folgt:

$$(12.)\quad t(s,z) = -\frac{2F_{11}(k)F_2(k)}{\varphi_\nu(k)} \frac{\partial u_\nu(s,z)}{\partial k}.$$

Schreibt man zur Abkürzung v für $u(k) - \Sigma u(s_\mu, z_\mu)$, so ist

$$\Sigma\frac{\partial\lg\vartheta((v))}{\partial v_\mu}\varphi_\mu(k) = \Sigma t(s_\mu, z_\mu) + \text{Const.},$$

woraus man durch Vergleichung der beiderseitigen Periodicitätsmoduln die von mir im Wesentlichen schon Bd. 66 Seite 94 dieses Journals unter (3.) gegebene Relation erhält

$$\frac{\partial a_{\nu\mu}}{\partial k} = -\frac{\varphi_\nu(k)\varphi_\mu(k)}{F_2(k)F_{11}(k)}.$$

Wendet man den *Abel*schen Satz auf die oben definirte Function $\chi:(\zeta-z)F_1(s,z)$

an, indem man die Summe ihrer Werthe an solchen Stellen bildet, für welche

$$\xi(s,z) = \varphi(s,z):\varphi^{(1)}(s,z) = \xi$$

einen bestimmten Werth annimmt, so folgt

$$\sum_{(\xi)} \frac{\chi(\sigma,\zeta;\, s,z)}{(\zeta-z)F_1(s,z)} = \frac{\chi(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}\,\frac{d\lg\xi(\sigma,\zeta)-\xi}{d\zeta} + \sum_{(k)} \frac{\chi(\sigma,\zeta;\,k)}{(\zeta-k)F_{11}(k)}\,\frac{\xi_1(k)}{\xi(\sigma,\zeta)-\xi} + C,$$

worin ξ_1 für $\partial\xi:\partial\sigma$ gesetzt ist. Nimmt man darin einmal $\xi = 0$, ein andermal $\xi = \infty$ und bildet die Differenz, so erhält man die Beziehung

$$\sum_{\varphi=0} \frac{\chi(\sigma,\zeta;\, s,z)}{(\zeta-z)F_1(s,z)} - \sum_{\varphi^{(1)}=0} \frac{\chi(\sigma,\zeta;\, s,z)}{(\zeta-z)F_1(s,z)}$$

$$= \frac{\chi(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)}{F_1(\sigma,\zeta)}\left(\frac{d\lg\varphi^{(1)}(\sigma,\zeta)}{d\zeta} - \frac{d\lg\varphi(\sigma,\zeta)}{d\zeta}\right) + \sum_{(k)} \frac{\chi(\sigma,\zeta;\,k)}{(\zeta-k)F_{11}(k)}\left(\frac{\partial\lg\varphi^{(1)}(k)}{\partial s} - \frac{\partial\lg\varphi(k)}{\partial s}\right),$$

worin $\frac{\partial\lg\varphi(k)}{\partial s}$ für $\frac{\partial\lg\varphi(s,z)}{\partial s}$, $(s,z) = (k)$ geschrieben ist.

§ 4.

Resultat.

Nach unseren Festsetzungen ist

$$\frac{d\lg\vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta})))}{d\zeta} \equiv 0.$$

Daraus folgt, dass

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\lg\vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{d\zeta} \equiv \Sigma t(\sigma,\zeta;\, s_\mu, z_\mu) - \Sigma t(\sigma,\zeta;\, s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}) \\ &\equiv \Sigma t(\sigma,\zeta;\, s_\mu, z_\mu) - \frac{F_1(\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)} \sum_{(k)} \frac{\partial u_\nu(\sigma,\zeta)}{\partial k}\,\frac{\chi(\sigma,\zeta;\,k)}{(\zeta-k)\varphi_0(k)} \\ &+ \frac{\chi'(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)}{\chi(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)} - \frac{f'(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)}{f(\sigma,\zeta;\,\sigma,\zeta)} - \frac{d\lg F_1(\sigma,\zeta)}{d\zeta} + \frac{ab'(\sigma,\zeta)}{ab(\sigma,\zeta)} \\ &- \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} t(\sigma,\zeta;\, \varepsilon^{(\varrho)}) + \tfrac{1}{2}\frac{ab_1'(\sigma,\zeta)}{ab_1(\sigma,\zeta)} + \tfrac{1}{2}\frac{ab_2'(\sigma,\zeta)}{ab_2(\sigma,\zeta)} + \tfrac{1}{2}\Sigma\tau_\mu^{(1,2)} \end{aligned}\right.$$

sei, wobei $t(\sigma,\zeta;\, s_\mu, z_\mu)$ in der Form (7.) des § 3 gedacht ist, und die dortige Constante gleich Null genommen ist. Die in $\partial u_\nu:\partial k$ enthaltene Constante wird durch den Anfangswerth von u_ν gegeben gedacht. Schwierigkeiten und zwar algebraische macht hier nur noch die Construction der Function $f(\sigma,\zeta;\, s,z)$. Dieselbe lässt sich noch durch Anwendung von Functionen $\sqrt{ab_1.ab_2}$, $\sqrt{ab_3.ab_4}$, ... $\sqrt{ab_\mu.ab_\nu}$, wenn diese dieselbe Charakteristik wie $\sqrt{ab}$ haben, von dem Factor $\sqrt{ab_1.ab_2}$ befreien, und es lässt sich so das

erhaltene Resultat vereinfachen, was ich ein andermal für $p=3$ durchzuführen gedenke.

§ 5.
Zweiblättrige Flächen.

Der Fall zweiblättriger Flächen gewährt Erleichterungen, welche es nützlich erscheinen lassen, nicht auf die schon gefundenen Formeln zurückzugehen, sondern die Untersuchung selbständig durchzuführen.

Es sei

$$F(s, z) = ss - \varrho(z) = 0,$$

$$\varrho(z) = (z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)\dots(z-k_{2p+2}),$$

$$\varrho_1(z) = (z-k_1)(z-k_3)\dots(z-k_{2p+1}),\quad \varrho_2(z) = (z-k_2)(z-k_4)\dots(z-k_{2p+2}),$$

$$\varrho'(z) = \frac{d\varrho(z)}{dz},\quad \varrho_1'(z) = \frac{d\varrho_1(z)}{dz},\quad \varrho_2'(z) = \frac{d\varrho_2(z)}{dz},$$

und es werde für die Fläche T diejenige Reduction durch Querschnitte auf die einfach zusammenhängende T' angenommen, welche ich Bd. 71 dieses Journals auf Seite 204 beschrieben habe. Unter den möglichen Darstellungen des Integrales zweiter Gattung dürfte die folgende die einfachste sein:

$$t(\sigma, \zeta;\ s, z) = \frac{\sigma+s}{2(\zeta-z)s} + \sum_{(k)} \frac{\sigma}{(\zeta-k)\varphi_\nu(k)} \frac{\partial(u_\nu(s, z)-U_\nu)}{\partial k},$$

worin die Summe über sämmtliche Verzweigungspunkte auszudehnen ist, und U_ν zur Abkürzung für $u_\nu(k_{2p+2})$ geschrieben ist.

Aus der evidenten Congruenz

$$t(\sigma, \zeta;\ s, z) + t(\sigma, \zeta;\ -s, z) \equiv \frac{1}{\zeta-z}$$

folgt

$$2t(\sigma, \zeta;\ k) \equiv \frac{1}{\zeta-k}.$$

Nimmt man an, dass

$$t(\sigma, \zeta;\ k_{2p+2}) = \frac{1}{\zeta-k_{2p+2}},\ \text{also}\ t(\sigma, \zeta;\ k_{2p+1}) = \frac{1}{\zeta-k_{2p+1}}$$

sei, so sind die Systeme halber Periodicitätsmoduln, um die sich $t(\sigma, \zeta;\ k)$ in T' von $\frac{1}{2}:(\zeta-k)$ unterscheidet, in gleicher Weise zu bestimmen, wie die für die Integrale erster Gattung in der Tafel Bd. 71 dieses Journals Seite 206 bestimmt sind, wobei für $a_{\nu\mu}$ die Grösse $2du_\mu(\sigma, \zeta):d\zeta$, für $i\pi$ überall Null

eintritt. Die Function $\sqrt{\psi}$ lässt sich hier erheblich einfacher darstellen, als es im Allgemeinen der Fall ist. Aus der oben angezogenen Tafel folgt nämlich

$$((\Sigma u(k_{2\mu}) - u(k_{2p+2}))) \equiv ((0)), \quad \left(\left(\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} u(k_{2\varrho})\right)\right) \equiv ((u(k_{2p+2}) - u(k_{2p}))),$$

woraus sich ergiebt, dass die Function

$$\frac{e^{\Sigma h_\mu u_\mu(s,z)} \vartheta\left(\left(u(s,z) - u(\sigma,\zeta) - 2\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} u(k_{2\varrho})\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u(s,z) - u(\sigma,\zeta) - \sum_1^{p-1} u(k_{2\varrho})\right)\right)}$$

$$= c \cdot \frac{e^{\Sigma h_\mu u_\mu(s,z)} \vartheta((u(s,z) - u(\sigma,\zeta)))}{\vartheta\left(\left(u(s,z) - u(\sigma,\zeta) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} u(k_{2\varrho})\right)\right)} = \text{Const.} \sqrt{\psi}$$

dieselbe Charakteristik hat wie die Function

$$\frac{e^{\Sigma h_\mu u_\mu(s,z)} \vartheta\left(\left(u(s,z) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} u(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho) - u(k_{2p+2})\right)\right)}{\vartheta\left(\left(u(s,z) - \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p-1} u(\sigma_\varrho, \zeta_\varrho) - u(k_{2p})\right)\right)} = \text{Const.} \sqrt{\frac{z - k_{2p+2}}{z - k_{2p}}},$$

und hieraus fliesst die einfachere Darstellung von ψ:

$$\sqrt{\psi} = \text{Const.} \sqrt{\frac{z - k_{2p+2}}{z - k_{2p}}} \cdot \frac{s\varrho_2(\zeta) + \sigma\varrho_2(z)}{(z-\zeta)(z-k_2)(z-k_4)\dots(z-k_{2p-2})(z-k_{2p+2})}.$$

Die Nullpunkte $s_{\mu,\zeta}$, $z_{\mu,\zeta}$ stimmen überein mit den Nullpunkten der Function

$$\frac{s}{\varrho_2(z)} + \frac{\sigma}{\varrho_2(\zeta)} = \tau(s, z),$$

den Punkt $s, z = -\sigma, \zeta$ ausgenommen. Nach dem *Abel*schen Satze ist die über die Werthepaare s, z erstreckte Summe, für welche $\tau(s,z) = \tau$ ist,

$$\sum_{(\tau)} t(\sigma, \zeta; s, z) \equiv \frac{\tau'(\sigma,\zeta)}{\tau(\sigma,\zeta) - \tau} + C,$$

und also für $\tau = \infty$

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=p+1} t(\sigma, \zeta; k_{2\varrho}) \equiv C \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p+1} \frac{1}{\zeta - k_{2\varrho}},$$

und für $\tau = 0$

$$\left(\tau'(\sigma,\zeta) : \tau(\sigma,\zeta) = \tfrac{1}{2} \frac{d\lg(\sigma : \varrho_2(\zeta))}{d\zeta}\right)$$

$$\Sigma t(\sigma, \zeta; s_{\mu,\zeta}, z_{\mu,\zeta}) \equiv \tfrac{1}{4} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=2p+2} \frac{1}{\zeta - k_\varrho} - t(\sigma, \zeta; -\sigma, \zeta)$$

$$\equiv \tfrac{1}{4} \sum_{(k)} \frac{1}{\zeta - k} - \sum_{(k)} \frac{\sigma}{\zeta - k} \frac{\partial(u_\nu(\sigma,\zeta) - U_\nu)}{\partial k . \varphi_\nu(k)}.$$

Somit gewinnt man die Gleichung

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\lg\vartheta((u(\sigma,\zeta)-\Sigma u(s_\mu, z_\mu)))}{d\zeta} \\ &\equiv \Sigma t(\sigma,\zeta;\, s_\mu, z_\mu) + \sum_{(k)}\left\{\frac{\sigma}{\zeta-k}\frac{\partial(u_\nu(\sigma,\zeta)-U_\nu)}{\varphi_\nu(k)\partial k} - \frac{1}{4}\frac{1}{\zeta-k}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man mit 2σ, setzt (k) für (σ,ζ) und v_ν für $u_\nu(k)-\Sigma u_\nu(s_\mu, z_\mu)$, so fliesst daraus die Beziehung

$$(15.)\quad \Sigma\frac{\partial\lg\vartheta((v))}{\partial v_\mu}\varphi_\mu(k) \equiv \frac{2\varrho'(k)}{\varphi_\nu(k)}\left\{\Sigma\frac{\partial u_\nu(s_\mu, z_\mu)-U_\nu}{\partial k} - \frac{\partial([u_\nu(k)]-U_\nu)}{\partial k}\right\},$$

worin die Klammern [] bedeuten, dass der vollendete Werth zu integriren ist. Die Formel (15.) habe ich in etwas modificirter Bezeichnung schon Bd. 71 dieses Journals auf Seite 213 gegeben.

Jena, December 1881.

Ueber das Strahlensystem zweiter Classe sechster Ordnung von der ersten Art.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Die algebraischen Strahlensysteme zweiter Ordnung ohne Brenncurven wurden bereits in einer früheren Arbeit *) der synthetischen Geometrie zugänglich gemacht und mit deren Hülfsmitteln eingehend untersucht; nur die erste Art der Strahlensysteme zweiter Ordnung sechster Classe blieb noch ausgeschlossen. Wir wollen nun jene Untersuchung vervollständigen, indem wir zeigen, dass dieses noch übrige Strahlensystem zweiter Ordnung nebst denjenigen fünfter, vierter, dritter und zweiter Classe durch zwei collineare Flächen zweiter Classe erzeugt werden kann, und sodann aus dieser Erzeugungsart die durch Herrn *Kummer* **) bekannten sowie andere neue Eigenschaften des Systemes ableiten. Zu den letzteren gehört die für dieses System erster Art charakteristische, dass die sechs in einer Ebene liegenden Strahlen desselben allemal einen Kegelschnitt berühren, und dass das System in einem tetraedralen Strahlencomplexe zweiten Grades enthalten ist. Der Anschaulichkeit wegen betrachten wir analog wie in der erwähnten Arbeit nicht das Strahlensystem selbst, sondern das zu ihm reciproke, von welchem bekanntlich ***) das System der Normalen eines Ellipsoides einen merkwürdigen Specialfall bildet.

1. Zwei collineare Räume Σ_1, Σ_2 erzeugen, wie anderswo †) nachgewiesen ist, einen tetraedralen Strahlencomplex zweiten Grades. Derselbe besteht aus den Verbindungslinien homologer Punkte der Räume und zugleich aus allen Strahlen des einen Raumes, welche die ihnen entsprechenden

*) Dieses Journal Bd. 86, S. 84.

**) *Kummer,* algebraische Strahlensysteme (Abhandlungen d. Berl. Akad. 1866) § 11, S. 94—102.

***) *Kummer* a. a. O. S. 101.

†) *Reye,* Geometrie der Lage, 2. Abth., Vortrag 18 der zweiten Auflage.

Strahlen des anderen schneiden. Die entsprechend gemeinschaftlichen Elemente der collinearen Räume sind die Flächen, Kanten und Eckpunkte eines reellen oder imaginären Tetraeders; alle durch einen beliebigen Punkt gehenden Strahlen des Complexes aber bilden eine diesem „Haupttetraeder" umschriebene Kegelfläche zweiter Ordnung. Ein Complexkegel, dessen Mittelpunkt in einer Tetraederfläche liegt, zerfällt in diese „Hauptebene" und eine durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (Hauptpunkt) gehende Ebene. Die vier Hauptebenen werden von je zwei Complexstrahlen in projectiven Punktreihen geschnitten; die vier Hauptpunkte werden aus den Complexstrahlen durch projective Ebenenbüschel projicirt.

2. Es giebt unendlich viele zu Σ_1 collineare Räume Σ, welche durch ihre homologen Punkte sowohl mit einander als auch mit Σ_1 und Σ_2 den tetraedralen Complex erzeugen. In denselben entsprechen einem beliebigen Punkte von Σ_1 die Punkte eines Complexstrahles *), folglich einer beliebigen Geraden von Σ_1 die Strahlen einer Regelschaar, deren Leitschaar dem Complexe angehört, und zwei beliebigen Punkten (oder Geraden) die Elemente von zwei projectiven Punktreihen (resp. Regelschaaren). Einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung F_1^2 des Raumes Σ_1 entspricht in Σ_2 sowie in jedem der Räume Σ eine zu ihr collineare Fläche F_2^2 resp. F^2; umgekehrt können zwei collineare Flächen zweiter Ordnung allemal als homologe Flächen collinearer Räume aufgefasst werden, deren collineare Beziehung durch diejenige der beiden Flächen völlig bestimmt ist. — Die zerfallenden tetraedralen Complexe schliessen wir im Folgenden aus.

3. Zwei collineare Flächen zweiter Ordnung F_1^2 und F_2^2 erzeugen mittelst ihrer homologen Punkte ein Strahlensystem [a], welches in einem tetraedralen Complexe enthalten ist und auf doppelt unendlich viele Arten durch zwei collineare F^2 erzeugt werden kann (2.). Dasselbe ist von der zweiten Classe. Denn die Schnittlinie $\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ von zwei homologen Ebenen ε_1 und ε_2 der collinearen Räume Σ_1 und Σ_2 hat mit F_1^2 im Allgemeinen und höchstens zwei Punkte P_1, Q_1 gemein, und die beliebige Ebene ε_2 enthält vom Systeme [a] nur die beiden Strahlen, welche diese Punkte mit den ihnen entsprechenden Punkten von F_2^2 verbinden. Wenn $\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ eine Tangente von F_1^2 ist, so fallen die Punkte P_1, Q_1 und damit auch die beiden in ε_2

*) *Reye* a. a. O. Seite 144; vgl. die Arbeit über collineare Grundgebilde in diesem Journal Bd. 74 S. 13 (1871).

liegenden Strahlen des Systemes zusammen; alsdann ist ε_2 eine Berührungsebene der „Brennfläche" von $[a]$. Nun beschreibt aber, wenn ε_2 sich um irgend eine Axe dreht, die Gerade $\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ eine Regelschaar, und von dieser berühren im Allgemeinen und höchstens vier Strahlen *) die Fläche F_1^2. Die Brennfläche Φ^4 des Strahlensystemes $[a]$ ist demnach von der vierten Classe.

4. Eine Gerade g_1 von Σ_1 gehört nur dann zu dem Strahlensystem $[a]$, wenn sie von der entsprechenden Geraden g_2 des Raumes Σ_2 in einem Punkte der Fläche F_2^2 geschnitten wird. Wenn nun g_1 einen Complexkegel S_1 beschreibt, so beschreibt auch g_2 einen Complexkegel S_2, welcher mit dem ersteren den Strahl $\overline{S_1 S_2}$ gemein hat (1.); der Punkt $g_1 g_2$ beschreibt folglich eine Raumcurve dritter Ordnung, und weil diese mit F_2^2 im Allgemeinen sechs Punkte gemein hat, so ergiebt sich: Das Strahlensystem $[a]$ ist von der sechsten Ordnung; die sechs durch einen Punkt S_1 gehenden Strahlen desselben liegen in einer Kegelfläche zweiter Ordnung, welche dem tetraedralen Complex angehört und dessen Haupttetraeder umschrieben ist.

5. Das Strahlensystem $[a]$ zweiter Classe sechster Ordnung ist von der ersten Art, weil es die sechs Kanten des Haupttetraeders zu Doppelstrahlen hat. Da nämlich jede dieser Kanten in den collinearen Räumen sich selbst entspricht, so verbindet sie die beiden Punkte, welche sie mit F_1^2 gemein hat, mit den entsprechenden zwei Punkten von F_2^2. Das Strahlensystem ist das allgemeinste dieser Art, weil es ebenso wie das von Herrn *Kummer* entdeckte reciproke System **) von 22 willkürlichen Parametern abhängt. Freilich sind die beiden erzeugenden F^2 erst durch 18 und ihre collineare Beziehung durch weitere 6 Parameter bestimmt; dennoch aber giebt es nicht 24-fach, sondern nur 22-fach unendlich viele derartige Strahlensysteme, weil jedes derselben durch zweifach unendlich viele Paare collinearer F^2 erzeugt wird (3.). — Die vier Flächen α des Haupttetraeders

---

*) Construirt man nämlich von jedem Punkte P der Axe die Polarebene bezüglich F_1^2, so liegt deren Schnittpunkt mit dem durch P gehenden Strahle der Regelschaar auf einer Raumcurve dritter Ordnung, welche mit F_1^2 im Allgemeinen sechs Punkte gemein hat. Zwei dieser Punkte liegen auf der Axe selbst; in den vier übrigen wird F_1^2 von Strahlen der Regelschaar berührt.

**) Die *Kummer*schen Gleichungen (23.) und (24.) dieses Systemes (a. a. O. S. 99) enthalten dreizehn Constanten, welche sich wegen $\delta + \delta_1 + \delta_2 = 0$ auf zwölf reduciren; von diesen aber können zwei, etwa δ_1 und $\varkappa$, durch Division beseitigt oder auch gleich Eins gesetzt werden. Zu den zehn übrigen kommen noch die zwölf Coordinaten der vier Hauptpunkte (der ersten vier Knotenpunkte).

sind singuläre Ebenen des Strahlensystemes $[a]$ und mögen die „Hauptebenen“ desselben heissen; jede von ihnen enthält einen Strahlenbüschel vierter Ordnung von $[a]$. Nämlich jede dieser sich selbst entsprechenden Ebenen α schneidet die collinearen F^2 in homologen Kegelschnitten, welche jenen Strahlenbüschel erzeugen; letzterer hat drei Kanten des Tetraeders zu Doppelstrahlen.

6. Wir wollen nunmehr annehmen, die Flächen F_1^2, F_2^2, also auch die zu ihnen collinearen F^2 seien Regelflächen zweiter Ordnung. Dann bilden ihre homologen Regelschaaren zwei andere Strahlensysteme $[b]$ und $[c]$, welche zu einander und zu $[a]$ in eigenthümlichen Beziehungen stehen. Nämlich jede der erwähnten Regelschaaren von $[b]$ ist die Leitschaar einer Regelschaar von $[c]$, indem sie mit ihr auf einer der collinearen F^2 liegt. Andererseits bildet jede Gerade b oder c der Fläche F_1^2 mit den ihr entsprechenden Geraden der collinearen F^2 eine Regelschaar, deren Leitschaar dem Systeme $[a]$ angehört (2.). Jedes der drei Strahlensysteme $[a]$, $[b]$, $[c]$ kann also auf zweifache Art durch eine Regelschaar so beschrieben werden, dass deren Leitschaar zugleich das eine oder das andere von den beiden übrigen Systemen beschreibt; und zwar geht dabei die Regelschaar durch jeden einfachen Strahl des Systemes einmal. So oft nun von der veränderlichen Regelschaar ein Strahl durch einen Punkt P geht oder in einer Ebene π liegt, ebenso oft geht durch P oder liegt in π auch ein Leitstrahl derselben. Die Strahlensysteme $[b]$ und $[c]$ sind demnach ebenso wie $[a]$ von der zweiten Classe und der sechsten Ordnung; auch haben sie dieselbe Brennfläche Φ^4 wie $[a]$, weil jede Berührungsebene von Φ^4 zwei zusammenfallende Strahlen von $[a]$ und folglich auch zwei zusammenfallende von $[b]$ resp. $[c]$ enthält.

7. Die zu $[c]$ gehörige Regelschaar der Fläche F_1^2 wird von ihren Leitstrahlen b in projectiven Punktreihen geschnitten, und letztere erzeugen mit den entsprechenden Punktreihen von F_2^2 projective Regelschaaren des Strahlensystemes $[a]$; aber auch die Leitschaaren dieser Regelschaaren sind projectiv, weil sie den Geraden b in den collinearen Räumen Σ entsprechen (2.). Durch die projectiven Schaaren werden aber die Flächen zweiter Ordnung, auf welchen die Schaaren paarweise liegen, collinear auf einander bezogen*), und jeder Strahl des Systemes $[c]$ verbindet homologe

*) *v. Staudt,* Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnb. 1856, S. 6; vgl. *Reye,* Geom. der Lage II, S. 26.

Punkte dieser Flächen, weil er homologe Strahlen ihrer Regelschaaren schneidet (6.). Wie [a], so kann also auch das System [c] und ebenso [b] durch collineare F^2 erzeugt werden. Die vier Hauptebenen von [b] resp. [c] bezeichnen wir mit β resp. γ; dieselben sind ebenso, wie die vier Hauptebenen α von [a], gemeinschaftliche singuläre Ebenen der drei Strahlensysteme [a], [b], [c], weil sie von einem und folglich von jedem dieser Systeme unendlich viele Strahlen enthalten.

8. Jede singuläre Ebene des Systemes [a] enthält unendlich viele Paare homologer Punkte von F_1^2 und F_2^2; sie schneidet folglich diese beiden collinearen Flächen entweder in zwei homologen Kegelschnitten oder in zwei homologen Geraden. Im ersteren Falle ist sie eine Hauptebene α und enthält einen Strahlenbüschel vierter Ordnung von [a]; im letzteren ist sie eine der acht Ebenen β und γ, und enthält einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung des Systemes. Dass die beiden Regelschaaren der Fläche F_1^2 in der That je vier reelle oder imaginäre Strahlen enthalten, welche die ihnen entsprechenden Strahlen von F_2^2 schneiden, ist leicht zu beweisen. Projicirt man nämlich eine dieser Regelschaaren aus zwei ihrer Leitstrahlen durch Ebenenbüschel, so erzeugen diese mit der entsprechenden Regelschaar von F_2^2 zwei Raumcurven dritter Ordnung, welche im Allgemeinen und höchstens vier Punkte gemein haben, und in jedem dieser Punkte schneiden sich zwei homologe Strahlen der Regelschaaren. — Jede der vier Ebenen β schneidet die collinearen F^2 in homologen Geraden c, welche mit den Verbindungslinien ihrer homologen Punkte einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung angehören. Von den sich selbst entsprechenden vier Ebenen α werden diese Geraden c in homologen Punkten geschnitten, ebenso aber von den vier Ebenen γ, weil letztere die collinearen F^2 gleichfalls in homologen Geraden schneiden.

9. Die vier singulären Ebenen β enthalten demnach je einen Strahlenbüschel vierter Ordnung mit drei Doppelstrahlen von [b], und je einen gemeinschaftlichen Strahlenbüschel zweiter Ordnung der Systeme [c] und [a]; diese Büschel aber haben mit den acht Ebenen γ und α je einen Strahl gemein (8.). Analoges gilt von den singulären Ebenen γ und α. Die acht Ebenen β und γ sind gemeinschaftliche Berührungsebenen der collinearen F^2, weil sie dieselben in je zwei Geraden schneiden; sie bilden eine Gruppe associirter Ebenen, und durch sieben von ihnen ist die achte bestimmt. Ebenso bilden die acht Ebenen γ und α oder α und β eine

Gruppe associirter Ebenen. Von den zwölf Ebenen α, β, γ schneidet jede die acht anders bezeichneten in acht Tangenten eines Kegelschnittes. Sind die vier α und irgend drei β beliebig gegeben, so ist die vierte Ebene β eindeutig bestimmt, und die vier γ liegen in einem gewissen Ebenenbüschel sechster Ordnung; wird in diesem eine der vier γ beliebig angenommen, so sind in den vier β die vier Kegelschnitte durch je fünf Tangenten bestimmt, die vier γ aber sind die vier von den α verschiedenen Ebenen, welche drei dieser Kegelschnitte zugleich berühren. Den Nachweis, dass jene Annahmen zulässig und dass durch sie das System $[a]$ und der zugehörige tetraedrale Complex eindeutig bestimmt sind, unterdrücken wir der Kürze wegen.

10. Bekanntlich liegen die Pole einer Ebene in Bezug auf confocale Flächen zweiter Ordnung auf einer zur Ebene normalen Geraden; diese Pole aber beschreiben collineare F^2 und ihre Verbindungslinie beschreibt das Normalensystem von einer der confocalen Flächen, wenn die Ebene diese Fläche einhüllt. Die Normalen einer Fläche zweiter Ordnung bilden demnach ein Strahlensystem zweiter Classe sechster Ordnung von der ersten Art, jedoch ein sehr specielles: dasselbe hängt nämlich nicht von 22, sondern nur von 9 willkürlichen Parametern ab.

11. Wenn zwei collineare Flächen zweiter Ordnung n Punkte entsprechend gemein haben, so zerfällt das von ihnen erzeugte Strahlensystem $[a]$ in die n Strahlenbündel, deren Centra diese n Punkte sind, und ein Strahlensystem zweiter Classe $(6-n)^{\text{ter}}$ Ordnung. Auch aus der zuerst citirten Arbeit ergiebt sich leicht, dass die Strahlensysteme zweiter Classe fünfter, vierter, dritter oder zweiter Ordnung durch collineare F^2 erzeugt werden können. Legt man nämlich durch zwei Knotenpunkte eines F^2-Gebüsches Ebenen, so entsprechen denselben a. a. O. Flächen zweiter Ordnung; letztere aber werden collinear auf einander bezogen, wenn man die Ebenen aus einem dritten Knotenpunkte des Gebüsches perspectiv auf einander bezieht.

Strassburg i. E., den 19. Novbr. 1881.

Erweiterung eines Satzes von *Hesse* über Sechsecke im Raume.

(Von Herrn *Fr. Graefe* in Darmstadt.)

Herr *S. Gundelfinger* theilt im „Journal für reine und angewandte Mathematik" Bd. 85 p. 312 folgenden von *Hesse* hinterlassenen Satz mit:

„Wenn im Raume irgend ein Sechseck U und ein Punkt U_0 gegeben ist, und wenn man (durch U_0) drei gerade Linien zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks paarweise schneiden, so sind die Schnittpunkte auf den aufeinanderfolgenden Seiten des Sechsecks U die aufeinanderfolgenden Ecken eines *Brianchon*schen Sechsecks V, dem der *Brianchon*sche Punkt U_0 zugehört. Das einbeschriebene Sechseck V bestimmt unzweideutig ein Hyperboloid, auf dem es liegt. Dieses Hyperboloid wird von den Seiten des gegebenen Sechsecks U überdies noch in sechs Punkten geschnitten, die in derselben Reihenfolge die Ecken eines zweiten, dem gegebenen einbeschriebenen und auf dem Hyperboloide liegenden *Brianchon*schen Sechsecks V mit einem *Brianchon*schen Punkte U_7."

Das im Raume gegebene Sechseck U werde von den Geraden durch U_0 in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 so geschnitten, dass das Sechseck 1 2 3 4 5 6 ein *Brianchon*sches Sechseck ist. Es existiren aber dann noch die drei *Brianchon*schen Sechsecke:

$$\left.\begin{matrix} 1\ 5\ 3\ 4\ 2\ 6 \\ 1\ 5\ 6\ 4\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3 \end{matrix}\right\} \text{ mit demselben } \textit{Brianchon}\text{schen Punkte } U_0,$$

und man hat den Satz:

„Wenn im Raume irgend ein Sechseck U und ein Punkt U_0 gegeben ist, und wenn man drei gerade Linien (durch U_0) zieht, welche die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks paarweise schneiden, so sind durch

die Schnittpunkte auf den aufeinanderfolgenden Seiten des Sechsecks U die aufeinanderfolgenden Ecken eines *Brianchon*schen Sechsecks

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ (V)$$

bestimmt, wie die *Brianchon*schen Sechsecke

$$1\ 5\ 3\ 4\ 2\ 6\ (V_1),\quad 1\ 5\ 6\ 4\ 2\ 3\ (V_2),\quad 1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3\ (V_3),$$

welchen der *Brianchon*sche Punkt U_0 zugehört. Jedes der einbeschriebenen Sechsecke bestimmt unzweideutig ein Hyperboloid, auf dem es liegt. Jedes Hyperboloid wird von den Seiten des gegebenen Sechsecks überdies noch in sechs Punkten geschnitten, die in derselben Reihenfolge die Ecken eines zweiten, dem gegebenen einbeschriebenen und auf dem Hyperboloide liegenden *Brianchon*schen Sechsecks V mit einem *Brianchon*schen Punkte U_7 bilden. Dieses zweite *Brianchon*sche Sechseck I II III IV V VI auf einem Hyperboloide bestimmt noch die drei weiteren *Brianchon*schen Sechsecke:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I V III IV II VI} \\ \text{I V VI IV II III} \\ \text{I II VI IV V III} \end{array}\right\} \text{ mit dem } \textit{Brianchon}\text{schen Punkte } U_7.$$

Man erhält also acht *Brianchon*sche Sechsecke, vier Hyperboloide und zwei *Brianchon*sche Punkte; je zwei *Brianchon*sche Sechsecke liegen auf einem Hyperboloide."

Darmstadt, 20. Januar 1882.

Ueber den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen.

(Von Herrn *C. Kostka* in Insterburg.)

Folgende drei Formen von ganzen, homogenen und symmetrischen Functionen der Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ sollen hier in Betracht gezogen werden:

$$\text{(I.)} \qquad T_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}} = \Sigma t_1^{\alpha_0} t_2^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_{n-1}},$$

wo die übrigen Glieder der Summe durch die verschiedenen Permutationen der Exponenten entstehen;

$$\text{(II.)} \qquad K_{\beta_0\beta_1\dots\beta_{r-1}} = c_{\beta_0} c_{\beta_1} \dots c_{\beta_{r-1}},$$

wobei c_β die Summe der Combinationen von $t_1, \dots t_n$ zur β^{ten} Klasse ohne Wiederholung bedeutet, also $c_0 = 1$ ist;

$$\text{(III.)} \qquad C_{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{r-1}} = |c_\lambda c_{\lambda+1} \dots c_{\lambda+r-1}|,$$

wo die Grösse rechts eine Determinante r^{ten} Grades vorstellt, deren h^{te} Zeile aus der hingeschriebenen dadurch erhalten wird, dass $\lambda_{h-1} - h + 1$ an die Stelle von λ tritt. Jedes c, dessen Index negativ oder grösser als n, ist als verschwindend anzusehen; also darf kein λ grösser als n sein, wenn C einen Werth haben soll. Die Reihe der λ ist absteigend geordnet zu denken, und C würde verschwinden, sobald ein λ_h um 1 kleiner als das nächstfolgende ist. — In allen drei Fällen wird gelegentlich eine Reihe von gleichen Indices symbolisch in Form einer Potenz zusammengefasst, z. B. statt der Indexreihe 44111 die andere $4^2 1^3$ geschrieben; auch wird der Index 0 in der Regel fortgelassen.

Wenn gefordert wird, eine dieser drei Functionsformen in eine der andern überzuführen, so sind damit im ganzen sechs Aufgaben gestellt. Am bekanntesten ist davon diejenige, bei welcher ein T durch ein Aggregat der K ausgedrückt werden soll, oder, um kurz zu reden, die Aufgabe T, K; denn auf sie beziehen sich die oft genannten Arbeiten von *Waring, Gauss,*

Cauchy, Borchardt, sowie neuerdings die von Herrn *Kronecker**). Von der Aufgabe *K, T* ist der besondere Fall des polynomischen Satzes allgemein geläufig. Für die Praxis sind von *Meyer Hirsch***) und Herrn *Cayley****) Tafeln berechnet, welche für die ersten zehn Dimensionen die Beziehungen zwischen den *K* und *T* angeben. Die Frage, wie die Entwickelung der *C* nach den *K* sich gestaltet, ist berührt in einer Arbeit, in welcher Herr *Naegelsbach* mehrfache Umformungen und Anwendungen der *C* dargelegt hat†). Der Zusammenhang zwischen den *C* und *T* ist in zwei Aufsätzen untersucht, welche ich im 81. u. 82. Bande dieses Journals veröffentlicht habe. An die letztern beiden Arbeiten schliesst sich eng die vorliegende an, indem sie einige weitere Resultate vorführt, welche auf dem dort eingeschlagenen Wege erreicht werden können. Nach der Reduction des allgemeinen Problems (§ 1) werden die Aufgaben *C, T* und *K, C* sowie namentlich eine combinatorische Hülfsaufgabe genauer behandelt, deren Lösungszahlen eine bemerkenswerthe Verwandtschaft mit den figurirten Zahlen zeigen (§ 2 bis 6). An Bemerkungen über die Aufgaben *T, C* und *C, K* (§ 7) schliesst sich der Nachweis, dass die Resultate der vier soeben genannten Aufgaben in einer einzigen bequem zu konstruirenden Quadrattafel für jede Dimension vereinigt werden können (§ 8). Wenige Worte über *T, K* und *K, T* bilden den Schluss der Abhandlung, in welcher also hauptsächlich die Beziehungen der *C* zu den andern beiden Functionsformen besprochen werden. Zur leichtern Vergleichung dieser Arbeit mit meinen früheren, auf welche ich mich mehrfach beziehe, sei bemerkt: In Bd. 82 und hier ist c_h an Stelle von $(-1)^h a_{n-h}$ in Bd. 81 gesetzt. Ferner sind in Bd. 82 Determinanten *C* von etwas allgemeinerem Bau untersucht; daher war dort eine ausführlichere Bezeichnung nothwendig. Den Zusammenhang zeigt die Gleichung:

$$C_{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{r-1}} = C_{\left|\begin{smallmatrix}\lambda_0 & \lambda_0+1 & \dots & \lambda_0+r-1 \\ 0 & \lambda_0+1-\lambda_1 & \dots & \lambda_0+r-1-\lambda_{r-1}\end{smallmatrix}\right|}.$$

Endlich ist in der weiteren Untersuchung statt i im Bd. 82 hier m und für $i-i_1$ ist m_1 gesetzt, sowie für eine figurirte Zahl das Zeichen $\binom{m}{\lambda}$, nicht, wie früher, m_λ gewählt.

---

*) Monatsbericht der Berl. Akad. v. Novbr. 1880.

**) Sammlg. v. Aufgaben aus d. Theorie d. algebr. Gleichungen. Berlin 1809.

***) Phil. Transact. London 1857 p. 494 ff.

†) Ueber eine Klasse symmetrischer Functionen. Zweibrücken 1871.

1.

Im Folgenden spielt der Begriff conjugirter Indexreihen eine wichtige Rolle, wie er für das Gebiet der symmetrischen Functionen von Herrn *Cayley* eingeführt ist*). Zu der Reihe von Indices

$$\lambda_0, \quad \lambda_1, \quad \dots \quad \lambda_{r-1},$$

welche nach der Grösse absteigend geordnet sind, wird die conjugirte Reihe

$$r^{\lambda_{r-1}}(r-1)^{\lambda_{r-2}-\lambda_{r-1}} \dots 2^{\lambda_1-\lambda_2} 1^{\lambda_0-\lambda_1}$$

(wo die Exponenten andeuten, wie oft die betreffende Grundzahl als Index zu setzen ist) dadurch erhalten, dass man in die erste Zeile λ_0 Einheiten, in die h^{te} zuerst λ_{h-1} Einheiten, dann $\lambda_0-\lambda_{h-1}$ Nullen setzt und colonnenweise addirt. Z. B. sind 5311 und 42211 conjugirte Zahlenreihen. Zwei C werden selbst conjugirt genannt, wenn ihre Indexreihen es sind.

Noch eine Bemerkung schicke ich vorauf. Die Anzahl der Variabeln t ist für die hier anzustellenden Betrachtungen fast vollständig gleichgültig. Aus einer bestimmten Entwickelung wird ein T jedesmal herausfallen, wenn die Anzahl seiner Indices, ein K oder C dann, wenn der Werth seines höchsten Index die Zahl n überschreitet. Dies findet aber dadurch seine vollständige Erklärung, dass einige t, welche als Factoren vor jene T, K, C vorgezogen werden können, als verschwindend anzusehen sind; die Zahlencoefficienten, welche jenen Functionen in der betreffenden Entwickelung bei hinreichender Anzahl der t zukommen würden, werden davon gar nicht berührt. Man darf demnach die Zahl n stets grösser oder auch ebenso gross als die Anzahl der Indices desjenigen T oder als den höchsten Index des K oder C annehmen, dessen Factor in einer bestimmten Entwickelung man zu ermitteln wünscht.

Im 81. Bande dieses Journals S. 282 ff., wozu man noch Bd. 82 S. 213 f. vergleichen möge, ist eine Regel abgeleitet, nach welcher man den Factor von

$$C_{r^{\lambda_{r-1}}(r-1)^{\lambda_{r-2}-\lambda_{r-1}}\dots 2^{\lambda_1-\lambda_2} 1^{\lambda_0-\lambda_1}}$$

in der Entwickelung von

$$T_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$$

ermitteln kann. Man betrachte die Indices in der ersten Colonne von C; sie sind

$$r, \; r-1, \; \dots \; r-\lambda_{r-1}+1, \; r-\lambda_{r-1}-1, \; \dots \; r-\lambda_{r-2}, \; r-\lambda_{r-2}-2, \; \dots \; 2-\lambda_0;$$

*) l. c. p. 491.

man vergleiche diese Zahlenreihe mit der vollständigen

$$r, \quad r-1, \quad \ldots \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots \quad -\lambda_0+1,$$

so fehlen in jener die Indices

$$r-\lambda_{r-1}, \quad r-1-\lambda_{r-2}, \quad \ldots \quad 2-\lambda_1, \quad 1-\lambda_0,$$

und zieht man alle von r ab, so erhält man

$$\lambda_{r-1}, \quad \lambda_{r-2}+1, \quad \ldots \quad \lambda_1+r-2, \quad \lambda_0+r-1.$$

So oft nun diese Zahlenreihe in irgend einer Ordnung durch Addition von

$$0, \quad 1, \quad \ldots \quad r-1$$

in dieser bestimmten Reihenfolge und

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots \quad \alpha_{r-1}$$

in beliebiger Folge, wobei $r-m$ der α Nullen sind, erhalten werden kann, ebenso oft kommt die obengenannte Determinante in der Entwickelung von $T_{\alpha_0 \ldots \alpha_{m-1}}$ vor und zwar mit dem positiven oder negativen Vorzeichen in den einzelnen Fällen, je nachdem die Anzahl der Inversionen der betreffenden Permutation von $\lambda_{r-1}, \lambda_{r-2}+1, \ldots \lambda_0+r-1$ gerade oder ungerade ist.

Andrerseits kann die Determinante

$$C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{r-1}}$$

repräsentirt werden durch die Zeilenindices

$$\lambda_{r-1}, \quad \lambda_{r-2}+1, \quad \ldots \quad \lambda_0+r-1$$

und die Colonnenindices

$$0, \quad 1, \quad \ldots \quad r-1.$$

Die einzelnen Glieder der Determinante entstehen, indem man die letztere Reihe von der beliebig permutirten ersteren abzieht (vgl. Bd. 82 S. 227), und zwar hat das betreffende Glied das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Anzahl der Inversionen in der oberen Zahlenreihe gerade oder ungerade ist. So oft hierbei die Zahlen $\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}$ in irgend einer Stellung als Resultat sich ergeben, ebenso oft kommt das Glied $c_{\alpha_0} c_{\alpha_1} \ldots c_{\alpha_{m-1}}$ in der entwickelten Determinante vor, jedesmal mit dem geeigneten Vorzeichen. Hierdurch ist der Satz bewiesen:

1) Der Factor von $K_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$ in der Entwickelung eines C ist identisch mit dem Factor des conjugirten C in dem Ausdruck für $T_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}}$.

Ferner denke man sich für irgend eine Dimension sämmtliche T nach den C entwickelt, so ergiebt sich eine Reihe von linearen Gleichungen,

welche ebenso viel Unbekannte C enthalten, als Gleichungen vorhanden sind (vgl. Bd. 82, S. 215). Die Entwickelung der C nach den K giebt ein ähnliches Gleichungssystem, bei welchem die Zahlen der h^{ten} Zeile mit denjenigen der h^{ten} Colonne des früheren Systems übereinstimmen in Folge des eben bewiesenen Satzes. Dass die Determinante dieser Systeme gleich 1 ist, lässt sich aus den Betrachtungen in Bd. 81 leicht folgern; doch davon abgesehen, liegt es in der Natur der Sache, dass die Auflösung beider Systeme ein bestimmtes Resultat ergeben muss; und zwar haben nach den bekannten Regeln einer solchen Auflösung die beiden neu entstehenden Systeme dieselbe Beziehung zu einander, wie die alten, dass nämlich die Zahlen in der h^{ten} Zeile des einen sich in gleicher Folge in der h^{ten} Colonne des anderen finden. Daher der Satz:

2) Der Factor eines C in dem Ausdruck für $K_{\alpha_0\ldots\alpha_{m-1}}$ stimmt überein mit dem Factor von $T_{\alpha_0\ldots\alpha_{m-1}}$ in der Entwickelung des conjugirten C.

Diesen beiden Sätzen füge ich sogleich noch zwei andere hinzu, welche schon vor längerer Zeit von Herrn *Cayley* aufgestellt, aber nur durch Induction für die ersten zehn Dimensionen bewiesen sind*). Sie lauten:

3) Der Coefficient von $T_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}$ in der Entwickelung von $K_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{r-1}}$ ist identisch mit dem Factor von $T_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{r-1}}$ in dem Ausdruck für $K_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}$.

4) Der Factor von $K_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}$ in der Entwickelung von $T_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{r-1}}$ stimmt überein mit dem Coefficienten von $K_{\beta_0\beta_1\ldots\beta_{r-1}}$ in dem Ausdruck für $T_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}}$.

Das Wesentliche für den Beweis von 3) ist schon in Bd. 82 (vgl. S. 218, Anm.) gegeben. Aus den dortigen Betrachtungen geht nämlich hervor, dass der Factor eines T in der Entwickelung von K gefunden werden kann durch Lösung der Aufgabe: In ein System von r Zeilen und m Colonnen sollen auf jede mögliche Art $\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1}=\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_{r-1}=\mu$ Einheiten und $rm-\mu$ Nullen so eingefügt werden, dass die Summen der Zahlen in den einzelnen Zeilen der Reihe nach $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{m-1}$, die in den Colonnen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}$ betragen; im übrigen ist die Zahlenanordnung willkürlich. Die Anzahl aller möglichen derartigen Gruppirungen ist für jeden der beiden in 3) erwähnten Fälle der gesuchte Zahlenfactor. — Der

*) l. c. p. 492 f. Einen Beweis beider Sätze hat — in ganz anderer Art als hier — Herr *Betti* geliefert; *Tort.* Ann. Jahrg. 1858 p. 323 f.

Satz 4) folgt dann aus 3) ähnlich wie 2) aus 1). Setzt man nämlich für irgend eine Dimension das vollständige Gleichungssystem zwischen den K und T an, so sind in dessen Determinante (die selbstverständlich nicht Null sein kann, in der That gleich 1 ist) die zur Diagonalreihe symmetrisch stehenden Glieder einander gleich in Folge von 3), falls man richtig anordnet. Dieselbe Eigenschaft besitzt dann bekanntlich auch die Determinante des adjungirten Systems, welches durch Auflösung des vorigen entsteht.

Das gestellte Problem ist durch diese vier Sätze um die Hälfte reducirt. Gleichzeitig ist ersichtlich, dass aus der Lösung von einer einzigen der vier Aufgaben, bei welchen die C eine Rolle spielen, alle sechs abgeleitet werden können durch Auflösung linearer Gleichungen oder durch Summationen.

2.

Im 82. Bande dieses Journals S. 217 f. ist eine Regel (13.) gegeben, nach welcher der Factor von

$$T_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$$

in der Entwickelung von

$$C_{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{r-1}}$$

ermittelt werden kann. Sie kommt darauf hinaus, dass die gesuchte Zahl gefunden werden kann durch Lösung der folgenden Aufgabe, mit der ich mich jetzt eingehender beschäftigen werde:

„In ein System von r Zeilen und m Colonnen sollen μ Einheiten und $rm-\mu$ Nullen so eingefügt werden, dass die Summen in den einzelnen Zeilen der Reihe nach $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{r-1}$, die in den Colonnen $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ betragen; dabei sollen aber, wenn man eine beliebige Colonnenzahl durch einen verticalen Strich abschneidet, links von diesem Strich in keiner Zeile mehr Einheiten sich befinden als in einer der folgenden Zeilen. Wie viel verschiedene Gruppirungen sind möglich?“

Dieselbe Aufgabe könnte wohl auch so ausgesprochen werden: „Gegeben sind r Gruppen, welche der Reihe nach aus $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{r-1}$ Elementen bestehen. Letztere sollen in m Fächer so vertheilt werden, dass zuerst α_0 Elemente in das erste Fach, dann α_1 Elemente in das zweite u. s. f., endlich α_{m-1} in das letzte Fach gelegt werden; in kein Fach soll aber mehr als ein Element irgend einer Gruppe hineinkommen, und ferner sollen in

keinem Augenblick der Vertheilung aus einer späteren Gruppe mehr Elemente entnommen sein, als aus einer früheren. Auf wie viel Arten ist eine solche Vertheilung möglich?" Es ist angenehm, an die eine oder die andere Fassung der Aufgabe gelegentlich die Betrachtungen anknüpfen zu können.

Unmittelbar ist ersichtlich, dass mehr als r Elemente in keinem Fach liegen können. Sei m_h die Anzahl der Fächer, welche h Elemente erhalten, so ist:

$$(5.)\quad \begin{cases} 1.m_1+2.m_2+\cdots+r.m_r = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{r-1} = \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1} = \mu \\ \text{und} \qquad\qquad m_1+m_2+\cdots+m_r = m. \end{cases}$$

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so ist die Aufgabe unlösbar, also die gesuchte Zahl gleich Null zu setzen. Ferner ist nothwendig

$$(6.)\quad m \geqq \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_{r-1} \geqq 0,$$

und unsere Zahl ist also auch dann Null, wenn ein λ kleiner ist als ein darauf folgendes, oder wenn $\lambda_0 > m$. Ist $\lambda_0 = m$, so giebt die erste Gruppe ein Element an jedes Fach; dann kommt es also nur auf die übrigen Gruppen bei der Vertheilung an, wobei gleichzeitig zu beachten ist, dass jedes Fach bereits ein Element enthält. Ist $\lambda_{r-1} = 0$, so ist dieselbe Aufgabe für ein kleineres r zu lösen. Die Fächer denken wir uns in der Regel so geordnet, dass dasjenige mit mehr Inhalt früher gezählt wird, also

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_{m-1}.$$

Doch ist diese Bedingung nicht wesentlich, und eben so gut könnte jede andere Anordnung gewählt werden. Denn es seien, bei der anderen Auffassung, die gegebenen Einheiten und Nullen den Zeilen und Colonnen in irgend einer Art eingefügt, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und es mögen dabei die Colonnensummen α' und α'' auf einander folgen und zwar $\alpha' > \alpha''$. Man vertausche, von unten her beginnend, $\alpha'-\alpha''$ mal 1,0 mit 0,1, so erhält man aus einer erlaubten Anordnung mit der Colonnenfolge $\alpha'\alpha''$ eine eben solche mit der Folge $\alpha''\alpha'$. Umgekehrt lässt sich aus dieser wieder eindeutig jene ableiten. Da nun die Anzahl aller überhaupt möglichen Anordnungen in den beiden betrachteten Colonnen dieselbe ist bei den Folgen $\alpha'\alpha''$ und $\alpha''\alpha'$, und da diejenigen unter ihnen, welche nach den sonstigen Bedingungen erlaubt sind, einander eindeutig entsprechen, so folgt, dass die Reihenfolge dieser beiden und also der Colonnen überhaupt den Werth der gesuchten Zahl nicht beeinflussen kann; vielmehr wird der letztere nur von den Grössen $m_1, \ldots m_r, \lambda_0, \ldots \lambda_{r-1}$ abhängen. Erinnert

man sich übrigens daran, dass die behandelte Aufgabe identisch ist mit der Entwickelung der Determinante C nach den T, so ist die Vertauschbarkeit der Colonnen ohne Weiteres klar; denn es ist erlaubt, die Reihenfolge der Differentiationen nach den t (vgl. Bd. 82, S. 216) beliebig zu ändern.

Unter den λ mögen sich p solche befinden, die grösser als Eins sind, die übrigen $r-p$ seien gleich Eins. Ist für die ersten p Gruppen festgesetzt, in welche Fächer die einzelnen Elemente hineinkommen, so ist dies auch für die $r-p$ übrigen bestimmt. Denn aus den letzteren sind der Reihe nach die Elemente zu entnehmen und nach der Ordnung der Fächer in diejenigen zu legen, welche noch nicht hinreichend gefüllt sind. Oder nach der anderen Auffassung: In den letzten $r-p$ Zeilen ist zuerst immer 1, 0, 0, ..., dann 0, 1, 0, ..., dann 0, 0, 1, ... u. s. w. anzuordnen, um die verlangten Colonnensummen zu erhalten.

Zum Werthe der gesuchten Zahl können auch die Grössen m_p, $m_{p+1}, \dots m_r$ nicht einzeln ihrem Werthe nach beitragen, sondern nur ihre Summe kann einen Einfluss ausüben. Denn sobald ein Fach p oder mehr Elemente erhalten soll, wird dadurch direct die Anordnung der letzten $r-p$ Gruppen beeinflusst. Ob aber diese Gruppen an jenes Fach kein Element abgeben dürfen, oder ob sie ein oder zwei oder mehr Elemente abgeben müssen, ist nach dem eben Gesagten für den Werth der Hauptzahl gleichgültig, diese hängt eben nur von der Anzahl der erlaubten Anordnungen in den ersten p Gruppen und ausserdem von dem Werth der Zahl r (oder auch μ) ab.

Sei nun $p=1$, so ist die gesuchte Zahl *) gleich der figurirten

$$\binom{m-1}{\lambda_0-1};$$

denn aus der ersten Gruppe muss ein Element in das erste Fach gelegt, die andern können beliebig vertheilt werden. Ist auch $\lambda_0=1$, so hat die Aufgabe offenbar nur eine Lösung; in der That ist dann auch jene Zahl der Einheit gleich.

Im allgemeinen Fall soll die gesuchte Zahl durch

$$(7.)\quad \begin{pmatrix} m-1 & m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden. Alle den Werth der Zahl bestimmenden Grössen sind in dieser Bezeichnung enthalten, wenn man noch die Anzahl μ sämmt-

*) Vergl. dieses Journal Bd. 82 S. 219.

licher Elemente (oder auch die Zahl r) als feststehend dazunimmt. Die Fächer nämlich, welche p Elemente oder mehr aufnehmen sollen, sind an Zahl $m-m_1-\cdots-m_{p-1}$ und Gruppen, welche nur ein Element enthalten, sind $\mu-\lambda_0-\lambda_1-\cdots-\lambda_{p-1}$ vorhanden. Hierdurch ist nun eine gewisse Function von $2p$ ganzen positiven Zahlen $m, m_1, \dots m_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{p-1}$ (von denen auch einige Null sein können), welche durch

$$(7^a.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}$$

bezeichnet wird, in eindeutiger Weise definirt. Um sie auszuwerthen, werde ich eine Reihe von Gleichungen aufstellen und nachweisen, dass diese im Verein mit gewissen Grenzbedingungen zu einer eindeutigen Bestimmung jener Function ausreichen. Die Gleichungen sind natürlich aus der Definition abzuleiten, d. h. im Anschluss an die oben gestellte Aufgabe, deren Lösung durch (7.) gegeben ist; den Formeln aber werde ich in der Regel (7^a.) zu Grunde legen. Das Analogon für die ganze folgende Betrachtung bieten die figurirten Zahlen, deren Werthe und Eigenschaften man insgesammt aus der Gleichung

$$\binom{m}{\lambda} = \binom{m-1}{\lambda}+\binom{m-1}{\lambda-1}$$

herleiten kann, wenn man noch die Grenzbedingungen

$$\binom{0}{\lambda}=0,\quad \binom{m}{0}=1,\quad \binom{0}{0}=1$$

hinzunimmt.

Für die Function (7^a.) ergeben sich aus dem bisher Gesagten folgende Grenzbedingungen: Sie verschwindet, wenn irgend ein λ kleiner ist als das folgende, oder wenn $\lambda_0 > m$; wenn der letzte untere Index gleich Null ist, so kann dieser und der darüber stehende einfach fortgelassen werden; ferner ist:

$$(8.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ m & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Die Function (7^a.) kann also auf doppelte Art in eine figurirte Zahl übergehen. Sie wird gleich $\binom{m}{\lambda_0}$, wenn $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{p-1}=0$, und sie wird gleich $\binom{m-m_1-\cdots-m_{p-1}}{\lambda_{p-1}}$, wenn $\lambda_h = m-m_1-\cdots-m_h$ für alle Werthe des h von 0 bis $p-2$. Ferner sind noch die Bedingungen (5.) zu beachten; es müssen also Zahlen $m_p, m_{p+1}, \dots m_r$ alle $\geqq 0$ so bestimmt werden

können, dass

$$(5^a.)\quad \begin{cases} m_1+m_2+\cdots+m_{p-1}+\cdots+m_r = m+1, \\ \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{p-1}+r = 1.m_1+2.m_2+\cdots+(p-1).m_{p-1}+p.m_p+\cdots+r.m_r, \end{cases}$$

$r \geqq p$, sonst aber beliebig, wenn die Zahl (7^a.) einen Werth haben soll. Noch ein besonderer Fall darf endlich nicht unerwähnt bleiben: Die Zahl (7^a.) ist im allgemeinen Null, wenn $\lambda_{p-1} = -1$ (bei der Hauptaufgabe würde dann ein λ kleiner sein, als ein folgendes); eine Ausnahme bildet aber der Fall, in welchem gleichzeitig $r = p$ und $m_1+\cdots+m_{p-1} = m+1$ ist; dann kann nämlich dieser letzte Index -1 und der darüber stehende einfach fortgelassen werden, ohne den Werth der Zahl zu ändern (bei der Hauptaufgabe darf man eine Zeile mit Nullen unten anfügen).

Ehe ich zur Ableitung der Hauptgleichungen übergehe, führe ich noch eine Formel an, welche später Anwendung findet. Es ist

$$(9.)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} m-1 & m_1 & m_2 & \dots & m_{r-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \dots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} m-1-m_r & m_{r-1} & m_{r-2} & \dots & m_1 \\ m-1-\lambda_{r-1} & m-1-\lambda_{r-2} & m-1-\lambda_{r-3} & \dots & m-1-\lambda_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

falls $\qquad m_1+m_2+\cdots+m_r = m > \lambda_0$

und $\qquad 1.m_1+2.m_2+\cdots+r.m_r = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{r-1}.$

Die Richtigkeit sieht man am bequemsten bei der ersten Fassung der obigen Aufgabe ein. Irgend eine richtige Anordnung in den Zeilen und Colonnen liege vor; man ersetze nun jede Eins durch eine Null, jede Null durch eine Eins, so entsteht eine andere Anordnung, in welcher die Zeilensummen der Reihe nach $m-\lambda_0, \dots m-\lambda_{r-1}$, die Colonnensummen aber $r-\alpha_0, \dots r-\alpha_{m-1}$ betragen. Wenn vorher links von einem verticalen Strich, welcher k Colonnen abtrennt, in einer Zeile e Einheiten und in einer spätern e' Einheiten sich befanden, so ist $e \geqq e'$; also ist nach der Vertauschung von Null und Eins die Anzahl $k-e'$ der Einheiten in der spätern Zeile nicht kleiner als die Anzahl $k-e$ der Einheiten in der frühern. Wird nun die Reihenfolge der Zeilen umgekehrt, die der Colonnen beibehalten, so haben wir eine richtige Anordnung für die Lösung derjenigen Aufgabe, welche aus der gegebenen durch Vertauschung von λ_h mit $m-\lambda_{r-1-h}$ und von α_k mit $r-\alpha_k$ entsteht. Letzteres aber ist, falls $m_1+m_2+\cdots+m_r = m$, identisch mit der Vertauschung von m mit $m-m_r$ und von m_h mit m_{r-h}. Jede Anordnung für die eine Aufgabe entspricht sonach einer und nur einer

Anordnung für die andere. — Im Fall $\lambda_0 = m$ wird zwar die Formel (9.) nach dem vorhin Gesagten nicht falsch; doch wird man dann besser zuerst (8.) anwenden *).

3.

Wenn wenigstens zwei Fächer mehr als $p-1$ Elemente aufnehmen sollen (woraus für (7^a.) folgt: $m_1+\cdots+m_{p-1} < m$; und ist nebenbei $\alpha_0 < r$), so kann man die gesuchte Zahl als Summe von zwei Functionen gleicher Art darstellen. Die verschiedenen möglichen Anordnungen theilen sich nämlich in zwei Classen; bei der einen ist in das letzte Fach, welches mehr als $p-1$ Elemente enthält, je ein Element aus jeder der ersten p Gruppen gelegt, bei der zweiten sind nicht alle diese p Gruppen in jenem Fach vertreten. Die Vertheilungen der ersten Classe sind offenbar an Zahl

$$= \begin{pmatrix} m-2 & m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-2 & \lambda_1-2 & \lambda_2-2 & \dots & \lambda_{p-1}-2 \end{pmatrix},$$

und es bleibt noch übrig, die andere Zahl zu bestimmen. Irgend eine Vertheilung der zweiten Classe sei vorgelegt und das letzte Fach, welches mit mehr als $p-1$ Elementen gefüllt ist, möge deren h enthalten, welche aus den letzten $r-p$ Gruppen entnommen sind. Das erste dieser h Elemente verschiebe man in das zunächst voraufgehende Fach, aus diesem das vorderste, den letzten $r-p$ Gruppen angehörende Element in das demnächst vorhergehende Fach u. s. w., so erkennt man, dass jeder Vertheilung der zweiten Classe eine und nur eine erlaubte Anordnung in dem Falle entsprechen würde, wenn die Zahl m_{p-1} und ebenfalls die Anzahl α_0 der Elemente des ersten Faches um Eins grösser wären; d. h. also die zweite Classe enthält

$$\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1}+1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix}$$

erlaubte Vertheilungen. Somit ergiebt sich:

$$(10.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & m_1 & \dots & m_{p-2} & m_{p-1}+1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-2} & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Ist α_0 allein grösser als $p-1$, so giebt es keine Anordnung der zweiten Classe, in der Gleichung (10.) fällt also das zweite Glied fort. In der

*) Die Formel (9.) ist im Grunde nichts Anderes als der auf unsern Fall angewendete Satz (14.) im Bd. 82 dieses Journals S. 222 f.

That wären auch für dasselbe in diesem Falle ($m_1+\cdots+m_{p-1}=m$) die Bedingungen (5^a.) nicht erfüllt. Wenn aber jedes α die Zahl $p-1$ nicht übertrifft, so verliert die Gleichung (10.) (bei der dann $m_1+\cdots+m_{p-1}=m+1$ ist) für die vorgelegte Aufgabe ihre Bedeutung; inwiefern sie auch dann noch gültig bleibt, kann erst an einer ganz andern Stelle entschieden werden. — Wenn $\lambda_h = m-m_1-\cdots-m_h$ für alle Werthe des h von Null bis $p-2$, so geht (10.) in die charakteristische Gleichung der figurirten Zahlen über; in dem eben erwähnten Ausnahmefall treten hierbei Binomialcoefficienten mit einem negativen obern Index auf. Wird ferner $\lambda_{p-1}=0$, so wird (10.) — abgesehen von jenem auszunehmenden Fall — zu einer Identität, weil das erste Glied rechts verschwindet.

Wenn m_1 nicht gleich Null, so lässt sich die Zahl (7^a.) in $p+1$ Summanden von gleicher Art zerlegen. Die möglichen Arten der Anordnung theilen wir nämlich in $p+1$ Classen; bei der einen ist das Element des letzten Faches aus der r^{ten} Gruppe, bei den andern aus je einer der ersten p Gruppen entnommen, vorausgesetzt, dass letzteres für jede derselben erlaubt ist. Nach Absonderung dieses letzten Faches kann die Vertheilung in die $m-1$ übrigen, von denen aber nur m_1-1 *ein* Element aufnehmen dürfen, nach den Vorschriften des in der Aufgabe gegebenen Gesetzes, sonst aber beliebig erfolgen. Wir erhalten also:

$$(11.)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} m & m_1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m-1 & m_1-1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} + \sum_0^{p-1}{}_k \begin{pmatrix} m-1 & m_1-1 & m_2 & \dots & m_k & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k-1 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}; \end{aligned}\right.$$

in jedem Gliede der Σ wird ein λ um Eins vermindert, während alle andern ungeändert bleiben. Von selbst fallen aus dieser Summe Glieder heraus, wenn einige gleiche λ in der Reihe $\lambda_0, \dots \lambda_{p-1}$ auf einander folgen, und das erste Glied fällt fort, wenn $p=r$, ganz im Einklang mit den Bedingungen unserer Aufgabe. Die Gleichung gilt also allgemein, sobald nur $m_1>0$; für $m_1=0$ hat sie für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung. Für $\lambda_0=m$ geht (11.) in eine Identität, für $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{p-1}=0$ in die charakteristische der figurirten Zahlen über.

Die Formeln (10.) und (11.) würden, falls $p=2$, zur Bestimmung unserer Function ausreichen. Im allgemeinen Falle kann man noch andere Gleichungen nach Analogie von (11.) ableiten. Es sei $m_1=0$, aber $m_2>0$, so kann man wieder alle möglichen Zahlenanordnungen in $\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}$

Classen theilen nach der Art, wie die letzte Colonnensumme erzielt ist. Dieselbe kann nämlich entweder nur aus zwei Einheiten der letzten $r-p$ Zeilen und zwar aus denen der beiden letzten zusammengesetzt sein, oder aus einer Einheit der ersten p Zeilen und derjenigen der r^{ten} Zeile, oder endlich aus zwei Einheiten der ersten p Zeilen. Demnach stellt sich die Zahl

$$\begin{pmatrix} m & 0 & m_2 & m_3 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix}$$

durch eine Summe von $\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}$ Gliedern gleicher Art dar; bei allen ist die obere Indexreihe

$$m-1 \quad 0 \quad m_2-1 \quad m_3 \quad \dots \quad m_{p-1};$$

die untere dagegen ist bei dem ersten Gliede dieselbe wie auf der linken Seite der Gleichung, bei den p folgenden ist irgend ein λ um eine Einheit verringert, während die übrigen ungeändert bleiben, endlich bei den letzten $\frac{p(p-1)}{2}$ Gliedern sind irgend zwei λ um eine Einheit vermindert, die anderen nicht verändert. Von den Summanden fällt der erste fort, wenn $r-p=1$, die $p+1$ ersten, wenn $r-p=0$; ferner verschwinden einzelne der $\binom{p}{1}+\binom{p}{2}$ letzten Glieder, wenn unter den λ sich gleiche befinden. Die beschriebene Gleichung geht in (11.) über, wenn $\lambda_0=m$, dagegen wieder in die charakteristische der figurirten Zahlen, wenn alle unteren Indices mit Ausnahme des ersten verschwinden.

Es ist klar, dass man in gleicher Art fortfahren und eine Reihe von $p-1$ Gleichungen, falls (11.) als erste gezählt wird, herleiten kann. Die h^{te} dieser Gleichungen lautet:

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} m & 0 & \dots & 0 & m_h & m_{h+1} & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{h-1} & \lambda_h & \lambda_{h+1} & \dots & \lambda_{p-1} \end{pmatrix} \\ &= \underset{k \overline{\overline{<}} h}{\mathrm{S}_0^1} \begin{pmatrix} m-1 & 0 \dots 0 & m_h-1 & m_{h+1} \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-k_0 & \dots & \lambda_h-k_h & \dots & \lambda_{p-1}-k_{p-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}\right.$$

wobei die Grössen $k_0, \dots k_{p-1}$ nur einen der Werthe Null oder Eins annehmen dürfen, die Summe aber ausgedehnt wird über alle Glieder, für welche

$$k = k_0+k_1+\dots+k_{p-1}$$

einen der Werthe 0, 1, 2, ... h hat. Diese h^{te} Gleichung hat also rechts

im allgemeinen $\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\cdots+\binom{p}{h}$, die $(p-1)^{\text{te}}$ somit 2^p-1 Glieder; in den mehrmals erwähnten besonderen Fällen geht jene entweder in die $(h-1)^{\text{te}}$ oder in die Grundformel der figurirten Zahlen über.

Die Formeln (11.) und (12.) lassen sich etwas verallgemeinern und in folgender Art zusammenfassen:

$$(13.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1}\end{pmatrix} = \underset{k \gtreqless \varrho}{\mathrm{S}_0^1}\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \dots & m_{\varrho-1} & m_\varrho-1 & m_{\varrho+1} & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-k_0 & & \dots & & \lambda_\varrho-k_\varrho & & \dots & \lambda_{p-1}-k_{p-1}\end{pmatrix},$$

bei der gleichen Bedeutung des Summationszeichens wie vorhin und für alle Werthe des ϱ von 1 bis $p-1$. Der Beweis wird wohl am bequemsten durch vollständige Induction geführt. Man könnte etwa so schliessen:

$$\begin{pmatrix} m & \dots & m_\varrho & \dots & m_\sigma & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_\varrho & \dots & \lambda_\sigma & \dots & \lambda_{p-1}\end{pmatrix} = \underset{k \gtreqless \varrho}{\mathrm{S}_0^1}\begin{pmatrix} m-1 & \dots & m_\varrho-1 & \dots & m_\sigma & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-k_0 & \dots & \lambda_\varrho-k_\varrho & \dots & & \dots & \lambda_{p-1}-k_{p-1}\end{pmatrix}$$

$$= \underset{k \gtreqless \varrho}{\mathrm{S}_0^1}\;\underset{k' \gtreqless \sigma}{\mathrm{S}_0^1}\begin{pmatrix} m-2 & \dots & m_\varrho-1 & \dots & m_\sigma-1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-k_0-k'_0 & \dots & & \dots & & \dots & \lambda_{p-1}-k_{p-1}-k'_{p-1}\end{pmatrix}$$

und durch Umkehrung der Summationsfolge

$$= \underset{k \gtreqless \sigma}{\mathrm{S}_0^1}\begin{pmatrix} m-1 & \dots & m_\varrho & \dots & m_\sigma-1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-k_0 & \dots & & \dots & & \dots & \lambda_{p-1}-k_{p-1}\end{pmatrix}.$$

Diese Schlüsse sind zunächst richtig für $\sigma-\varrho=1$, $m_1=m_2=\cdots=m_{\varrho-1}=0$, $m_\varrho=1$, $\varrho=1, 2, \dots p-2$, dann für jeden Werth von m_ϱ; in gleicher Art werden sie für $\sigma-\varrho=2$, 3 u. s. w. als richtig erkannt.

Der Formel (13.) kann man schliesslich noch diese Gestalt geben:

$$(13^a.)\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} m & m_1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & \dots & m_{\varrho-2} & m_{\varrho-1}+1 & m_\varrho-1 & m_{\varrho+1} & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_{\varrho-2} & \lambda_{\varrho-1} & \lambda_\varrho & \lambda_{\varrho+1} & \dots & \lambda_{p-1}\end{pmatrix} \\ \quad = \underset{k=\varrho}{\mathrm{S}_0^1}\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \dots & m_{\varrho-1} & m_\varrho-1 & m_{\varrho+1} & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0-k_0 & \lambda_1-k_1 & \dots & & & & \dots & \lambda_{p-1}-k_{p-1}\end{pmatrix},\end{cases}$$

indem also hier die Summe rechts nur $\binom{p}{\varrho}$ Glieder enthält, nämlich diejenigen, für welche

$$k = k_0+k_1+\cdots+k_{p-1} = \varrho,$$

während jedes k_h, wie immer, nur Null oder Eins sein darf. Ist $\varrho=1$, so ist links zu schreiben

$$\begin{pmatrix} m & m_1 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-1}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m-1 & m_1-1 & m_2 & \dots & m_{p-1} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{p-1}\end{pmatrix}.$$

4.

Die Gleichungen (10.) und (13.) sind nun im Verein mit den früher angegebenen Grenzbedingungen genügend, um die verallgemeinerten figurirten Zahlen, welche hier betrachtet werden, vollständig auszuwerthen. Man kann nämlich ein zweifaches Recursionsverfahren einschlagen:

a) Mit Hülfe der Formeln (13.) oder (12.) reducirt man die Zahlen mit beliebigen Werthen von $m_1, \dots m_{p-1}$ auf solche, bei denen

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_{p-1} = 0$$

ist. Auf die Zahl

$$\binom{m\ 0\ 0\ \dots\ 0}{\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2\ \dots\ \lambda_{p-1}}$$

kann man dann sicherlich (10.) anwenden, und indem man das zweite Glied von (10.) wieder nach der letzten der Gleichungen (13.) entwickelt, folgt:

$$(14.)\quad \binom{m\ 0\ \dots\ 0}{\lambda_0\ \lambda_1\ \dots\ \lambda_{p-1}} = \underset{k \leqq p}{\mathrm{S}_0^1}\binom{m-1\quad 0\quad \dots\quad 0}{\lambda_0-k_0\ \ \lambda_1-k_1\ \dots\ \lambda_{p-1}-k_{p-1}}.$$

Mit Benutzung dieser Formel, welche rechts 2^p Glieder hat, kann man von dem Fall $p=1$, welcher auf die Binomialcoefficienten führt, allmählich zu $p=2$, 3 u. s. f. aufsteigen; bei einem bestimmten Werthe von p setze man zuerst alle unteren Indices gleich Eins und m der Reihe nach $=1, 2, 3, \dots$, steige zunächst zu immer grösseren Werthen von λ_0, dann zu den höheren von λ_1 u. s. w. auf, bis endlich der Fall $\lambda_{p-1}=1$ vollständig erledigt ist, worauf man in gleicher Weise zu den Zahlenwerthen bei grösseren λ_{p-1} successive gelangt. Der Weg ist unter Umständen nicht kurz, aber er führt unzweideutig zum Ziele, und darauf kommt es hier nur an.

b) Man kann zunächst durch (10.) alle Zahlen auf solche zurückführen, für welche

$$m_1+m_2+\cdots+m_{p-1} = m+1$$

ist. Dann kann man durch die letzte der Gleichungen (13^a.) m_{p-1} zum Verschwinden bringen, durch die vorletzte m_{p-2} u. s. f., so dass schliesslich alle anderen Zahlen durch Addition aus solchen von der Form

$$\binom{m\ \ m+1\ \ 0\ \dots\ 0}{\lambda_0\ \ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \dots\ \lambda_{p-1}}$$

zusammengesetzt werden können; diese aber sind mit Hülfe der ersten von den Gleichungen (13^a.), d. h. mit Hülfe von (11.) zu ermitteln. Der kleinste

Werth von m, für welchen eine solche Zahl nicht verschwindet, ist $\lambda_0+\cdots+\lambda_{p-1}+p-1$, wie aus den Grenzbedingungen (5^a.) zu erkennen; wird also dieser Grenzwerth genommen, so fällt in (11.) das erste Glied rechts fort.

Später werde ich für alle hier betrachteten Functionen einen analytischen Ausdruck herleiten. Während derselbe aber im allgemeinen recht complicirt als mehrfache Summe sich darstellt, wird er gerade für die beiden Zahlformen, auf welche die Recursionsmethoden a) und b) führen, sehr einfach. Man erhält:

$$(15.)\quad \binom{m\;0\;\ldots\;0}{\lambda_0\;\lambda_1\;\ldots\;\lambda_{p-1}} = \prod_{h=0}^{h=p-1} \frac{(m+h)!}{(\lambda_h+p-1-h)!(m+h-\lambda_h)!}\cdot\prod_{h,k}(\lambda_h-h-\lambda_k+k),$$

$$(16.)\quad \left\{\begin{aligned}&\binom{m\;\;m+1\;\;0\;\ldots\;0}{\lambda_0\;\;\lambda_1\;\;\lambda_2\;\ldots\;\lambda_{p-1}}\\ &= \frac{(m+1)!\prod_{h,k}(\lambda_h-h-\lambda_k+k)}{(m+1-p-\lambda_0-\cdots-\lambda_{p-1})!\prod_{h=0}^{h=p-1}(\lambda_h+p-1-h)!(m+1-\lambda_0-\cdots-\lambda_{p-1}+\lambda_h-h)}.\end{aligned}\right.$$

Beide Male ist in dem Product mit zwei Argumenten stets $h<k$ zu nehmen. — Der Nachweis der Richtigkeit von (15.) und (16.) auf Grund der bisher gewonnenen Resultate dürfte nicht ohne Interesse sein und soll hier geführt werden.

a) In (15.) kann man die ganze rechte Seite als Determinante p^{ten} Grades schreiben:

$$(15^a.)\quad \left|\binom{m+p-1}{\lambda+p-1}\;\binom{m+p-2}{\lambda+p-1}\;\ldots\;\binom{m}{\lambda+p-1}\right|,$$

wo die h^{te} Zeile aus der hingeschriebenen dadurch entsteht, dass $\lambda_{h-1}-h+1$ an die Stelle von λ tritt. Zieht man nämlich in dieser Determinante, nachdem man $\frac{m!}{\lambda!(m-\lambda)!}$ an Stelle von $\binom{m}{\lambda}$ gesetzt hat, die Factoren vor

$$\frac{(m+p-1)!(m+p-2)!\ldots m!}{(\lambda_0+p-1)!(\lambda_1+p-2)!\ldots\lambda_{p-1}!(m-\lambda_0)!(m+1-\lambda_1)!\ldots(m+p-1-\lambda_{p-1})!},$$

so bleibt die Determinante stehen:

$$|1\quad \overline{m-\lambda}\quad \overline{(m-\lambda)(m-1-\lambda)}\quad\ldots\quad \overline{(m-\lambda)(m-1-\lambda)\ldots(m-p+2-\lambda)}\,|.$$

Hier entwickele man die Glieder der h^{ten} Zeile nach den Potenzen von $\lambda_{h-1}-h+1$, so zerlegt die Determinante sich in eine Summe von Determinanten, von welchen alle identisch verschwinden mit Ausnahme einer einzigen

$$|1\quad -\lambda\quad (-\lambda)^2\quad\ldots\quad(-\lambda)^{p-1}|,$$

welche durch das positive Differenzenproduct der $\lambda_{h-1}-h+1$ ersetzt werden kann. Die rechte Seite von (15.) ist also in der That mit der oben genannten Determinante (15^a.) identisch.

Nun erfüllt (15^a.) zunächst alle Grenzbedingungen, denen die linke Seite von (15.) unterworfen ist. Sie verschwindet, wenn irgend ein λ um Eins kleiner ist als das nächstfolgende, oder wenn $\lambda_0 > m$; sie reducirt sich durch den Wegfall der ersten Zeile und der ersten Colonne auf denselben Ausdruck für das nächstkleinere p, wenn $\lambda_0 = m$, also im äussersten Grenzfalle, auf $\binom{m}{\lambda_{p-1}}$; ferner reducirt sie sich, falls $\lambda_{p-1}=0$, auf die Determinante $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\left|\binom{m+p-2}{\lambda+p-2}\ \binom{m+p-3}{\lambda+p-2}\ \ldots\ \binom{m}{\lambda+p-2}\right|;$$

denn in diesem Falle werden alle Glieder in der letzten Zeile von (15^a.) der Einheit gleich; subtrahirt man nun successive die zweite, dritte, vierte, ... Colonne von der voraufgehenden, so folgt jene Reduction. Somit bleibt noch zu erweisen, dass (15^a.) auch der Gleichung (14.) Genüge leistet. Zu diesem Zweck verwandele ich (15^a.) durch Voranschreiben von p Zeilen und p Colonnen in eine Determinante vom Grade $2p$; in den p ersten Colonnen dieser letzteren steht Eins in jedem Gliede der Diagonalreihe, sonst nur Null, im übrigen wird die h^{te} Zeile ausgefüllt durch

$$\binom{m+p-2}{\lambda_{h-1}-h+p}\ \binom{m+p-3}{\lambda_{h-1}-h+p}\ \ldots\ \binom{m-1}{\lambda_{h-1}-h+p}.$$

Die neue Determinante gewinnt, wenn ich die h^{te} Zeile von der $(p+h)^{\text{ten}}$ subtrahire, folgendes Ansehen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \binom{m+p-2}{\lambda_0+p-1} & \binom{m+p-3}{\lambda_0+p-1} & \ldots & \binom{m-1}{\lambda_0+p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \binom{m+p-2}{\lambda_{p-1}} & \binom{m+p-3}{\lambda_{p-1}} & \ldots & \binom{m-1}{\lambda_{p-1}} \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & \binom{m+p-2}{\lambda_0+p-2} & \binom{m+p-3}{\lambda_0+p-2} & \ldots & \binom{m-1}{\lambda_0+p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \binom{m+p-2}{\lambda_{p-1}-1} & \binom{m+p-3}{\lambda_{p-1}-1} & \ldots & \binom{m-1}{\lambda_{p-1}-1} \end{vmatrix}.$$

Diese zerlege ich in eine Summe von Producten aus Partialdeterminanten p^{ten} Grades, wobei ich für den ersten Factor immer die p ersten Colonnen verwende; von den Gliedern der Summe verschwinden alle mit Ausnahme

von 2^p, welche genau die vom Beweise verlangten sind. Hat nämlich die k^{te} Zeile im ersten Factor Verwendung gefunden, so darf derselbe nicht auch die $(p+k)^{te}$ Zeile enthalten, wenn das betreffende Glied einen Werth haben soll; und wirklich tritt auch jedes von den 2^p nicht verschwindenden Gliedern mit positivem Vorzeichen in die Summe ein. Denn falls der erste Factor die k^{te} Zeile nicht enthalten soll, setze man in der Determinante $2p^{ten}$ Grades an Stelle der Eins jener Zeile eine Null und vertausche sie dann mit der $(p+k)^{ten}$ Zeile, was $2p-1$ Umstellungen verlangt. Sollten nun überhaupt i von den p voranstehenden Zeilen nicht im ersten, sondern im zweiten Factor verwendet werden, so sind $(2p-1)i$ Umstellungen erfolgt, und die entstandene Determinante $2p^{ten}$ Grades zerlegt sich unmittelbar in das gewünschte Product; es enthält dann aber auch die Diagonalreihe des ersten Factors i Mal die Zahl -1, also ist das Vorzeichen des betreffenden Gliedes $(-1)^{2pi}=+1$. Damit ist die Richtigkeit der Formel (15.) vollständig erwiesen.

Beiläufig merke ich hier an:

$$(17.)\qquad \binom{m\ \ 0\ \ldots\ 0}{\lambda_0\ \lambda_1\ \ldots\ \lambda_{p-1}} = \binom{m\qquad\quad 0\qquad \ldots\quad 0}{m-\lambda_{p-1}\ \ m-\lambda_{p-2}\ \ldots\ m-\lambda_0}.$$

Die Formel ist aus (15.) abzulesen und enthält als besonderen Fall die bekannte

$$\binom{m}{\lambda} = \binom{m}{m-\lambda}.$$

b) In der Gleichung (16.) genügt ebenfalls die rechte Seite denselben Grenzbedingungen wie die linke; denn sie verschwindet, sobald ein λ um Eins kleiner ist als das nächstfolgende, hat nur einen Werth, so lange $m \geqq \lambda_0+\cdots+\lambda_{p-1}+p-1$, und reducirt sich für $\lambda_{p-1}=0$ auf denselben Ausdruck für das nächstkleinere p, schliesslich auf eine gewöhnliche figurirte Zahl. Demnach erübrigt nur noch der Nachweis dafür, dass die rechte Seite von (16.) auch (11.) befriedigt. Der Kürze wegen setze ich

$$\lambda_h+p-1-h = a_{h+1},$$
$$m+1-\lambda_0-\lambda_1-\cdots-\lambda_{p-1}-p = x,$$

dann ist die folgende Gleichung zu erweisen:

$$\frac{x(x+1+a_1)\ldots(x+1+a_p)}{(x+a_1)\ldots(x+a_p)} + \frac{a_1(a_1-1-a_2)\ldots(a_1-1-a_p)(x+1+a_1)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_p)(x+a_1)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{a_p(a_p-1-a_1)\ldots(a_p-1-a_{p-1})(x+1+a_p)}{(a_p-a_1)\ldots(a_p-a_{p-1})(x+a_p)} = m+1.$$

Hier ist nämlich beiderseits der Factor

$$\frac{m!(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_{p-1}-a_p)}{x!\,a_1!\,a_2!\dots a_p!(x+1+a_1)\dots(x+1+a_p)}$$

fortgelassen. In jener Gleichung zerlege ich das erste Glied in Partialbrüche; es sondert sich die ganze Function $x+p$ ab, und die Einzelbrüche vereinigen sich mit den anderen Gliedern der linken Seite zu folgendem Ausdruck:

$$\frac{a_1(a_1-1-a_2)\dots(a_1-1-a_p)}{(a_1-a_2)\dots(a_1-a_p)}+\frac{a_2(a_2-1-a_1)\dots(a_2-1-a_p)}{(a_2-a_1)\dots(a_2-a_p)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{a_p(a_p-1-a_1)\dots(a_p-1-a_{p-1})}{(a_p-a_1)\dots(a_p-a_{p-1})}.$$

Wenn ich hier das k^{te} Glied mit a_k+1-a_k und mit dem Differenzenproduct der a multiplicire, statt des letzteren dann aber die Determinante schreibe, so erhalte ich an Stelle der Summe:

$$(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+1}\,|\,1\;\; a\;\; a^2\;\ldots\; a^{p-2}\;\; \overline{a(a-1-a_1)(a-1-a_2)\dots(a-1-a_p)}\,|,$$

eine Determinante, deren k^{te} Zeile aus der hingeschriebenen dadurch entsteht, dass a_k an die Stelle von a gesetzt wird. Dieselbe ist

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+1}|1\; a\,\dots\, a^{p-2}\;\overline{a^{p+1}-a^p(a_1+\dots+a_p+p)+a^{p-1}\{(a_1+1)(a_2+1)+\dots+(a_{p-1}+1)(a_p+1)\}}\,|,$$

indem alles Uebrige identisch verschwindet. Hier endlich wende ich die in diesem Journal Bd. 81, S. 281 f. abgeleitete Regel *) an, lasse den Factor, welchen ich vorhin einführte, das Differenzenproduct, wieder fort, so wird die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$= x+p-\begin{vmatrix} a_1+\dots+a_p & a_1a_2+\dots+a_{p-1}a_p \\ 1 & a_1+\dots+a_p \end{vmatrix}$$
$$+(a_1+\dots+a_p)(a_1+\dots+a_p+p)-(a_1+1)(a_2+1)-\dots-(a_{p-1}+1)(a_p+1)$$
$$=x+p+p(a_1+\dots+a_p)-(p-1)(a_1+\dots+a_p)-\frac{p(p-1)}{2}=m+1,$$

und der gewünschte Beweis ist geliefert.

5.

Durch Wiederholung und Combination der Formeln (10.) und (13.) lassen sich manche weitere Formeln ableiten, welche sämmtlich als Special-

*) Dieselbe ist, wie ich nachträglich bemerkt, bereits in der oben citirten Abhandlung des Herrn *Nägelsbach* (§ 6) auf anderem Wege bewiesen.

fälle bekannte Beziehungen der Binomialcoefficienten in sich schliessen. Doch gehe ich hierauf nicht näher ein, sondern wende mich sogleich zur Hauptsache zurück.

Indem die bisherigen Bezeichnungen festgehalten werden, ergiebt sich:

$$(18.)\qquad C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}} = \Sigma\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \ldots & m_{p-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} T_{1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}},$$

wo also die λ absteigend geordnet, die letzten $r-p$ derselben der Einheit gleich sind und die Summation auf alle Combinationen der Zahlen 1, 2, ... r sich erstreckt, für welche

$$(18^a.)\qquad \begin{cases} m_1+m_2+\cdots+m_r = m \quad \text{und} \\ 1.m_1+2.m_2+\cdots+r.m_r = \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{r-1} = \mu, \end{cases}$$

d. h. gleich der Dimension der betreffenden Function C ist. Sofort folgt aus 2):

$$(19.)\qquad K_{1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}} = \Sigma\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \ldots & m_{p-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix}\cdot C_{r^{\lambda_{r-1}}(r-1)^{\lambda_{r-2}-\lambda_{r-1}}\ldots 2^{\lambda_1-\lambda_2}1^{\lambda_0-\lambda_1}}$$

bei derselben Bedeutung des Summenzeichens.

Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, dass die in (18.) und (19.) auftretenden Zahlenfactoren durch successives Verfahren recht bequem ausgewerthet werden können; auch ist der analytische Ausdruck derselben für einzelne Fälle schon festgestellt. Um letzteren allgemein zu erhalten, kann man den Bd. 82, S. 220 f. angedeuteten Weg einschlagen. Der Ausdruck sei ermittelt für den Fall, dass $p-1$ der Indices λ die Einheit überschreiten; dann entwickele man C nach den Elementen der ersten Colonne, so ergiebt sich eine Summe von Gliedern mit abwechselndem Vorzeichen, welche alle in ihrer Form mit dem ersten

$$c_{\lambda_0}\,.\,C_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{r-1}}$$

übereinstimmen. Die Summe kann, wenn der erledigte Fall $p=1$ ausgenommen wird, höchstens p Glieder haben und bricht ab, sobald eine der Zahlen λ_0, λ_1-1, λ_2-2, ... $\lambda_{p-1}-p+1$ negativ wird; in jedem der auftretenden C sind nur $p-1$ Indices grösser als Eins. Denkt man sich den zweiten Factor jenes Productes vollständig entwickelt, so dass auch jedes T in seine einzelnen Glieder zerlegt ist, und setzt ebenso für c_{λ_0} seinen Werth in den t, so übersieht man leicht, wie sich der Zahlenfactor von

$$T_{1^{m_1}2^{m_2}\ldots r^{m_r}}$$

in jenem Product durch eine Summation finden lässt. Von der Reihe der

m Indices dieses T subtrahire man nämlich in irgend einer Folge eine Reihe von λ_0 Einheiten und $m-\lambda_0$ Nullen, so wird jede der entstehenden $\binom{m}{\lambda_0}$ Indexcombinationen ein Glied in der Entwickelung von $C_{\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}}$ anzeigen, welches zum gesuchten Zahlenfactor einen Beitrag liefert. Sind dabei h_k Einheiten von denjenigen m_k Indices abgezogen, welche den Werth k haben, so hat die entstehende Combination $m-h_1$ nicht verschwindende Indices, $m_1-h_1+h_2$ solche, die gleich Eins, $m_2-h_2+h_3$ solche, die gleich Zwei sind u. s. w. Somit wird:

$$(20.)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \ldots & m_{p-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} = \sum_{h_{p-1}}^{h_1} \Big[\binom{m_1}{h_1}\binom{m_2}{h_2}\cdots\binom{m_{p-1}}{h_{p-1}} \\ \cdot \sum_0^{p-1}{}_h (-1)^h \binom{m-m_1-\cdots-m_{p-1}}{\lambda_h-h-h_1-\cdots-h_{p-1}} \begin{pmatrix} m-h_1-1 & m_1-h_1+h_2 & \ldots & m_{p-2}-h_{p-2}+h_{p-1} \\ \lambda_0 \;\ldots\; \lambda_{h-1} & \lambda_{h+1}-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} \Big], \end{array}\right.$$

wo die Summe auf alle nicht verschwindenden Glieder auszudehnen ist. Wenn man hier den letzten Factor in derselben Art darstellt u. s. w., so erhält man schliesslich für die gesuchte Zahl eine $\frac{p(p-1)}{2}$ fache Summe, in welcher jedes Glied sich einerseits aus einer Reihe von Binomialcoefficienten, andererseits aus einer Determinante p^{ten} Grades, deren Elemente Binomialcoefficienten sind, multiplicatorisch zusammensetzt. Wesentliche Vereinfachungen dieses höchst complicirten, wenngleich in seinem Bau wohl zu übersehenden Ausdrucks sind mir nur in den beiden oben bereits erwähnten Fällen gelungen:

a) Es sei $m_1 = m_2 = \cdots = m_{p-1} = 0$, so muss auch $h_1 = h_2 = \cdots = h_{p-1} = 0$ sein, wenn das betreffende Glied einen Werth haben soll. Daher wird:

$$\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} = \binom{m}{\lambda_0}\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix}$$

$$-\binom{m}{\lambda_1-1}\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_2-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{m}{\lambda_{p-1}-p+1}\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_{p-2} \end{pmatrix}.$$

Ist nun bewiesen, dass

$$\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{p-2}-1 \end{pmatrix} = \left| \binom{m+p-3}{\lambda+p-3} \binom{m+p-4}{\lambda+p-3} \cdots \binom{m-1}{\lambda+p-3} \right|,$$

wo die rechte Seite nach der mehrmals angewendeten Bezeichnung eine Determinante $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellt, so folgt:

$$\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \ldots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} = \left| \binom{m}{\lambda} \binom{m+p-3}{\lambda+p-2} \binom{m+p-4}{\lambda+p-2} \cdots \binom{m-1}{\lambda+p-2} \right|.$$

Da aber

$$\binom{m}{\lambda} = \sum_0^{p-2}{}_h(-1)^h\binom{p-2}{h}\binom{m+p-2-h}{\lambda+p-2},$$

so wird, wenn man die Colonnen von der zweiten an der Reihe nach mit

$$\binom{p-2}{1},\quad -\binom{p-2}{2},\quad \dots\quad (-1)^{p-3}\binom{p-2}{p-2}$$

multiplicirt und zur ersten addirt:

$$\begin{pmatrix} m-1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} = \left|\binom{m+p-2}{\lambda+p-2}\binom{m+p-3}{\lambda+p-2}\dots\binom{m-1}{\lambda+p-2}\right|.$$

Diese Gleichung ist aber richtig für $p=1$, also allgemein; mithin ist (15.) von neuem bewiesen.

b) Es sei $m_1 = m$, dagegen $m_2 = m_3 = \dots = m_r = 0$, so hat man:

$$\begin{pmatrix} m-1 & m & 0 \dots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots\dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} = \binom{m}{\lambda_0}\begin{pmatrix} m-1-\lambda_0 & m-\lambda_0 & 0 \dots & 0 \\ \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \dots\dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} - \cdots$$

$$\cdots - (-1)^{p-1}\binom{m}{\lambda_{p-1}-p+1}\begin{pmatrix} m-1-\lambda_{p-1}+p-1 & m-\lambda_{p-1}+p-1 & 0 \dots & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots\dots & \lambda_{p-2} \end{pmatrix}.$$

Falls nun erwiesen wäre, dass

$$\begin{pmatrix} m-1 & m & 0 \dots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{p-2}-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m!\prod_0^{p-2}{}_k^h(\lambda_h-h-\lambda_k+k)}{(m-\lambda_0-\dots-\lambda_{p-2})!\prod_0^{p-2}{}_h(\lambda_h-h+p-3)!(m-\lambda_0-\dots-\lambda_{p-2}+p-2+\lambda_h-h)},$$

so könnte man das Obige, wenn der Kürze wegen

$$m-\lambda_0-\dots-\lambda_{p-1}+p-1 = x$$

und statt des Differenzenproducts die Determinante gesetzt wird, auch so schreiben:

$$\begin{pmatrix} m-1 & m & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \dots & \lambda_{p-1}-1 \end{pmatrix} = \frac{m!(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(x-p+1)!\prod_0^{p-1}{}_h(\lambda_h+p-2-h)!(\lambda_h-h+x)}$$

$$.\left|1\ \ \lambda\ \ \lambda^2\ \dots\ \lambda^{p-2}\ \ \overline{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+p-2)(\lambda+x)}\right|;$$

denn wenn man hier nach den Elementen der letzten Colonne entwickelt, erhält man genau dasselbe wie oben. Nun ist aber die hier erhaltene Determinante gerade dem Differenzenproduct gleich, da bei der Entwickelung der Elemente der letzten Colonne nach Potenzen von λ (oder $\lambda_{h-1}-h+1$)

nur λ^{p-1} zu einer nicht verschwindenden Determinante führt. Daher wäre die obige Formel auch richtig, wenn p statt $p-1$ gesetzt würde. Man hat aber für $p=2$:

$$\begin{pmatrix} m-1 & m \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 \end{pmatrix} = \binom{m}{\lambda_0}\binom{m-1-\lambda_0}{\lambda_1-1} - \binom{m}{\lambda_1-1}\binom{m-\lambda_1}{\lambda_0}$$
$$= \frac{m!(\lambda_0-\lambda_1+1)}{\lambda_0!(\lambda_1-1)!(m-\lambda_0-\lambda_1)!(m-\lambda_0)(m-\lambda_1+1)},$$

d. h. die Formel (16.) ist richtig für $p=2$ und also nach dem soeben geführten Beweise allgemein.

Die Formel (20.) ist auch geeignet, die Beziehungen (10.) und (13.) für die hier betrachteten Zahlen durch den Schluss von p auf $p+1$ nachzuweisen. Da die Schwierigkeiten eines solchen Beweises nur in der Länge der Formeln, nicht in der Sache liegen, gehe ich nicht weiter darauf ein. Indem man aber dabei schliesslich nur auf der Grundformel der figurirten Zahlen fusst, wird es möglich sein, die Gültigkeit der Formeln (10.) und (13.) für allgemeinere Functionen zu erweisen, deren analytischer Ausdruck aus (20.) zu erkennen ist, bei denen aber nicht nothwendig alle m ganze positive, den Bedingungen (5.) und (6.) unterworfene Zahlen sein dürfen. Auch dies sei hier nur angedeutet.

6.

Um eine bestimmtere Vorstellung von den hier betrachteten Zahlen zu gewinnen, dürfte es sich empfehlen, ein wenig genauer auf denjenigen Fall einzugehen, welcher den figurirten Zahlen am nächsten steht.

Man hat für $p=2$:

$$(21.)\qquad \begin{pmatrix} m-1 & m_1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \sum_0^{\lambda_0}{}_h \binom{m_1}{h} \begin{vmatrix} \binom{m-m_1}{\lambda_0-h}\binom{m-1-h}{\lambda_0} \\ \binom{m-m_1}{\lambda_1-h}\binom{m-1-h}{\lambda_1} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber

$$\sum_0^{\lambda_0}{}_h \binom{m_1}{h}\binom{m-m_1}{\lambda_0-h}\binom{m-1-h}{\lambda_1} = \sum_0^{\lambda_0}{}_{h_0} \sum_0^{\lambda_1}{}_{h_1} \binom{m_1}{h}\binom{m-m_1}{\lambda_0-h}\binom{\lambda_0-h}{h_1}\binom{m-1-\lambda_0}{\lambda_1-h_1}$$
$$= \sum_0^{\lambda_1}{}_{h_1} \binom{m-m_1}{h_1}\binom{m-h_1}{\lambda_0-h_1}\binom{m-1-\lambda_0}{\lambda_1-h_1} = \frac{m-\lambda_1}{m-\lambda_0}\sum_0^{\lambda_1}{}_h \binom{m-m_1}{h}\binom{m-h}{\lambda_1-h}\binom{m-1-\lambda_1}{\lambda_0-h}$$
$$= \frac{m-\lambda_1}{m-\lambda_0}\sum_0^{\lambda_1}{}_h \binom{m_1}{h}\binom{m-m_1}{\lambda_1-h}\binom{m-1-h}{\lambda_0};$$

folglich:

$$(21^a.)\qquad \begin{pmatrix} m-1 & m_1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0-\lambda_1}{m-\lambda_0}\sum_0^{\lambda_1}{}_h \binom{m_1}{h}\binom{m-m_1}{\lambda_1-h}\binom{m-1-h}{\lambda_0}.$$

Auch noch andere Formen ohne Determinantenfactoren in den einzelnen Gliedern können aus dieser Umformung entnommen werden. Eine entsprechende Umformung für den allgemeinen Fall, von deren Möglichkeit ich überzeugt bin, habe ich nicht auffinden können.

Die Functionen (21.) könnten auch eindeutig durch folgende Eigenschaften definirt werden:

$$(22^a.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m_1+1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 & m_1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 \end{pmatrix}.$$

$$(22^b.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-1 & m_1-1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 & m_1-1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m-1 & m_1-1 \\ \lambda_0 & \lambda_1-1 \end{pmatrix}.$$

$$(22^c.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 \\ \lambda_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ \lambda_0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} m & m_1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = 0,\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = 0,\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$$

wobei λ_0 und λ_1 nur ganzzahlig, m und m_1 beliebig sein können. Von den Folgerungen, welche diese Gleichungen zulassen, seien erwähnt:

$$(22^d.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \sum_0^r{}_h \begin{pmatrix} r \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-h & m_1+r-h \\ \lambda_0-h & \lambda_1-h \end{pmatrix},$$

$$(22^e.)\quad \begin{pmatrix} m & m_1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \sum_0^r{}_h (-1)^h \begin{pmatrix} r \\ h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-h & m_1-r \\ \lambda_0-h & \lambda_1-h \end{pmatrix},$$

wo r eine positive ganze Zahl bedeutet.

Will man die Zahlen $\begin{pmatrix} m-1 & m_1 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ für den Hauptfall, nämlich wenn λ_0, λ_1, m, m_1 positiv und ganzzahlig und $m_1 \leqq m$ ist, auswerthen, so stellt man wohl am besten zunächst mit Hülfe von (22^b.) eine Tafel für $\begin{pmatrix} m-1 & m \\ \lambda_0-1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ auf, etwa in folgender Anordnung:

$$\text{Tafel für } \begin{pmatrix} m-1 & m \\ \lambda_0-1 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \frac{m!(\lambda_0-\lambda_1)}{(m-1-\lambda_0-\lambda_1)!\,\lambda_0!\,\lambda_1!\,(m-\lambda_1)(m-\lambda_0)}.$$

$m-\lambda_0 =$	$\lambda_1 =$	$m =$ 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17 $= m$
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
	1	·	0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119
3	0	·	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560
	1	·	·	0	5	16	35	64	105	160	231	320	429	560	715	896	1105
	2	·	·	·	0	5	14	28	48	75	110	154	208	273	350	440	544
4	0	·	·	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
	1	·	·	·	0	9	35	90	189	350	594	945	1430	2079	2925	4004	5355
	2	·	·	·	·	0	21	70	162	315	550	891	1365	2002	2835	3900	5236
	3	·	·	·	·	·	0	14	42	90	165	275	429	637	910	1260	1700

Jede Zahl dieser Tafel wird durch Addition von höchstens drei anderen Zahlen derselben erhalten, welche alle in der Colonne sich finden, die der gesuchten Zahl voraufgeht. Mit Leichtigkeit lassen sich dann aus dieser Tabelle alle anderen Grössen $\binom{m-1\ m_1}{\lambda_0-1\ \lambda_1}$ ableiten. Die Gleichung (22^a.) zeigt nämlich, dass die Zahlen

$$\binom{m-1\ \ m}{\lambda_0-1\ \ \lambda_1},\quad \binom{m-1\ \ m-1}{\lambda_0-1\ \ \lambda_1},\quad \binom{m-1\ \ m-2}{\lambda_0-1\ \ \lambda_1},\quad \dots$$

eine arithmetische Reihe von der Ordnung λ_1 bilden, für welche die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenzreihen folgende sind:

$$\binom{m-1\ \ m}{\lambda_0-1\ \ \lambda_1},\quad \binom{m-2\ \ m-1}{\lambda_0-2\ \ \lambda_1-1},\quad \binom{m-3\ \ m-2}{\lambda_0-3\ \ \lambda_1-2},\quad \dots$$

also gerade die Zahlen jener Tabelle, welche sich an die erste derselben in der links aufwärts steigenden Diagonale anschliessen. Hiernach wird man z. B. folgende kleine Hülfstafel entwerfen:

$\lambda_1 =$	$m_1 =$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	15	15	15	15	15	15	15	15	.	.	.	$m = 7,\ \lambda_0 = 3$
1	210	195	180	165	150	135	120	105	90	.	.	$m = 8,\ \lambda_0 = 4$
2	1512	1302	1107	927	762	612	477	357	252	162	.	$m = 9,\ \lambda_0 = 5$
3	7560	6048	4746	3639	2712	1950	1338	861	504	252	90	$m = 10,\ \lambda_0 = 6.$

Jede Zeile giebt die Differenzreihe der Zahlen in der folgenden Zeile. Die Tafel enthält die Werthe von $\binom{m-1\ m_1}{\lambda_0-1\ \lambda_1}$ für $m-\lambda_0 = 4$. In gleicher Art lässt sich an jede Diagonalreihe der vorigen Tabelle eine kleine Hülfstafel anschliessen, so dass die Werthe aller Zahlen $\binom{m-1\ m_1}{\lambda_0-1\ \lambda_1}$ ohne Schwierigkeit ermittelt werden können.

Im Anschluss an meine Untersuchungen in Bd. 82 über die Entwickelung des Zählers von *Borchardts* Function bemerke ich hier noch: Wenn man die obige Tabelle bis $m-\lambda_0 = 9$ fortsetzt, aber bereits bei $m = 10$ abbricht, so reicht dieselbe im Verein mit den eben erwähnten Nebentafeln für die Entwickelung jenes Zählers bis zu $n = 5$ fast vollständig aus. Für $n = 5$ erfordern nur 18 von 126 Determinanten C die Anwendung der in den vorigen Abschnitten gegebenen allgemeineren Formeln für $p = 3, 4, 5$;

und die Berechnung dieser 18 kann noch durch Benutzung der Formel (9.) wesentlich vereinfacht werden. Weit ausführlicher angelegte Tafeln, wie z. B. die des Herrn *Cayley* oder diejenigen, welche hier später besprochen werden, müssten viel weiter ausgedehnt werden, um für jenes specielle Problem mit gleichem Vortheil benutzt werden zu können.

7.

Die zweite Gruppe der im Eingange erwähnten sechs Aufgaben bilden *C, K* und *T, C,* deren enger Zusammenhang aus 1) hervorgeht. Insofern man die Aufgabe, eine Determinante nach Producten der Elemente zu entwickeln, als erledigt ansehen kann, scheint es fast unnöthig, auf die Frage, wie jene Entwickelungen auszuführen sind, näher einzugehen. Indessen bleibt Einiges noch zu erwägen: einmal, welche besonderen Vortheile für eine successive Berechnung sich aus dem eigenthümlichen Bau der Determinanten C ziehen lassen; dann, in welcher Art gleiche Glieder in einer solchen Determinantenentwickelung auftreten und wie also der Zahlenfactor eines bestimmten K sich gestaltet; endlich in welchem Zusammenhang die bei der neuen Aufgabe auftretenden Zahlen mit den bisher untersuchten stehen. Eine erschöpfende Beantwortung dieser Fragen beabsichtige ich hier nicht, sondern ich beschränke mich auf wenige Anmerkungen.

Für ein Recursionsverfahren eignet sich vorzüglich die schon oben benutzte Formel, welche man erhält, wenn man C nach den Elementen der ersten Colonne entwickelt:

$$(23.)\qquad C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}} = \sum_0^{r-1}{}_h (-1)^h c_{\lambda_h-h}\,.\,C_{\lambda_0+1,\lambda_1+1,\ldots\lambda_{h-1}+1,\lambda_{h+1},\lambda_{h+2}\ldots\lambda_{r-1}},$$

wo also in dem C des $(h+1)^{\text{ten}}$ Gliedes der Index λ_h fehlt, alle voraufgehenden aber um Eins zu erhöhen sind. Steigt man bei der Tafelconstruction von den niedrigeren Dimensionen der Function und von den Determinanten geringeren Grades allmählich auf, so kann man eine bessere Recursionsformel sich nicht wünschen. Die Entwickelung nach den Elementen der letzten Colonne könnte wohl auch verwerthet werden; sie wird aber im allgemeinen mehr Glieder liefern als (23.), weil in der letzten Colonne kein Index <1 oder $>\mu$ sich vorfinden kann.

Herr *Nägelsbach* hat in der oben citirten Abhandlung (S. VII) eine Formel für C_{1^r} gegeben. Etwas verallgemeinert lautet sie:

$$(24.)\qquad C_{\lambda 1^{r-1}} = \Sigma(-1)^{r-m}\frac{(m-1)!(m_\lambda+m_{\lambda+1}+\cdots+m_\mu)}{m_1!m_2!\dots m_\mu!}c_1^{m_1}c_2^{m_2}\dots c_\mu^{m_\mu},$$

wo die Summe über alle Werthe von $m_1, \dots m_\mu$ sich erstreckt, für welche

$$(24^a.)\qquad \begin{cases} m_1+m_2+\cdots+m_\mu = m \leqq r \\ \text{und} \\ 1.m_1+2.m_2+\cdots+\mu.m_\mu = \mu \end{cases}$$

ist. Der Beweis wird leicht, indem man C nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt, durch vollständige Induction geführt, zunächst für $\lambda = 1$, dann für ein beliebiges λ. Oder es ist auch (24.) eine unmittelbare Folge von 1) in Verbindung mit Bd. 81 dieses Journals S. 285 f. Anstatt nämlich den Factor von $c_1^{m_1}\dots c_\mu^{m_\mu}$ in der Entwickelung von $C_{\lambda 1^{r-1}}$ zu suchen, kann man nach 1) auch denjenigen von $C_{r1^{\lambda-1}}$ in der Entwickelung von $T_{1^{m_1}\dots\mu^{m_\mu}}$ ermitteln. Und nach Bd. 81 ist das Vorzeichen dieses Coefficienten $(-1)^{r-m}$, sein Werth aber gleich der Anzahl von verschiedenen Anordnungen für die $m_1+m_2+\cdots+m_\mu$ Summanden $1, 2, \dots \mu$, durch deren Addition zu $n-r$ die Zahl $n+\lambda-1$ erzeugt werden soll, wobei indessen keiner der Summanden $\lambda, \lambda+1, \dots \mu$ an die letzte Stelle gesetzt werden darf. Dass $\lambda+r-1 = \mu$, sowie dass die Zahl m_μ nur Null oder Eins sein kann, im letztern Falle aber alle übrigen m_h Null sind, bedarf wohl kaum der Erwähnung.

Noch allgemeiner als (24.) ist die folgende Formel: Unter der Voraussetzung, dass jede der Differenzen $\lambda_0-\lambda_1, \lambda_1-\lambda_2, \dots \lambda_{p-2}-\lambda_{p-1}$ mindestens den Werth $p-2$ hat, besteht die Gleichung:

$$(25.)\qquad C_{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{p-1}1^{r-p}} = \Sigma(-1)^{r-m}\frac{(m-p)!}{m_1!m_2!\dots m_\mu!}\begin{vmatrix} m_{\lambda_0} \\ m_{\lambda_1-1} \\ \vdots \\ m_{\lambda_{p-1}-p+1}\end{vmatrix}\cdot c_1^{m_1}c_2^{m_2}\dots c_\mu^{m_\mu},$$

wobei

$$(25^a.)\qquad \begin{vmatrix} m_{\lambda_0} \\ m_{\lambda_1-1} \\ \vdots \\ m_{\lambda_{p-1}-p+1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{\lambda_0} & m_{\lambda_0+1} & \dots & m_{\lambda_0+p-2} & \overline{m_{\lambda_0+p-1}+m_{\lambda_0+p}+\cdots+m_\mu} \\ m_{\lambda_1-1} & m_{\lambda_1} & \dots & m_{\lambda_1+p-3} & \overline{m_{\lambda_1+p-2}+\cdots+m_\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{\lambda_{p-1}-p+1} & & \dots & m_{\lambda_{p-1}-1} & \overline{m_{\lambda_{p-1}}+m_{\lambda_{p-1}+1}+\cdots+m_\mu-p+1} \end{vmatrix}$$

gesetzt ist, in der letzten Determinantenzeile aber ein etwa auftretendes m

mit negativem Index durch Null und m_0 durch $-m+p-1$ zu ersetzen ist. Das Summenzeichen in (25.) hat natürlich dieselbe Bedeutung wie in (24.). Der Beweis ist wohl am einfachsten so zu führen, dass man C in eine Determinante p^{ten} Grades umformt:

$$(26.)\qquad C_{\lambda_0\ldots\lambda_{p-1}1^{r-p}} = \left| c_\lambda \;\; c_{\lambda+1} \;\; \ldots \;\; c_{\lambda+p-2} \;\; \sum_{k=0}^{k=r-p} (-1)^k c_{\lambda+p-1-k}\, C_{1^{r-p-k}} \right|$$

(wobei rechts die schon mehrfach benutzte abgekürzte Bezeichnung angewendet ist) und dann (24.) für den Fall $\lambda = 1$ verwerthet. Aus dieser Umformung von C lässt sich auch ungefähr übersehen, wie der Ausdruck für C im allgemeinen Fall, wenn die Bedingung $\lambda_{h-1}-\lambda_h \geqq p-2$ wegfällt, sich gestalten muss. Es werden dabei ausser der Determinante (25^a.) noch gewisse ihrer Partialdeterminanten eine Rolle spielen. Näheres darüber vielleicht bei einer andern Gelegenheit.

Der Zusammenhang zwischen den Zahlen, welche bei diesen Entwickelungen auftreten, und den vorher (§ 2 bis 6) betrachteten wird, wie gesagt, für jede Dimension durch ein System linearer Gleichungen gegeben. Indem die Ausdrücke sämmtlicher C von der Dimension μ in den T zusammengestellt werden, soll die Anordnung des Systems derartig sein, dass die C in gewöhnlicher Reihenfolge geschrieben werden — d. h. dasjenige C steht voran, bei welchem ein höherer Index eine frühere Stelle einnimmt, — und dass die Indexreihe des T, welches in der h^{ten} Colonne steht, derjenigen des C in der h^{ten} Zeile conjugirt ist. Dabei tritt dann deutlich hervor, dass die Determinante des Systems den Werth Eins hat; denn jedes Glied der Diagonalreihe ist gleich Eins und alle folgenden verschwinden. In dem Ausdruck für $C_{\lambda_0\ldots\lambda_{r-1}}$ lautet nämlich der Zahlenfactor des Diagonalgliedes

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-1 & \lambda_0-\lambda_1 & \lambda_1-\lambda_2 & \ldots & \lambda_{r-2}-\lambda_{r-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \ldots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix}$$

und er ist in Folge von (8.) der Einheit gleich. Sei ferner $\lambda'_0\lambda'_1\ldots\lambda'_{r-1}$ eine Indexreihe, welche bei der gewählten Ordnung später als $\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{r-1}$ zu stehen kommt, so muss z. B. $\lambda_h > \lambda'_h$ sein, während alle voraufgehenden λ den entsprechenden λ' gleich sind. Irgend ein T, welches in dem Ausdruck für $C_{\lambda_0\ldots\lambda_{r-1}}$ dem Diagonalgliede folgt, wird also repräsentirt durch

$$T_{1^{\lambda_0-\lambda_1}\ldots(h-1)^{\lambda_{h-2}-\lambda_{h-1}}h^{\lambda_{h-1}-\lambda'_h}\ldots r^{\lambda'_{r-1}}}$$

und sein Zahlenfactor

$$\begin{pmatrix} \lambda_0-1 & \lambda_0-\lambda_1 & \dots & \lambda_{h-2}-\lambda_{h-1} & \lambda_{h-1}-\lambda'_h & \dots & \lambda'_{r-2}-\lambda'_{r-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{h-1}-1 & \lambda_h-1 & \dots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix}$$

verschwindet, weil er durch Anwendung von (8.) auf eine solche Form kommt, dass der erste untere Index λ_h-1 grösser ist als der darüberstehende λ'_h-1.

Nun ist leicht zu übersehen, wie sich der Factor von $C_{\lambda_0\dots\lambda_{r-1}}$ in der Entwickelung von $T_{\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{m-1}}$ als eine Determinante aus verallgemeinerten figurirten Zahlen darstellen wird. Man bilde die auf $\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_{r-1}$ folgenden Indexreihen bis zu derjenigen, welche zu $\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{m-1}$ conjugirt ist; dieselben seien $\lambda'_0\lambda'_1\dots\lambda'_{r_1-1}$; ... $\lambda_0^{(h)}\lambda_1^{(h)}\dots\lambda_{r_h-1}^{(h)}$. Ferner bilde man die conjugirten Reihen

$$1^{\lambda_0-\lambda_1}2^{\lambda_1-\lambda_2}\dots r^{\lambda_{r-1}}$$
$$\vdots$$
$$1^{\lambda_0^{(h-1)}-\lambda_1^{(h-1)}}2^{\lambda_1^{(h-1)}-\lambda_2^{(h-1)}}\dots r_{h-1}^{\lambda_{r_{h-1}-1}^{(h-1)}}.$$

Letztere liefern für die einzelnen Colonnen der Reihe nach die charakteristischen oberen, erstere für die einzelnen Zeilen die unteren Indices; so ist also

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^{(\varrho)}-1 & \lambda_0^{(\varrho)}-\lambda_1^{(\varrho)} & \lambda_1^{(\varrho)}-\lambda_2^{(\varrho)} & \dots \\ \lambda_0^{(\sigma)}-1 & \lambda_1^{(\sigma)}-1 & \lambda_2^{(\sigma)}-1 & \dots \end{pmatrix}$$

dasjenige Element der Determinante, welches gleichzeitig in der $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Colonne und in der σ^{ten} Zeile steht. Die Determinante ist schliesslich noch mit $(-1)^h$ zu multipliciren. Ihr Bau ist derartig, dass rechts auf jedes Glied der Hauptdiagonale zuerst eine Eins dann nur Nullen folgen. Wenn man sie also entweder nach den Elementen der ersten Colonne oder nach denen der letzten Zeile entwickelt, so werden die Factoren dieser Elemente durch Determinanten von gleichem Bau aber immer niedrigerem Grade dargestellt. Mit andern Worten: Zwischen den Zahlen der Aufgabe *C, T* und denen der Aufgabe *T, C* lassen sich zwei Gruppen von einfachen Beziehungen angeben. Im nächsten Abschnitt wird sich dies noch klarer und bestimmter aussprechen lassen.

8.

Für die Praxis dürfte das folgende Ergebniss aller bisherigen Betrachtungen nicht ohne Vortheil sein: Für jede Dimension lassen sich die

Resultate der vier Aufgaben, bei welchen die C eine Rolle spielen, in einer einzigen Quadrattafel zusammenfassen, und die successive Construction dieser Tafeln ist eine ausserordentlich einfache. Ich gebe zunächst die Tabellen für die acht ersten Dimensionen und füge nachher einige Bemerkungen über deren Einrichtung und Herstellung bei.

Tafeln für den Zusammenhang der C, T, K.

I. $C_1 = T_1 = K_1$.

II.

	T_{11}	T_2	
C_2	**1**	-1	C_{11}
C_{11}	1	**1**	C_2
	K_{11}	K_2	

III.

	T_{111}	T_{21}	T_3	
C_3	**1**	-2	$+1$	C_{111}
C_{21}	2	**1**	-1	C_{21}
C_{111}	1	1	**1**	C_3
	K_{111}	K_{21}	K_3	

IV.

	T_{1111}	T_{211}	T_{22}	T_{31}	T_4	
C_4	**1**	-3	$+1$	$+2$	-1	C_{1111}
C_{31}	3	**1**	-1	-1	$+1$	C_{211}
C_{22}	2	1	**1**	-1	0	C_{22}
C_{211}	3	2	1	**1**	-1	C_{31}
C_{1111}	1	1	1	1	**1**	C_4
	K_{1111}	K_{211}	K_{22}	K_{31}	K_4	

V.

	T_{1^5}	$T_{1^3 2}$	$T_{1 2^2}$	$T_{1^2 3}$	T_{23}	T_{14}	T_5	
C_5	**1**	-4	$+3$	$+3$	-2	-2	$+1$	C_{1^5}
C_{41}	4	**1**	-2	-1	$+2$	$+1$	-1	C_{21^3}
C_{32}	5	2	**1**	-1	-1	$+1$	0	$C_{2^2 1}$
C_{311}	6	3	1	**1**	-1	-1	$+1$	C_{31^2}
C_{221}	5	3	2	1	**1**	-1	0	C_{32}
C_{2111}	4	3	2	2	1	**1**	-1	C_{41}
C_{11111}	1	1	1	1	1	1	**1**	C_5
	K_{1^5}	$K_{1^3 2}$	$K_{1 2^2}$	$K_{1^2 3}$	K_{23}	K_{14}	K_5	

VI.

	T_{1^6}	$T_{1^4 2}$	$T_{1^2 2^2}$	$T_{1^3 3}$	T_{2^3}	T_{123}	$T_{1^2 4}$	T_{3^2}	T_{24}	T_{15}	T_6	
C_6	1	−5	+6	+4	−1	−6	−3	+1	+2	+2	−1	C_{1^6}
C_{51}	5	1	−3	−1	+1	+4	+1	−1	−2	−1	+1	C_{21^4}
C_{42}	9	3	1	−1	−1	0	+1	0	+1	−1	0	$C_{2^2 1^2}$
C_{411}	10	4	1	1	0	−2	−1	+1	+1	+1	−1	C_{31^3}
C_{33}	5	2	1	0	1	−2	+1	+1	−1	0	0	C_{2^3}
C_{321}	16	8	4	2	2	1	−1	−1	0	+1	0	C_{321}
C_{3111}	10	6	3	3	1	1	1	0	−1	−1	+1	C_{41^2}
C_{222}	5	3	2	1	1	1	0	1	−1	0	0	C_{3^2}
C_{2211}	9	6	4	3	3	2	1	1	1	−1	0	C_{42}
C_{21111}	5	4	3	3	2	2	2	1	1	1	−1	C_{51}
C_{111111}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	C_6
	K_{1^6}	$K_{1^4 2}$	$K_{1^2 2^2}$	$K_{1^3 3}$	K_{2^3}	K_{123}	$K_{1^2 4}$	K_{3^2}	K_{24}	K_{15}	K_6	

VII.

	T_{1^7}	$T_{1^5 2}$	$T_{1^3 2^2}$	$T_{1^4 3}$	T_{12^3}	$T_{1^2 23}$	$T_{1^3 4}$	$T_{2^2 3}$	T_{13^2}	T_{124}	$T_{1^2 5}$	T_{34}	T_{25}	T_{16}	T_7	
C_7	1	−6	+10	+5	−4	−12	−4	+3	+3	+6	+3	−2	−2	−2	+1	C_{1^7}
C_{61}	6	1	−4	−1	+3	+6	+1	−3	−2	−4	−1	+2	+2	+1	−1	C_{21^5}
C_{52}	14	4	1	−1	−2	+1	+1	+2	−1	0	−1	0	−1	+1	0	$C_{2^2 1^3}$
C_{511}	15	5	1	1	0	−3	−1	+1	+2	+2	+1	−2	−1	−1	+1	C_{31^4}
C_{43}	14	5	2	0	1	−2	+1	−1	+2	0	−1	−1	+1	0	0	$C_{2^3 1}$
C_{421}	35	15	6	3	2	1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	0	−1	0	C_{321^2}
C_{4111}	20	10	4	4	1	1	1	0	0	−2	−1	+1	+1	+1	−1	C_{41^3}
C_{331}	21	10	5	2	3	1	0	1	−1	−1	+1	+1	−1	0	0	C_{32^2}
C_{322}	21	11	6	3	3	2	0	1	1	−1	0	−1	+1	0	0	$C_{3^2 1}$
C_{3211}	35	20	11	8	6	4	2	2	1	1	−1	−1	0	+1	0	C_{421}
C_{31111}	15	10	6	6	3	3	3	1	1	1	1	0	−1	−1	+1	C_{51^2}
C_{2221}	14	9	6	4	4	3	1	2	2	1	0	1	−1	0	0	C_{43}
C_{22111}	14	10	7	6	5	4	3	3	2	2	1	1	1	−1	0	C_{52}
C_{211111}	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	−1	C_{61}
$C_{1111111}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	C_7
	K_{1^7}	$K_{1^5 2}$	$K_{1^3 2^2}$	$K_{1^4 3}$	K_{12^3}	$K_{1^2 23}$	$K_{1^3 4}$	$K_{2^2 3}$	K_{13^2}	K_{124}	$K_{1^2 5}$	K_{34}	K_{25}	K_{16}	K_7	

VIII.

	T_{1^8}	$T_{1^6 2}$	$T_{1^4 2^2}$	$T_{1^5 3}$	$T_{1^2 2^3}$	$T_{1^3 23}$	$T_{1^4 4}$	T_{2^4}	$T_{12^2 3}$	$T_{1^2 3^2}$	$T_{1^2 24}$	$T_{1^3 5}$	T_{23^2}	$T_{2^2 4}$	T_{134}	T_{125}	$T_{1^2 6}$	T_{4^2}	T_{35}	T_{26}	T_{17}	T_8	
C_8	**1**	−7	+15	+6	−10	−20	−5	+1	+12	+6	+12	+4	−3	−3	−6	−6	−3	+1	+2	+2	+2	−1	C_{1^8}
C_{71}	7	**1**	−5	−1	+6	+8	+1	−1	−9	−3	−6	−1	+3	+3	+4	+4	+1	−1	−2	−2	−1	+1	C_{21^6}
C_{62}	20	5	**1**	−1	−3	+2	+1	+1	+3	−2	−1	−1	−1	−2	+2	0	+1	0	0	+1	−1	0	$C_{2^2 1^4}$
C_{611}	21	6	1	**1**	0	−4	−1	0	+3	+3	+3	+1	−2	−1	−4	−2	−1	+1	+2	+1	+1	−1	C_{31^5}
C_{53}	28	9	3	0	**1**	−2	+1	−1	+1	+2	−1	−1	−1	+2	−2	0	+1	0	+1	−1	0	0	$C_{2^3 1^2}$
C_{521}	64	24	8	4	2	**1**	−1	0	−2	−1	+2	+1	+2	0	0	−1	−1	0	−1	0	+1	0	C_{321^3}
C_{5111}	35	15	5	5	1	1	**1**	0	0	0	−3	−1	0	+1	+2	+2	+1	−1	−1	−1	−1	+1	C_{41^4}
C_{44}	14	5	2	0	1	0	0	**1**	−3	+1	+2	−1	+2	−2	−2	+2	0	+1	−1	0	0	0	C_{2^4}
C_{431}	70	30	13	5	6	2	0	3	**1**	−1	−1	+1	−1	0	+3	−1	−1	−1	0	+1	0	0	$C_{32^2 1}$
C_{422}	56	26	12	6	5	3	0	2	1	**1**	−1	0	−1	+1	−1	+1	0	0	+1	−1	0	0	$C_{3^2 1^2}$
C_{4211}	90	45	21	15	9	6	3	3	2	1	**1**	−1	0	−1	−1	+1	+1	+1	0	0	−1	0	C_{421^2}
C_{41111}	35	20	10	10	4	4	4	1	1	1	1	**1**	0	0	0	−2	−1	0	+1	+1	+1	−1	C_{51^3}
C_{332}	42	21	11	5	6	3	0	3	2	1	0	0	**1**	−1	−1	+1	0	+1	−1	0	0	0	$C_{3^2 2}$
C_{3311}	56	30	16	10	9	5	2	6	3	1	1	0	1	**1**	−1	−1	+1	0	+1	−1	0	0	C_{42^2}
C_{3221}	70	40	23	15	13	9	3	7	5	4	2	0	2	1	**1**	−1	0	−1	0	+1	0	0	C_{431}
C_{32111}	64	40	24	20	14	11	8	8	6	4	4	2	2	2	1	**1**	−1	0	−1	0	+1	0	C_{521}
C_{311111}	21	15	10	10	6	6	6	3	3	3	3	3	1	1	1	1	**1**	0	0	−1	−1	+1	C_{61^2}
C_{2222}	14	9	6	4	4	3	1	3	2	2	1	0	1	1	1	0	0	**1**	−1	0	0	0	C_{4^2}
C_{22211}	28	19	13	10	9	7	4	6	5	4	3	1	3	2	2	1	0	1	**1**	−1	0	0	C_{53}
C_{221111}	20	15	11	10	8	7	6	6	5	4	4	3	3	3	2	2	1	1	1	**1**	−1	0	C_{62}
$C_{2111111}$	7	6	5	5	4	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	1	1	1	**1**	−1	C_{71}
$C_{11111111}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	C_8
	K_{1^8}	$K_{1^6 2}$	$K_{1^4 2^2}$	$K_{1^5 3}$	$K_{1^2 2^3}$	$K_{1^3 23}$	$K_{1^4 4}$	K_{2^4}	$K_{12^2 3}$	$K_{1^2 3^2}$	$K_{1^2 24}$	$K_{1^3 5}$	K_{23^2}	$K_{2^2 4}$	K_{134}	K_{125}	$K_{1^2 6}$	K_{4^2}	K_{35}	K_{26}	K_{17}	K_8	

Für den Gebrauch der Tafeln ist zu merken: Von den Bezeichnungen der Zeilen und Colonnen gehören zusammen links und oben, rechts und unten. Die gesuchten Zahlen findet man in der Zeile oder Colonne, welche unmittelbar an die gesuchte Function sich anschliesst; dabei hat man aber nur bis zu der ausgezeichneten Diagonale vorzugehen, während alle Felder jenseits derselben für die betreffende Entwickelung Nullen enthalten z. B.

$$C_{53} = 28T_{1^8} + 9T_{1^6 2} + 3T_{1^4 2^2} + T_{1^2 2^3} = -K_{26} + K_{53},$$
$$T_{1^4 2^2} = 15C_8 - 5C_{71} + C_{62},$$
$$K_{1^2 6} = c_1^2 c_6 = C_8 + 2C_{71} + C_{62} + C_{61^2}.$$

Bei der Bezeichnung der Zeilen sind links die C in gewöhnlicher Folge geordnet, rechts derart, dass auf derselben Zeile conjugirte Indexreihen stehen. Oben die T, unten die K folgen so auf einander, dass die Indexreihe der h^{ten} Colonne mit derjenigen auf der rechten Seite der h^{ten} Zeile übereinstimmt. Daraus folgt z. B., dass ein T oder K desto früher gesetzt ist, je mehr Indices es hat.

Berechnet sind die Zahlen rechts von der Hauptdiagonale zeilenweise nach (23.), die unteren Zeilen zuerst. Um die Felder links von der Diagonale zu füllen, kann man zunächst mit Vortheil (9.) anwenden. Weil es, wie bemerkt, erlaubt ist, die Anzahl der t gleich der Anzahl m von Indices des betreffenden T zu setzen, wird man aus (9.) Nutzen ziehen, sobald $m.r < 2\mu$ ist; dann findet sich nämlich die Zahl auf der rechten Seite von (9.) schon in der Tafel für eine niedrigere Dimension. So führt z. B. die Entwickelung von C_{422} nach den T auf die vierte Dimension für die T mit vier, auf die siebente für die mit fünf Indices, andrerseits werden die Zahlen dieser Entwickelung für die T mit sechs Indices bei der zehnten Dimension Verwendung finden. Nimmt man hinzu, dass eine Reihe von Zahlen Binomialcoefficienten sind, so lassen sich viele Felder ohne weiteres ausfüllen, z. B. bei der achten Dimension 149 von 253 (einschliesslich der Diagonalfelder); und rechnet man die C, welche nur zwei Indices höher als Eins haben, hinzu, da deren Entwickelungszahlen ganz besonders leicht anzugeben sind, so erhöht sich jene Zahl auf 211. Die übrigen Felder werden dann, indem man zeilenweise von oben nach unten vorschreitet, gleichfalls mit geringer Mühe nach (11.) oder (13.) ausgefüllt.

Die successive Construction der Tafeln ist also höchst einfach. Trotzdem wird es wünschenswerth sein, gewisse Proben für die Richtigkeit

des schliesslichen Resultats zu besitzen. In dieser Beziehung kann Folgendes erwähnt werden:

α) Schneidet man aus einer solchen Tafel irgend ein Quadrat von mindestens vier Feldern so aus, dass ein Theil der Hauptdiagonale darin eine Diagonale vorstellt, so besteht, falls $a_1, a_2, \dots a_h$ die Zahlen in der einen Reihe von Randfeldern dieses Quadrats und $b_1, b_2, \dots b_h$ die entsprechenden in der parallelen Reihe von Randfeldern bedeuten, die Gleichung:

$$(27.)\qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_h b_h = 0,$$

wobei es gleichgültig ist, ob man die horizontal oder die vertikal neben einander liegenden Randfelder gewählt hat. Die Allgemeingültigkeit von (27.) folgt aus den Bemerkungen am Schluss von § 7. Weil aber die letzte Zeile jeder Tafel nur Eins enthält, so ergiebt sich der Zusatz: „Die Summe aus der Eins eines Diagonalfeldes und allen in derselben Zeile rechts folgenden Zahlen ist stets Null". Daher beiläufig: „Sind $t_1, t_2, \dots t_\mu$ die von -1 verschiedenen Werthe von $\sqrt[\mu+1]{-1}$, falls μ gerade, oder von $\sqrt[\mu+1]{+1}$, falls μ ungerade, so ist die Summe aller T von irgend einer der Dimensionen 2, 3, ... μ stets gleich Null". Alle c und alle K sind nämlich in diesem Falle gleich Eins, ferner $C_1 = C_2 = \cdots C_\mu = 1$ und alle andern C von den Dimensionen 2, 3, ... μ verschwinden. Noch manche andere nicht uninteressante Beziehungen könnten aus (27.) geschlossen werden, z. B. durch Hinzunahme von (24.).

β) In der ersten Colonne sind stets zwei Zahlen gleich, wenn die Indexreihen der zugehörigen C conjugirt sind. Der Satz lässt sich als Formel so aussprechen:

$$(28.)\qquad \begin{pmatrix} \mu-1 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \lambda_2-1 & \dots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu-1 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ \lambda'_0-1 & \lambda'_1-1 & \dots & \dots & \lambda'_{r_1-1}-1 \end{pmatrix},$$

vorausgesetzt, dass $\lambda_0, \dots \lambda_{r-1}$ und $\lambda'_0, \dots \lambda'_{r_1-1}$ conjugirte Indexreihen von der Dimension μ sind. Den Beweis erhält man, indem man beide Seiten von (28.) nach (11.) entwickelt. Auf der rechten Seite von (11.) fällt nämlich im vorliegenden Falle das erste Glied fort; von den übrigen findet sich zu jedem Gliede der einen Entwickelung ein entsprechendes in der andern derart, dass die zugehörigen Indexreihen conjugirt sind. Da nun der Satz, wie die Anschauung lehrt, für die niedrigsten Dimensionen richtig ist, so ist er es allgemein. Eine ähnliche Eigenschaft der Zahlen in der letzten Colonne lässt sich auch leicht nachweisen.

9.

Von den im Eingang der Arbeit erwähnten sechs Aufgaben sind ***T, K*** und ***K, T*** eigentlich noch zu besprechen. Erstere ist oft und auf verschiedene Art gelöst, letztere nur in wenigen Specialfällen behandelt. Hier ergiebt sich eine gemeinsame Lösungsart für beide Aufgaben. Jede Zahl einer solchen Entwickelung stellt sich dar als eine Summe von Producten aus je zwei Factoren, deren jeder zu einer der im Voraufgehenden behandelten Zahlenklassen gehört; und zwar ist bei der Aufgabe ***K, T*** jeder derartige Factor eine von den Zahlen, wie sie in den §§ 2 bis 6 untersucht sind, bei ***T, K*** gehört er zur Zahlengruppe des § 7. Aus den vorhin besprochenen Tafeln lässt sich also durch eine kleine Nebenrechnung der Coefficient eines bestimmten K in der Entwickelung eines T sowie auch derjenige eines T in der Entwickelung eines K entnehmen. Für die Theorie mögen hier noch recht interessante Folgerungen sich ergeben; an diese Untersuchung bin ich aber bis jetzt nicht herangetreten. Bemerkenswerth ist z. B. die Gleichung:

$$(29.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\begin{pmatrix} \mu-1 & \mu & 0 \dots & 0 \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \dots & m_{r_1-1} \\ \lambda'_0-1 & \lambda'_1-1 & \dots & \lambda'_{r_1-1}-1 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \frac{\mu!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\dots(\mu!)^{m_\mu}}, \end{aligned}\right.$$

wobei $\lambda_0, \dots \lambda_{r-1}$ und $\lambda'_0, \dots \lambda'_{r_1-1}$ conjugirte Indexreihen bedeuten, die Summe über alle verschiedenen Reihen $\lambda_0, \dots \lambda_{r-1}$ von der Dimension μ zu erstrecken ist, $m, m_1, \dots m_\mu$ für die Summation constant sind und zwar so, dass

$$(29^a.)\quad \left\{\begin{aligned} m_1+m_2+\dots+m_\mu &= m, \\ 1.m_1+2.m_2+\dots+\mu.m_\mu &= \mu \end{aligned}\right.$$

ist. Die Formel folgt aus dem polynomischen Satz. Ferner verdient Beachtung die aus (3.) sich ergebende Gleichung:

$$(30.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \dots & m_{r-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m'-1 & m'_1 & \dots & m'_{r_1-1} \\ \lambda'_0-1 & \lambda'_1-1 & \dots & \lambda'_{r_1-1}-1 \end{pmatrix} \\ &= \Sigma\begin{pmatrix} m-1 & m_1 & \dots & m_{r_1-1} \\ \lambda'_0-1 & \lambda'_1-1 & \dots & \lambda'_{r_1-1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m'-1 & m'_1 & \dots & m'_{r-1} \\ \lambda_0-1 & \lambda_1-1 & \dots & \lambda_{r-1}-1 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right.$$

wo die λ und λ' wieder conjugirte Reihen, die m und m' aber beliebige, den Gleichungen (29^a.) genügende, in der Summe constante Zahlen sind. Aehnliche Formeln für die Zahlen des § 7 könnte man aus dem bekannten Ausdruck in den K für die Potenzsummen der t und aus dem Satz (4.) entnehmen.

Insterburg, den 16. April 1881.

Kurze Ableitung der *Riemann*schen Thetaformel.

(Von Herrn *F. Prym* in Würzburg.)

In einer soeben erschienenen Arbeit*) habe ich eine von *Riemann* herrührende Formel, die für die Theorie der Thetafunctionen als eine fundamentale anzusehen ist, abgeleitet und ich erwähnte zugleich, dass das zur zur Gewinnung derselben angewandte Verfahren durch ein bedeutend einfacheres ersetzt werden könne. Dieses neue, im Jahre 1880 von mir gefundene Verfahren erlaube ich mir im Folgenden mitzutheilen, während ich bezüglich alles Uebrigen auf die erwähnte Arbeit verweisen muss.

Die p-fach unendliche ϑ-Reihe:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty}\cdots\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(m_{\mu'}+\frac{\varepsilon_{\mu'}}{2}\right)+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)},$$

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu},$$

bei der die ε, ε' ganze Zahlen bezeichnen, und die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Constanten a nur der für die Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}m_\mu m_{\mu'}$ wesentlich negativ sei, unterworfen sein sollen, stellt eine einwerthige und für endliche v auch stetige Function der complexen Veränderlichen $v_1, \ldots, v_p$ dar, welche den Gleichungen:

$$\text{(I.)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_\nu+\pi i|\ldots|v_p) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_\nu|\ldots|v_p)\,e^{\varepsilon_\nu\pi i},$$

$$\text{(II.)}\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1+a_{1\nu}|\ldots|v_p+a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_p)\,e^{-2v_\nu-a_{\nu\nu}-\varepsilon'_\nu\pi i},$$

$$\nu = 1, \ldots, p,$$

*) Untersuchungen über die *Riemann*sche Thetaformel und die *Riemann*sche Charakteristikentheorie. Leipzig, Teubner.

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche v auch immer stetige Function $f(v_1|\ldots|v_p)$ der complexen Veränderlichen $v_1, \ldots, v_p$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned} f(v_1|\ldots|v_\nu+\pi i|\ldots|v_p) &= f(v_1|\ldots|v_\nu|\ldots|v_p)e^{\varepsilon_\nu \pi i}, \\ f(v_1+a_{1\nu}|\ldots|v_p+a_{p\nu}) &= f(v_1|\ldots|v_p)e^{-2v_\nu-a_{\nu\nu}-\varepsilon'_\nu \pi i}, \end{aligned} \qquad \nu=1,\ldots,p,$$

so kann sie sich von der Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}(v_1|\ldots|v_p)$ nur um einen von den sämmtlichen Grössen v unabhängigen Factor unterscheiden.

Im Folgenden soll das System:

$$v_1+\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{1\mu}+\frac{\varkappa'_1}{2}\pi i \quad | \quad \ldots\ldots \quad | \quad v_p+\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\frac{\varkappa_\mu}{2}a_{p\mu}+\frac{\varkappa'_p}{2}\pi i,$$

wobei unter den $\varkappa$, $\varkappa'$ ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit $\left(v+\left|\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)$, und entsprechend das System $v_1|\ldots|v_p$ mit (v) bezeichnet werden; auch soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten, der Zahlencomplex $\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}$, der die Charakteristik der ϑ-Reihe genannt wird, durch $\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}$ oder noch einfacher durch $[\varepsilon]$ repräsentirt werden. Wie sich durch Betrachtung der die Function $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))$ definirenden Reihe leicht ergiebt, bestehen dann die Relationen:

$$(A.)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\left(v+\left|\begin{matrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{matrix}\right|\right)\right) \\ &= \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa \\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}((v))\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{4}-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varkappa_\mu\left(v_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\frac{\varkappa'_\mu}{2}\pi i\right)}, \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} &(B_1.) \quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu\pm2 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)), \\ &(B_2.) \quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu\pm2 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)) = (-1)^{\varepsilon_\nu}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_\nu \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)), \end{aligned} \qquad \nu=1,\ldots,p,$$

$$(C.)\quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((-v)) = (-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu}\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((v)),$$

aus denen für ganzzahlige λ, λ' noch die Formel:

$$(D.)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(\left(v+\left|\begin{matrix}2\lambda\\ 2\lambda'\end{matrix}\right|\right)\right) \\ &= \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\lambda_\mu\lambda_{\mu'}-2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\lambda_\mu v_\mu+\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\lambda'_\mu+\varepsilon'_\mu\lambda_\mu)\pi i} \end{aligned}\right.$$

folgt. Die Gleichungen ($B_1.$), ($B_2.$) zeigen, dass im Ganzen nur 2^{2p} wesentlich verschiedene Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((v))$ existiren; als Repräsentanten derselben können diejenigen 2^{2p} angesehen werden, deren Charakteristiken nur die Zahlen 0, 1 als Elemente enthalten. Charakteristiken von dieser Art sollen Normalcharakteristiken genannt werden.

Mit Rücksicht auf die nachstehende Untersuchung verstehe man jetzt unter u_ν, v_ν, w_ν, t_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) $4p$ unabhängige Veränderliche und definire die $4p$ Grössen u'_ν, v'_ν, w'_ν, t'_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) als lineare Functionen derselben durch die Gleichungen:

$$(S.)\quad \begin{cases} u_\nu+v_\nu+w_\nu+t_\nu = 2u'_\nu, \\ u_\nu+v_\nu-w_\nu-t_\nu = 2v'_\nu, \\ u_\nu-v_\nu+w_\nu-t_\nu = 2w'_\nu, \\ u_\nu-v_\nu-w_\nu+t_\nu = 2t'_\nu, \end{cases} \qquad \nu = 1, \ldots, p.$$

Beachtet man dann, dass durch passende Verbindung dieser Gleichungen (*S.*) die Gleichungen:

$$(S'.)\quad \begin{cases} u'_\nu+v'_\nu+w'_\nu+t'_\nu = 2u_\nu, \\ u'_\nu+v'_\nu-w'_\nu-t'_\nu = 2v_\nu, \\ u'_\nu-v'_\nu+w'_\nu-t'_\nu = 2w_\nu, \\ u'_\nu-v'_\nu-w'_\nu+t'_\nu = 2t_\nu, \end{cases} \qquad \nu = 1, \ldots, p,$$

entstehen, so erkennt man, dass in allen Formeln, in denen neben den Grössen (u), (v), (w), (t) als unabhängigen Veränderlichen die Grössen (u'), (v'), (w'), (t') auftreten, unbeschadet der Richtigkeit die ersteren mit den letzteren beziehlich vertauscht werden können.

Nach diesen Vorbereitungen bilde man das Product:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u+v+w+t))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u+v-w-t))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u-v+w-t))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u-v-w+t)),$$

betrachte dasselbe, indem man zunächst von den Grössen (v), (w), (t) absieht, als Function der unabhängigen Veränderlichen $2u_1, \ldots, 2u_p$ und bezeichne es entsprechend mit $\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p)$; die Function φ ist dann definirt durch die Gleichung:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p) \\ = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u+v+w+t))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u+v-w-t))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u-v+w-t))\,\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}((u-v-w+t)). \end{cases}$$

Lässt man nun in dieser Gleichung das eine Mal u_ν in $u_\nu+\frac{\pi i}{2}$, das andere Mal $u_1|\ldots|u_p$ in $u_1+\frac{a_{1\nu}}{2}|\ldots|u_p+\frac{a_{p\nu}}{2}$ übergehen und wendet jedes Mal die Formel (*A.*) an, so erhält man die Relationen:

$$\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_\nu+\pi i|\ldots|2u_p) = \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\quad\varepsilon_\nu\quad\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu+1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_\nu|\ldots|2u_p),$$

$$\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1+a_{1\nu}|\ldots|2u_p+a_{p\nu}) = \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu+1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\quad\varepsilon'_\nu\quad\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p)e^{-4u_\nu-a_{\nu\nu}},$$

$$\nu=1,\ldots,p.$$

Ersetzt man dagegen das eine Mal ε_ν durch $\varepsilon_\nu\pm2$, das andere Mal ε'_ν durch $\varepsilon'_\nu\pm2$ und wendet die Formeln (B_1.), (B_2.) an, so entstehen die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\pm2\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\quad\varepsilon'_\nu\quad\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) &= \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)),\\ \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\quad\varepsilon_\nu\quad\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\pm2\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)) &= \varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_\nu\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_\nu\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u)),\end{aligned}\right\}\quad \nu=1,\ldots,p.$$

Setzt man jetzt weiter:

$$(2.)\qquad \Phi(2u_1|\ldots|2u_p) = \sum_{[\varepsilon]}\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}(2u_1|\ldots|2u_p)$$

— wobei die Summation auf der rechten Seite über alle Terme zu erstrecken ist, die aus dem allgemeinen Gliede hervorgehen, wenn man darin an Stelle der $2p$ Buchstaben $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p,\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_p$ die 2^{2p} Variationen der Elemente 0, 1 zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung, oder, was dasselbe, an Stelle von $\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}$ der Reihe nach die 2^{2p} Normalcharakteristiken treten lässt — und berücksichtigt, dass in Folge der beiden letzten für die Function φ aufgestellten Relationen bei der rechts stehenden Summe nur die Anordnung der Summanden geändert, der Werth der Summe selbst also in keiner Weise alterirt wird, wenn man in dem hinter dem Summenzeichen stehenden Ausdrucke $\varphi\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}((2u))$ ε_ν durch $\varepsilon_\nu+1$ oder ε'_ν durch $\varepsilon'_\nu+1$ ersetzt, so ergeben sich aus den beiden ersten für die Function φ aufgestellten Relationen, indem man bei jeder derselben an Stelle von $\begin{bmatrix}\varepsilon_1\ldots\varepsilon_p\\ \varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_p\end{bmatrix}$ der Reihe nach die sämmtlichen 2^{2p} Normalcharakteristiken treten lässt und die 2^{2p} so entstehenden Gleichungen addirt, für die unter (2.) definirte Function Φ die Relationen:

$$\begin{aligned} \Phi(2u_1|\ldots|2u_\nu+\pi i|\ldots|2u_p) &= \Phi(2u_1|\ldots|2u_\nu|\ldots|2u_p), \\ \Phi(2u_1+a_{1\nu}|\ldots|2u_p+a_{p\nu}) &= \Phi(2u_1|\ldots|2u_p)e^{-4u_\nu-a_{\nu\nu}}, \end{aligned} \quad \nu=1,\ldots,p.$$

Nach dem im Eingange Bemerkten folgt aber hieraus, dass die Function Φ sich von der Function $\vartheta\begin{bmatrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{bmatrix}((2u))$ — die in der Folge mit Unterdrückung der Charakteristik durch $\vartheta((2u))$ bezeichnet werden soll — nur um einen von den sämmtlichen Grössen u unabhängigen Factor unterscheiden kann. Berücksichtigt man dann noch, dass das oben mit φ bezeichnete ϑ-Product seinen Werth nicht ändert, wenn man irgend zwei der Variablensysteme (u), (v), (w), (t) mit einander vertauscht, so erkennt man, dass auch die Function Φ eine symmetrische Function der Variablensysteme (u), (v), (w), (t) ist und dass dieselbe daher als Function von $(2v)$, $(2w)$, oder $(2t)$ betrachtet dieselben Eigenschaften wie als Function von $(2u)$ besitzt. Daraus ergiebt sich, unter Hinzuziehung des schon vorher gewonnenen Resultates, dass

$$\Phi=\Phi_1.\vartheta((2u)),\quad \Phi_1=\Phi_2.\vartheta((2v)),\quad \Phi_2=\Phi_3.\vartheta((2w)),\quad \Phi_3=C.\vartheta((2t))$$

gesetzt werden darf, wobei Φ_1 von den Variablen (u), Φ_2 von den Variablen (u), (v), Φ_3 von den Variablen (u), (v), (w) unabhängig ist, endlich C eine von allen Variablen (u), (v), (w), (t) unabhängige Constante bezeichnet, und man gelangt auf diese Weise zu der Gleichung:

$$(3.)\qquad \Phi(2u_1|\ldots|2u_p) = C\vartheta((2u))\vartheta((2v))\vartheta((2w))\vartheta((2t)).$$

Führt man den so für Φ gefundenen Ausdruck in die Gleichung (2.) ein und ersetzt zugleich die auf der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende Function φ durch das mit ihr identische, unter (1.) angegebene ϑ-Product, nachdem man in dasselbe mit Hülfe der Gleichungen (S) die Grössen $(2u')$, $(2v')$, $(2w')$, $(2t')$ eingeführt hat, so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} &C\vartheta((2u))\vartheta((2v))\vartheta((2w))\vartheta((2t)) \\ &= \sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon]((2u'))\vartheta[\varepsilon]((2v'))\vartheta[\varepsilon]((2w'))\vartheta[\varepsilon]((2t')). \end{aligned}\right.$$

Zum Zwecke der Bestimmung der Grösse C, die zwar in Bezug auf die Variablen (u), (v), (w), (t) constant ist, die aber möglicherweise von den ϑ-Modulen $a_{\mu\mu'}$ abhängig sein könnte, soll zunächst aus der letzten Gleichung eine allgemeinere abgeleitet werden. Zu dem Ende lasse man in derselben:

$$(2u),\ (2v),\ (2w),\ (2t)\quad \text{in}\quad \left(2u+\left|\begin{matrix}\eta\\\eta'\end{matrix}\right|\right),\ \left(2v+\left|\begin{matrix}\eta\\\eta'\end{matrix}\right|\right),\ \left(2w+\left|\begin{matrix}\eta\\\eta'\end{matrix}\right|\right),\ \left(2t+\left|\begin{matrix}\eta\\\eta'\end{matrix}\right|\right)$$

beziehlich übergehen, indem man unter $\eta_1, \ldots, \eta_p, \eta_1', \ldots, \eta_p'$ die $2p$ Ele-

mente einer beliebigen der 2^{2p} Normalcharakteristiken versteht, und berücksichtige, dass dadurch:

$$(2u'),\ (2v'),\ (2w'),\ (2t')\quad \text{in}\quad \left(2u'+\left|\begin{matrix}2\eta\\2\eta'\end{matrix}\right|\right),\ (2v'),\ (2w'),\ (2t')$$

beziehlich übergehen. Wendet man dann auf die linke Seite der so entstandenen Gleichung die Formel (*A.*), auf die rechte die Formel (*D.*) an und vertauscht zugleich die Variablensysteme (u), (v), (w), (t) mit den Variablensystemen (u'), (v'), (w'), (t') beziehlich, so erhält man die gewünschte allgemeinere Gleichung in der Form:

$$(5.)\quad \begin{cases} C\vartheta[\eta]((2u'))\,\vartheta[\eta]((2v'))\,\vartheta[\eta]((2w'))\,\vartheta[\eta]((2t')) \\ = \sum\limits_{[\varepsilon]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\,\vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon]((2v))\,\vartheta[\varepsilon]((2w))\,\vartheta[\varepsilon]((2t)). \end{cases}$$

Ersetzt man jetzt in der Gleichung (4.) den Buchstaben ε durch den Buchstaben η und führt auf der rechten Seite der so geänderten Gleichung an Stelle des allgemeinen Gliedes den aus (5.) dafür sich ergebenden Ausdruck ein, so erhält man:

$$C^2\vartheta((2u))\,\vartheta((2v))\,\vartheta((2w))\,\vartheta((2t))$$

$$= \sum_{[\varepsilon]}\vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon]((2v))\,\vartheta[\varepsilon]((2w))\,\vartheta[\varepsilon]((2t))\left\{\sum_{[\eta]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\right\},$$

und findet hieraus, indem man berücksichtigt, dass die auf der rechten Seite vorkommende in besondere Klammern eingeschlossene Summe nur dann einen von Null verschiedenen Werth, und zwar den Werth 2^{2p} besitzt, wenn alle Grössen ε, ε' den Werth Null haben:

$$C^2 = 2^{2p},\quad C = \pm 2^p,$$

wobei das Vorzeichen, welches von den ϑ-Modulen $a_{\mu\mu'}$ abhängig sein könnte, noch zu bestimmen ist.

Die die Function $\vartheta[\varepsilon]((v))$ darstellende Reihe ist, solange die Grössen $a_{\mu\mu'}$ der angegebenen, zur Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, die für das Folgende stets als erfüllt vorausgesetzt sei, genügen, immer eine stetige Function dieser Grössen, auch können bei gegebenen Werthen der $a_{\mu\mu'}$ die Werthe der Grössen $v_1, v_2, \dots, v_p$ stets so bestimmt werden, dass die Function $\vartheta[\varepsilon]((v))$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth erhält; berücksichtigt man dies, so zeigt die Gleichung (4.), dass sich C als Quotient zweier in Bezug auf die Grössen $a_{\mu\mu'}$

stetiger Functionen darstellen lässt, deren Verschwinden bei festgehaltenen Werthen der $a_{\mu\mu'}$ durch passende Wahl der den Werth von C in keiner Weise beeinflussenden Werthe von (u), (v), (w), (t) immer vermieden werden kann. Daraus folgt aber zunächst, dass die Grösse C eine stetige Function der sämmtlichen Grössen $a_{\mu\mu'}$ ist, und weiter dann mit Rücksicht auf das schon oben Gefundene, dass dieselbe entweder stets den Werth $+2^p$ oder stets den Werth -2^p besitzt, jenachdem sie für irgend ein System von Werthen der $a_{\mu\mu'}$ den Werth $+2^p$ oder den Werth -2^p hat. Lässt man aber in der Gleichung (4.) sämmtliche Grössen $a_{\mu\mu'}$, bei denen $\mu \gtrless \mu'$ ist, gegen 0, zugleich die reellen Theile der Grössen a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{pp} gegen $-\infty$ gehen, berücksichtigt auch, dass unter dem Einflusse dieses Aenderungsprocesses die Function $\vartheta[\varepsilon]((v))$, welche Werthe auch ihre Argumente besitzen, immer gegen die Grenze 0 convergirt, wenn auch nur eine der Grössen ε_1, ε_2, $\dots$, ε_p von 0 verschieden ist, gegen die Grenze 1 dagegen, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p = 0$ ist, und dass daher das auf der linken Seite von (4.) stehende ϑ-Product gegen 1, die auf der rechten Seite stehende Summe gegen 2^p convergirt, so erkennt man, dass C als Quotient dieser gegen 2^p und 1 beziehlich convergirenden Grössen jedenfalls den Werth $+2^p$ besitzt, wenn bei gegen 0 convergirenden $a_{\mu\mu'}$ $(\mu \lesseqgtr \mu')$ die reellen Theile der Grössen a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{pp} hinreichend weit in's Negative geschoben sind, und es ist daher auch für jedes System von Werthen der $a_{\mu\mu'}$:

$$C = 2^p.$$

Führt man den gefundenen Werth an Stelle von C in die Gleichung (4.) ein und vertauscht zugleich die Variablensysteme $(2u)$, $(2v)$, $(2w)$, $(2t)$ mit den Variablensystemen $(2u')$, $(2v')$, $(2w')$, $(2t')$ beziehlich, so erhält man die

Riemann'sche Thetaformel:

$$(6.)\quad \begin{cases} 2^p\vartheta((2u'))\vartheta((2v'))\vartheta((2w'))\vartheta((2t')) \\ = \sum\limits_{[\varepsilon]} \vartheta[\varepsilon]((2u))\vartheta[\varepsilon]((2v))\vartheta[\varepsilon]((2w))\vartheta[\varepsilon]((2t)). \end{cases}$$

Lässt man in dieser Formel unter Benutzung der Elemente dreier willkürlicher Charakteristiken $[\eta]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$:

$$(2u),\quad (2v),\quad (2w),\quad (2t)$$

in

$$\left(2u+\begin{vmatrix}2\eta\\2\eta'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2v+\begin{vmatrix}\varrho\\\varrho'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2w+\begin{vmatrix}\sigma\\\sigma'\end{vmatrix}\right),\qquad \left(2t-\begin{vmatrix}\varrho+\sigma\\\varrho'+\sigma'\end{vmatrix}\right)$$

beziehlich übergehen und berücksichtigt, dass dadurch

$$(2u'),\quad (2v'),\quad (2w'),\quad (2t')$$

in

$$\left(2u'+\left|\begin{matrix}\eta\\ \eta'\end{matrix}\right|\right),\quad \left(2v'+\left|\begin{matrix}\eta+\varrho\\ \eta'+\varrho'\end{matrix}\right|\right),\quad \left(2w'+\left|\begin{matrix}\eta+\sigma\\ \eta'+\sigma'\end{matrix}\right|\right),\quad \left(2t'+\left|\begin{matrix}\eta-\varrho-\sigma\\ \eta'-\varrho'-\sigma'\end{matrix}\right|\right)$$

beziehlich übergehen, so erhält man unter Anwendung der Formeln (A.) und (D.) die allgemeinere Formel:

$$(7.)\left\{\begin{array}{l} 2^p\vartheta[\eta]((2u'))\,\vartheta[\eta+\varrho]((2v'))\,\vartheta[\eta+\sigma]((2w'))\,\vartheta[\eta-\varrho-\sigma]((2t')) = \\ \sum\limits_{[\varepsilon]}(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu+\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}\vartheta[\varepsilon]((2u))\,\vartheta[\varepsilon+\varrho]((2v))\,\vartheta[\varepsilon+\sigma]((2w))\,\vartheta[\varepsilon-\varrho-\sigma]((2t)),\end{array}\right.$$

welche die Formel (6.) selbst als speciellen Fall umfasst und zugleich die allgemeinste derartige Formel ist.

Würzburg, 1882.

Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species.

(Von Herrn *H. Schroeter* in Breslau *).)

Der bekannte Satz der Ebene, dass die drei Strahlenpaare, welche von einem beliebigen Punkte nach den drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits hingehen, einer Strahleninvolution angehören, lässt erkennen, wenn man die Strahleninvolution zu einer orthogonalen macht, dass die drei Kreise, welche über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits als Durchmessern beschrieben werden, durch dieselben Punkte gehen müssen oder einem Kreisbüschel angehören, also wie bekannt ist, ihre Mittelpunkte in einer Geraden haben u. s. w. Diese Eigenschaft der ebenen Figur hat ein Analogon im Raume, wenn man an Stelle der drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits die drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders und an Stelle des Kreises ein orthogonales Hyperboloid treten lässt. Um diese räumliche Eigenschaft zu erkennen, bedürfen wir nur des folgenden ebenfalls bekannten Satzes:

Gehen durch einen Punkt $\mathfrak{O}$ des Raumes zwei Paare rechtwinkliger Ebenen:

$$\alpha \text{ und } \alpha_1, \quad \beta \text{ und } \beta_1,$$

---

*) Die nachfolgenden Untersuchungen wurden hervorgerufen und weitergeführt durch brieflichen und mündlichen Verkehr mit meinem Freunde und früheren Schüler, Herrn *H. Thieme* in Posen, der bereits in seiner Arbeit: „Zur Geometrie des Tetraëders“ (*Schloemilchs* Zeitschrift für Math. und Phys. 1882, Heft 1) auf die hier eingehender betrachtete Raumcurve vierter Ordnung und erster Species aufmerksam gemacht hat. Die Resultate, zu denen jeder von uns auf selbständigem und zum Theil von dem andern abweichendem Wege gelangte, waren, soweit sie zusammentrafen, in Uebereinstimmung, ohne dass es sich immer feststellen liess, wem bei jedem einzelnen Resultat die Priorität zukäme. Im Einverständniss mit Herrn *H. Thieme* veröffentliche ich meine Darstellung des Gegenstandes, indem ich aber ausdrücklich demselben einen gleichen Antheil an der Priorität der Resultate einräume. Die Darstellung schliesst sich oft an mein Buch: Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc., Leipzig 1881, an, welches immer mit „Th. d. O.“ citirt werden soll.

so sind auch die Ebenen:

$$[|\alpha\beta|, |\alpha_1\beta_1|] = \gamma \quad \text{und} \quad [|\alpha\beta_1|, |\alpha_1\beta|] = \gamma_1$$

ein Paar rechtwinkliger Ebenen.

In der That sind die Durchschnittslinien von $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ mit der unendlich-entfernten Ebene ε_∞ zwei Paare conjugirter Strahlen in Bezug auf den imaginären Kreis in ε_∞ und bilden zwei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks, von welchem nach *Hesses* Satz (Th. d. O. S. 38) daher auch das dritte Paar Gegenseiten ein Paar conjugirter Strahlen in Bezug auf den imaginären Kreis in ε_∞ sein muss. Wir übergehen den ganz elementaren Beweis dieses Satzes, der auch darauf hinauskommt, dass die vier Durchschnittslinien:

$$|\alpha\beta|, \quad |\alpha\beta_1|, \quad |\alpha_1\beta|, \quad |\alpha_1\beta_1|$$

allemal vier solche Strahlen durch $\mathfrak{O}$ sind, von denen jeder der Höhenstrahl des von den drei übrigen gebildeten Dreikants ist.

1. Ist ein Tetraëder $\mathfrak{ABCD}$ gegeben, und legen wir durch ein Paar Gegenkanten desselben:

$$|\mathfrak{AB}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{CD}|$$

ein orthogonales Hyperboloid (Th. d. O. S. 185), so hat jeder Punkt $\mathfrak{x}$ desselben die Eigenschaft, dass die beiden Ebenen:

$$[\mathfrak{xAB}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{xCD}]$$

rechtwinklig zu einander sind; denn das orthogonale Hyperboloid wird eben erzeugt durch zwei projective Ebenenbüschel, deren Axen $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ sind, und deren entsprechende Ebenen normal auf einander stehen.

Legen wir durch ein zweites Paar Gegenkanten des Tetraëders:

$$|\mathfrak{AC}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{BD}|$$

ebenfalls ein orthogonales Hyperboloid, so gilt für die Punkte desselben die gleiche Eigenschaft; die gemeinschaftlichen Punkte $\mathfrak{x}$ beider Hyperboloide, d. h. die Punkte ihrer Schnittcurve, einer Raumcurve $C^{(4)}$ vierter Ordnung und erster Species besitzen daher ausser der vorigen Eigenschaft auch noch die, dass die Ebenen:

$$[\mathfrak{xAC}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{xBD}]$$

zu einander normal sind. Aus diesen beiden Paaren von rechtwinkligen Ebenen schliessen wir nach dem vorigen Satze (s. o.) auf ein drittes Paar, indem wir die Durchschnittslinien ermitteln:

$$|[\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{B}],\ [\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]| = |\mathfrak{x}\mathfrak{A}|; \quad |[\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{B}],\ [\mathfrak{x}\mathfrak{B}\mathfrak{D}]| = |\mathfrak{x}\mathfrak{B}|;$$
$$|[\mathfrak{x}\mathfrak{C}\mathfrak{D}],\ [\mathfrak{x}\mathfrak{B}\mathfrak{D}]| = |\mathfrak{x}\mathfrak{D}|; \quad |[\mathfrak{x}\mathfrak{C}\mathfrak{D}],\ [\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]| = |\mathfrak{x}\mathfrak{C}|;$$
$$[|\mathfrak{x}\mathfrak{A}|,\ |\mathfrak{x}\mathfrak{D}|] = [\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{D}]; \quad [|\mathfrak{x}\mathfrak{B}|,\ |\mathfrak{x}\mathfrak{C}|] = [\mathfrak{x}\mathfrak{B}\mathfrak{C}];$$

folglich müssen auch die Ebenen:

$$[\mathfrak{x}\mathfrak{A}\mathfrak{D}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{x}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$$

zu einander rechtwinklig sein, d. h. $\mathfrak{x}$ muss auf einem orthogonalen Hyperboloid liegen, welches durch das dritte Paar Gegenkanten:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{D}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$$

des Tetraëders gelegt werden kann, d. h.

Legt man durch jedes der drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders ein orthogonales Hyperboloid, so gehören diese drei Hyperboloide einem Büschel an, d. h. sie schneiden sich in derselben Raumcurve $C^{(4)}$ vierter Ordnung und erster Species.

Dieser Satz lässt sich auch so aussprechen:

Der Ort eines Punktes, von welchem aus gesehen jedes der drei Paar Gegenkanten eines gegebenen Tetraëders unter einem rechten Winkel erscheint (d. h. in zwei rechtwinkligen Ebenen liegt), ist eine Raumcurve $C^{(4)}$ vierter Ordnung und erster Species.

Eine charakteristische Eigenschaft dieser Raumcurve $C^{(4)}$ besteht ihrer Entstehung gemäss darin:

Jede Ebene, welche auf einer der Kanten des Tetraëders normal steht, begegnet unserer Raumcurve $C^{(4)}$ in vier Punkten eines Kreises; es giebt also sechs Stellungen für eine solche Ebene, welche der Raumcurve $C^{(4)}$ in vier Punkten eines Kreises begegnen soll.

Von der Raumcurve $C^{(4)}$ kennen wir unmittelbar die vier Ecken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ des Tetraëders, welche offenbar der $C^{(4)}$ angehören; es lassen sich aber noch andere Punkte derselben ermitteln und andere Hyperboloide, welche durch $C^{(4)}$ gehen.

Fällen wir aus den Ecken des Tetraëders die Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seitenflächen (Höhen) und bezeichnen die Fusspunkte derselben durch

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},$$

so dass $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ das aus der Ecke $\mathfrak{A}$ auf die Seitenfläche $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ herabgelassene Perpendikel dieselbe in $\mathfrak{a}$ trifft, dann folgt, weil $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ eine Normale der

Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ ist, dass jede durch dieselbe gelegte Ebene auf $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$ rechtwinklig stehen muss; daher sind

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{a}] \quad \text{und} \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{B}]$$

normal zu einander und schneiden sich daher in einer Geraden $|\mathfrak{B}\mathfrak{a}|$, welche dem ersten orthogonalen Hyperboloid angehören muss, d. h. eine Erzeugende der zweiten Regelschaar ist, während $|\mathfrak{B}\mathfrak{A}|$ der ersten angehört. In gleicher Weise gehören $|\mathfrak{C}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}|$ den beiden Regelschaaren des zweiten, $|\mathfrak{D}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{D}\mathfrak{A}|$ den beiden Regelschaaren des dritten orthogonalen Hyperboloids an. Die Raumcurve $C^{(4)}$ geht also durch $\mathfrak{a}$ und wir schliessen:

Die Fusspunkte** $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ **der Höhen des Tetraëders** $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ **liegen auf der Raumcurve** $C^{(4)}$. **Die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{a}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{c}|$$

gehören einer Regelschaar des orthogonalen Hyperboloids an, welches durch die Gegenkanten** $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ **und** $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ **des Tetraëders gelegt werden kann; ebenso gehören

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{c}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{a}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{b}|$$

einer Regelschaar des zweiten orthogonalen Hyperboloids an, welches durch die Gegenkanten** $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ **und** $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ **des Tetraëders gelegt werden kann; endlich gehören

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{a}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{c}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{b}|$$

einer Regelschaar des dritten orthogonalen Hyperboloids an, welches durch die Gegenkanten** $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ **und** $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ **des Tetraëders gelegt werden kann.

Wir wollen die drei orthogonalen Hyperboloide in der von uns gewählten Reihenfolge

$$H_1^{(2)}, \quad H_2^{(2)}, \quad H_3^{(2)}$$

nennen; bemerken wir nun, dass die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ auf der Ebene $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}]$ normal steht, weil jene durch eine Normale dieser geht, so sehen wir, dass die Schnittlinie beider Ebenen eine Erzeugende des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ ist; die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ enthält aber ausser dieser Erzeugenden auch die Erzeugende $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$, und da beide sich in $\mathfrak{A}$ begegnen, so ist die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ die Berührungsebene im Punkte $\mathfrak{A}$ am Hyperboloid $H_1^{(2)}$; wir sehen also, dass die durch $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ zur Ebene $[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}]$ normal gelegte Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ die Berührungsebene des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ ist, und in gleicher Weise, dass die durch $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ normal zur Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{A}]$ gelegte Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$ die Berührungsebene des Hyperboloids $H_2^{(2)}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ ist; die Schnitt-

linie beider Ebenen $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$ und $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$ ist also die Tangente der Raumcurve $C^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ und muss daher auch in der Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{d}]$ liegen, was auch an sich klar ist, weil die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]\ [\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]\ [\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{d}]$$

diejenigen sind, welche sich in dem Dreikant $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ durch je eine Kante normal zur gegenüberliegenden Seitenfläche legen lassen und die sich bekanntlich in dem *Höhenstrahle* des Dreikants schneiden.

Wir haben also folgendes Ergebniss:

In jeder Ecke des Tetraëders schneiden sich drei Seitenflächen desselben und bilden ein Dreikant; der Höhenstrahl dieses Dreikants ist die Tangente der Raumcurve $C^{(4)}$ in dieser Tetraëderecke.

Es schneiden also die je drei Ebenen:

$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{d}]$	in	der	Tangente	$t_{\mathfrak{A}}$,
$[\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{a}]$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{d}]$	„	„	„	$t_{\mathfrak{B}}$,
$[\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{a}]$	$[\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$	$[\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{d}]$	„	„	„	$t_{\mathfrak{C}}$,
$[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{a}]$	$[\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{b}]$	$[\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{c}]$	„	„	„	$t_{\mathfrak{D}}$.

Wir wissen ferner, dass die vier Höhen eines Tetraëders vier Erzeugende derselben Regelschaar eines gleichseitigen Hyperboloids sind (Th. d. O. S. 205), welches wir das Höhenhyperboloid $H^{(2)}$ nennen wollen; da nun $t_{\mathfrak{A}}$ den drei Höhen $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{d}|$ begegnet, so ist $t_{\mathfrak{A}}$ eine Erzeugende der andern Regelschaar des Höhenhyperboloids; es gehören also die vier Höhenstrahlen $t_{\mathfrak{A}} t_{\mathfrak{B}} t_{\mathfrak{C}} t_{\mathfrak{D}}$ dem gleichseitigen Höhenhyperboloid und zwar einer Regelschaar desselben an. Das Höhenhyperboloid $H^{(2)}$ enthält aber ausser den vier Tangenten $t_{\mathfrak{A}} t_{\mathfrak{B}} t_{\mathfrak{C}} t_{\mathfrak{D}}$ der Raumcurve $C^{(4)}$ auch die vier Höhenfusspunkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$; da es also 12 Punkte mit der Raumcurve $C^{(4)}$ gemein hat, so geht es durch die ganze Raumcurve, und wir schliessen:

Das gleichseitige Hyperboloid $H^{(2)}$, auf welchem die vier Höhen des Tetraëders liegen, geht durch unsere Raumcurve $C^{(4)}$, und diese erscheint daher auch als die Schnittcurve eines orthogonalen und eines gleichseitigen Hyperboloids.

Legen wir durch den Höhenstrahl $t_{\mathfrak{A}}$ und die Höhe $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ des Tetraëders eine Ebene, d. h. die Berührungsebene im Punkte $\mathfrak{A}$ am Höhenhyperboloid $H^{(2)}$, so muss das Linienpaar $t_{\mathfrak{A}}$ und $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ die vier Durchschnittspunkte dieser Ebene mit der Raumcurve $C^{(4)}$ enthalten, von denen zunächst zwei in den Berührungspunkt $\mathfrak{A}$ der Tangente $t_{\mathfrak{A}}$ hineinfallen, der

dritte ist $\mathfrak{a}$; der vierte aber kann weder auf der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ noch auf $t_{\mathfrak{A}}$ ein anderer sein, als der Punkt $\mathfrak{A}$ selbst, weil sonst die $C^{(4)}$ zerfallen würde, indem eine Gerade drei Punkte von ihr enthielte. Da mithin der vierte Schnittpunkt in $\mathfrak{A}$ hineinfällt, so ist die Ebene $[t_{\mathfrak{A}}\mathfrak{a}]$ die Schmiegungsebene der $C^{(4)}$ im Punkte $\mathfrak{A}$ und enthält also in $\mathfrak{A}$ drei zusammenfallende Punkte der Raumcurve, in $\mathfrak{a}$ den vierten Schnittpunkt. Wir schliessen:

Die Berührungsebenen am Höhenhyperboloid in den Tetraëderecken sind die Schmiegungsebenen unserer Raumcurve $C^{(4)}$ in diesen Punkten; sie werden bestimmt durch die von jeder Ecke ausgehende Höhe (des Tetraëders) und den von ihr ausgehenden Höhenstrahl (des Dreikants).

Wir bezeichnen diese Schmiegungsebenen:

$$[t_{\mathfrak{A}}\mathfrak{a}] = \tau_{\mathfrak{A}}, \quad [t_{\mathfrak{B}}\mathfrak{b}] = \tau_{\mathfrak{B}}, \quad [t_{\mathfrak{C}}\mathfrak{c}] = \tau_{\mathfrak{C}}, \quad [t_{\mathfrak{D}}\mathfrak{d}] = \tau_{\mathfrak{D}}.$$

Wir bemerken noch, dass die Raumcurve $C^{(4)}$ durch die acht Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ vollständig und eindeutig bestimmt wird, d. h. dass diese acht Punkte keine Gruppe von acht associirten Punkten derselben bilden; denn sonst müsste jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch sieben von ihnen geht, auch durch den achten gehen (Th. d. O. S. 704); da aber die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{d}$ in einer Ebene liegen, so müssten auch die vier übrigen Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{D}$ in einer Ebene liegen, was offenbar nicht der Fall ist. Es muss daher jede Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch die acht Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ hindurchgeht, die ganze Raumcurve $C^{(4)}$ enthalten und dem durch sie bestimmten Flächenbüschel angehören.

2. Wir gelangen zu neuen Punkten der Raumcurve $C^{(4)}$, indem wir bemerken, dass zu irgend sieben von den acht bekannten Punkten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ allemal ein nothwendiger achter Punkt gehört, durch welchen sämmtliche Flächen zweiter Ordnung hindurchgehen müssen, die durch die ersten sieben Punkte gehen; durch einen solchen achten Punkt muss daher auch unsere $C^{(4)}$ gehen. Nehmen wir z. B. die sieben Punkte:

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \quad \mathfrak{C} \quad \mathfrak{D} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{d},$$

so ist der nothwendige achte Punkte linear und in unserem Falle sehr einfach zu construiren; denn da $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{d}$ in einer Ebene liegen, so muss der gesuchte Punkt in der Ebene $[\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ liegen; da aber auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{c}$ in einer Ebene liegen, so muss der gesuchte Punkt auch in der Ebene $[\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]$ und endlich auch in der Ebene $[\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$ liegen, weil die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{b}$ in einer Ebene liegen; folglich ist der gesuchte Punkt der Durchschnittspunkt

der drei Ebenen:

$$([\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{d}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]) = \mathfrak{A}_1.$$

Wir erhalten demgemäss vier neue Punkte:

$$\mathfrak{A}_1 = ([\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{d}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]),$$
$$\mathfrak{B}_1 = ([\mathfrak{C}\mathfrak{d}\mathfrak{a}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{A}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]),$$
$$\mathfrak{C}_1 = ([\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{B}\mathfrak{d}\mathfrak{a}]),$$
$$\mathfrak{D}_1 = ([\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{a}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]),$$

welche auf der Raumcurve $C^{(4)}$ liegen, oder was dasselbe sagt, wir haben auf $C^{(4)}$ vier Gruppen von je acht associirten Punkten:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a},\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1\mathfrak{d}\mathfrak{a}\mathfrak{b},\quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Weil die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{a}|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{d}|,\quad |\mathfrak{D}\mathfrak{c}|,$$

einer Regelschaar des orthogonalen Hyperboloids $H_1^{(2)}$ angehören, so wird die Schnittlinie der beiden Ebenen:

$$|[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{D}],\ [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{C}]|,$$

welche identisch ist mit

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{A}_1|,$$

der andern Regelschaar desselben Hyperboloids angehören müssen, folglich auch der Erzeugenden der ersten Regelschaar $|\mathfrak{a}\mathfrak{B}|$ begegnen müssen, d. h. die vier Punkte:

$$\mathfrak{A}_1\quad \mathfrak{B}\quad \mathfrak{a}\quad \mathfrak{b}$$

müssen in einer Ebene liegen; in gleicher Weise erkennen wir, dass die vier Punkte:

$$\mathfrak{A}_1\quad \mathfrak{C}\quad \mathfrak{a}\quad \mathfrak{c}$$

in einer Ebene liegen, so wie

$$\mathfrak{A}_1\quad \mathfrak{D}\quad \mathfrak{a}\quad \mathfrak{d}$$

in einer Ebene; der vorige Punkt $\mathfrak{A}_1$ erscheint daher auch als in den drei Ebenen liegend:

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{a}],\quad [\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{a}],\quad [\mathfrak{D}\mathfrak{d}\mathfrak{a}],$$

welche sich in der Geraden $|\mathfrak{a}\mathfrak{A}_1|$ schneiden; wir erhalten auf diese Weise vier Schnittlinien von je drei Ebenen:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{A}_1| = |[\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{a}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{a}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{d}\mathfrak{a}]|$$
$$|\mathfrak{b}\mathfrak{B}_1| = |[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{b}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{d}\mathfrak{b}]|$$
$$|\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1| = |[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{d}\mathfrak{c}]|$$
$$|\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1| = |[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]|$$

und diese vier Geraden sind offenbar Erzeugende der zweiten Regelschaar des Höhenhyperboloids, weil sie sämmtlich den vier Tetraëderhöhen $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{c}|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{d}|$, welche der ersten Regelschaar angehören, begegnen. Wir haben also ***auf dem gleichseitigen Höhenhyperboloid*** $H^{(2)}$ ***je vier Erzeugende der beiden Regelschaaren:***

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{A}|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{D}|,$$
$$|\mathfrak{a}\mathfrak{A}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1|.$$

Auf dem orthogonalen Hyperboloid $H_1^{(2)}$ liegt, wie wir soeben gesehen haben, die Gerade $|\mathfrak{b}\mathfrak{A}_1|$; in gleicher Weise erkennen wir, dass auf ihm auch die Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{B}_1|$ und ebenso auch $|\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1|$ und $|\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1|$ liegen müssen.

Wir haben also ***auf dem orthogonalen Hyperboloid*** $H_1^{(2)}$ ***die Erzeugenden der beiden Regelschaaren:***

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{A}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{C}|,$$
$$|\mathfrak{a}\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{A}_1|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|,$$

auf dem orthogonalen Hyperboloid $H_2^{(2)}$ ***die Erzeugenden der beiden Regelschaaren:***

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{A}|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{B}|,$$
$$|\mathfrak{a}\mathfrak{C}_1|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{A}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{D}_1|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|,$$

und auf dem orthogonalen Hyperboloid $H_3^{(2)}$ ***die Erzeugenden der beiden Regelschaaren:***

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{A}|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{C}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{B}|,$$
$$|\mathfrak{a}\mathfrak{D}_1|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{A}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{C}_1|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|.$$

Wenn zwei Tetraëder eine solche Lage im Raume haben, dass die Ecken des einen mit den Ecken des andern verbunden vier Gerade liefern, die einer Regelschaar eines Hyperboloids angehören, so wollen wir sagen, die beiden Tetraëder haben ***hyperboloidische Lage;*** mit dieser Bezeichnung dürfen wir das vorige Ergebniss in folgender Weise aussprechen: ***Die beiden Tetraëder*** $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ***und*** $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ ***haben gleichzeitig auf vierfache Weise hyperboloidische Lage,*** nämlich wenn wir die entsprechenden Ecken der beiden Tetraëder unter einander stellen, auf folgende Weise:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}, & \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}, & \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}, & \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}, \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}, & \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}, & \mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, & \mathfrak{d}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}, \end{matrix}$$

und in ähnlicher Art haben auch die beiden Tetraëder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ ***und*** $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ ***gleichzeitig auf vierfache Weise hyperboloidische Lage,*** nämlich:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,$$
$$\mathfrak{a\ b\ c\ d},\quad \mathfrak{b\ a\ d\ c},\quad \mathfrak{c\ d\ a\ b},\quad \mathfrak{d\ c\ b\ a};$$

die Verbindungsstrahlen entsprechender Ecken gehören in dem ersten Falle der einen, in dem andern Falle der zweiten Regelschaar derselben Hyperboloide an, nämlich des gleichseitigen und der drei orthogonalen Hyperboloide.

Fassen wir im Ganzen die zwölf Punkte auf:

$$\mathfrak{ABCD},\quad \mathfrak{abcd},\quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,$$

so bieten sie ***die eigenthümliche Configuration im Raume dar, dass sie zu je vier in den 28 Ebenen liegen:***

$$\mathfrak{ABCd},$$
$$\mathfrak{BCDa},$$
$$\mathfrak{CDAb},$$
$$\mathfrak{DABc},$$
$$\mathfrak{Abc}\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{Bcd}\mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{Cda}\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{Dab}\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{Bca}\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{Cdb}\mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{Dac}\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{Abd}\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{Cab}\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{Dcb}\mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{Acd}\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{Bda}\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{Aab}\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{Aac}\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{Aad}\mathfrak{D}_1,$$
$$\mathfrak{Bbc}\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{Bbd}\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{Bba}\mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{Ccd}\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{Cca}\mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{Ccb}\mathfrak{B}_1,$$
$$\mathfrak{Dda}\mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{Ddb}\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{Ddc}\mathfrak{C}_1.$$

Da diese zwölf Punkte auf der Raumcurve $C^{(4)}$ liegen und immer je zweimal vier Punkte, in welchen zwei Ebenen eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species durchschneiden, eine Gruppe von acht associirten Punkten bilden, weil das Ebenenpaar als eine Fläche zweiter Ordnung aufgefasst werden kann, so haben wir nach dem Obigen folgende ***Gruppen von je acht associirten Punkten auf unserer*** $C^{(4)}$:

$$\mathfrak{abcd}\,\mathfrak{AB}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{abcd}\,\mathfrak{AB}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,$$
$$\mathfrak{abcd}\,\mathfrak{AC}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{abcd}\,\mathfrak{AC}\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1,$$
$$\mathfrak{abcd}\,\mathfrak{AD}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{abcd}\,\mathfrak{AD}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{abcd}\,\mathfrak{BC}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{abcd}\,\mathfrak{CD}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1,$$
$$\mathfrak{abcd}\,\mathfrak{BD}\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{abcd}\,\mathfrak{BD}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{abcd}\,\mathfrak{CD}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1,\quad \mathfrak{abcd}\,\mathfrak{BC}\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1,$$

welche zu den vorhin angegebenen vier Gruppen (s. o. S. 138) hinzutreten.

Es gehören die Geraden:

$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1\rvert$	der einen Regelschaar	eines Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$,
$\lvert\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\rvert$ $\lvert\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\rvert$	der andern Regelschaar	
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{D}_1\rvert$	der einen Regelschaar	eines Hyperboloids $\mathfrak{H}_2^{(2)}$,
$\lvert\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\rvert$ $\lvert\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\rvert$	der andern Regelschaar	
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{D}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{B}_1\rvert$	der einen Regelschaar	eines Hyperboloids $\mathfrak{H}_3^{(2)}$,
$\lvert\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}\rvert$ $\lvert\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\rvert$	der andern Regelschaar	
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\rvert$ $\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\rvert$	der einen Regelschaar	eines Hyperboloids $\mathfrak{H}^{(2)}$
$t_\mathfrak{a}$ $t_\mathfrak{b}$ $t_\mathfrak{c}$ $t_\mathfrak{d}$	der andern Regelschaar	

an, und die vier Hyperboloide $\mathfrak{H}^{(2)}$ $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ $\mathfrak{H}_2^{(2)}$ $\mathfrak{H}_3^{(2)}$ gehen durch unsere Raumcurve $C^{(4)}$. Diese vier neuen Hyperboloide hängen in ähnlicher Weise unter einander zusammen, wie die früheren $H^{(2)}$ $H_1^{(2)}$ $H_2^{(2)}$ $H_3^{(2)}$, indem sie ***zeigen, dass auch die beiden Tetraëder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}$ gleichzeitig auf vierfache Weise hyperboloidische Lage haben,*** nämlich, wenn wir die entsprechenden Ecken der beiden Tetraëder unter einander stellen, auf folgende Weise:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D} & \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D} & \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D} & \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D} \\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 & \mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1. \end{matrix}$$

Noch in anderer Weise zeigen die betrachteten zwölf Punkte im Raume eigenthümliche Configurationen. Betrachten wir z. B. die Gruppe von acht associirten Punkten der Raumcurve $C^{(4)}$:

$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}_1\ \mathfrak{D}_1,$$

so erkennen wir, ***dass dieselben auf vier verschiedene Arten in Ebenenpaare zu je vieren vertheilt werden können,*** nämlich:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1 & \mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1 & \mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1 \\ \mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1 & \mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1 & \mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1 \end{array}\ .$$

und dieses Resultat, anders ausgesprochen, lautet so:

Die beiden Tetraëder:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1$$

sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben. (Vgl. Th. d. O. S. 293.)

Denn in der That liegt

die Ecke	in der Ebene	und	die Ecke	in der Ebene
$\mathfrak{A}$	$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1]$		$\mathfrak{B}$	$[\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1]$
$\mathfrak{b}$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1]$		$\mathfrak{a}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1]$
$\mathfrak{d}$	$[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{C}_1]$		$\mathfrak{c}$	$[\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{D}_1]$
$\mathfrak{D}_1$	$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}]$		$\mathfrak{C}_1$	$[\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{A}]$

und aus denselben acht associirten Punkten der Raumcurve können wir nicht bloss dies eine, sondern vier Tetraëderpaare derselben eigenthümlichen Lage herstellen, nämlich:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1 & \text{und} & \mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1, \\
\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1 & \text{und} & \mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1, \\
\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1 & \text{und} & \mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1, \\
\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1 & \text{und} & \mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1.
\end{array}
$$

Wir erhalten daher, wie leicht zu sehen ist, im Ganzen 24 solche Tetraëderpaare, die sich in folgender Weise zusammenstellen lassen zu drei Gruppen:

$$
(\mathrm{I.})\ \left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}_1\\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\mathfrak{d}\,\mathfrak{C}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{C}_1\\ \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathfrak{D}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{b}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{D}\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{b}\mathfrak{d}\,\mathfrak{C}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{C}\\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathfrak{D}\end{array}\right.
\end{array}\right.,
\quad
(\mathrm{II.})\ \left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{D}_1\\ \mathfrak{C}\,\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,\mathfrak{B}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{C}\,\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,\mathfrak{D}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}\\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}\\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{D}\\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}\,\mathfrak{B}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}\mathfrak{d}\,\mathfrak{B}\\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{c}\mathfrak{b}\,\mathfrak{D}\end{array}\right.
\end{array}\right.,
\quad
(\mathrm{III.})\ \left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{d}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{D}\,\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}_1\\ \mathfrak{D}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}_1\\ \mathfrak{D}\,\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{D}\,\mathfrak{d}\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}_1\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{d}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}\\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,\mathfrak{C}\\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{B}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}\\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{d}\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}\end{array}\right.\\
\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}_1\mathfrak{a}\mathfrak{c}\,\mathfrak{B}\\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{d}\mathfrak{b}\,\mathfrak{C}\end{array}\right.
\end{array}\right..
$$

3. Zwei Tetraëder, die einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind, besitzen eine leicht erweisbare, aber, wie es scheint, bisher noch nicht bemerkte Eigenschaft, die sich so aussprechen lässt: Lassen wir einer Ecke des ersten Tetraëders, welche in einer Seitenfläche des zweiten liegt, diejenige Ecke des zweiten Tetraëders entsprechen, in welcher sich die drei übrigen Seitenflächen desselben schneiden; und ebenso entspreche einer Seitenfläche des ersten Tetraëders, welche durch eine Ecke des zweiten geht, diejenige Seitenfläche des zweiten Tetraëders, welche die drei übrigen Ecken desselben enthält; dann gilt der Satz:

***Hat man zwei einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Tetraëder, so sind die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken und die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen acht Gerade im Raume, welche von denselben zwei Geraden getroffen werden können,* d. h. die beiden Geraden,**

welche vieren von jenen acht Geraden begegnen (die nicht hyperboloidische Lage haben), müssen auch den vier übrigen begegnen.

Wir wollen diesen Satz unabhängig von der bisherigen Bezeichnung für sich beweisen.

Es seien:

$$\mathfrak{abcd} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$$

die beiden Tetraëder, welche einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind, d. h. wenn wir die Seitenflächen derselben bezeichnen:

$$\begin{array}{ll} [\mathfrak{bcd}] = \alpha, & [\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1] = \alpha_1, \\ [\mathfrak{cda}] = \beta, & [\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1] = \beta_1, \\ [\mathfrak{dab}] = \gamma, & [\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1] = \gamma_1, \\ [\mathfrak{abc}] = \delta, & [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1] = \delta_1, \end{array}$$

so liegt

$$\begin{array}{lllllll} \mathfrak{a}_1 & \text{in} & \alpha & \text{und} & \mathfrak{a} & \text{in} & \alpha_1, \\ \mathfrak{b}_1 & - & \beta & - & \mathfrak{b} & - & \beta_1, \\ \mathfrak{c}_1 & - & \gamma & - & \mathfrak{c} & - & \gamma_1, \\ \mathfrak{d}_1 & - & \delta & - & \mathfrak{d} & - & \delta_1, \end{array}$$

d. h. wir haben achtmal je vier Punkte in einer Ebene:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}, & \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1, \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}, & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1, \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}, & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_1, \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}_1, & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}. \end{array}$$

Betrachten wir daher die vier Geradenpaare:

$$\begin{array}{llll} |\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1|, & |\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1|, & |\mathfrak{c}\mathfrak{d}_1|, & |\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}_1|, \\ |\mathfrak{ab}|, & |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|, & |\mathfrak{cd}|, & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|, \end{array}$$

so sehen wir, dass jede Gerade der einen Reihe jeder der andern Reihe begegnet; also gehören dieselben den beiden Regelschaaren eines Hyperboloids an, und es werden auf irgend zwei Geraden der einen Regelschaar durch die vier Geraden der andern Regelschaar zwei projective Punktreihen ausgeschnitten. Wir haben demnach auf den beiden Trägern $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1|$ und $|\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1|$ die beiden projectiven Punktreihen:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}_1, & (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{cd}), & (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1), \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{a}_1, & (\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{cd}), & (\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1), \end{array}$$

oder durch die zulässige Vertauschung der Elemente:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}_1, & (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{d}), & (\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1), \\ \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{b}, & (\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1), & (\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{d}). \end{array}$$

Die Verbindungslinien dieser vier Paare entsprechender Punkte haben daher auch hyperboloidische Lage. Nun enthält aber die Schnittlinie der Ebenen:

$$|\alpha\alpha_1| = |[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}],\ \ [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]|$$

sowohl den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$ als auch den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}\mathfrak{d})$, und die Schnittlinie der Ebenen:

$$|\beta\beta_1| = |[\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}\mathfrak{d}],\ \ [\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]|$$

enthält sowohl den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$ als auch den Schnittpunkt $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\mathfrak{d})$, folglich haben die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|,\ \ |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|,\ \ |\alpha\alpha_1|,\ \ |\beta\beta_1|$$

hyperboloidische Lage.

In gleicher Weise erkennen wir, dass auf den Trägern $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$ und $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|$ die Punktreihen projectiv sind:

$$\begin{array}{llll} (\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1), & (\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1), & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, \\ (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1), & (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1), & \mathfrak{d}_1, & \mathfrak{c}_1, \end{array}$$

oder nach Vertauschung der Elemente:

$$\begin{array}{llll} (\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1), & (\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1), & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, \\ (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1), & (\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1,\ \mathfrak{a}\mathfrak{b}_1), & \mathfrak{c}_1, & \mathfrak{d}_1, \end{array}$$

folglich haben auch die vier Geraden:

$$|\alpha\alpha_1|,\ \ |\beta\beta_1|,\ \ |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|,\ \ |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|$$

hyperboloidische Lage. Die beiden Hyperboloide, welche durch je ein Quadrupel von vier Geraden:

$$\begin{array}{llll} |\alpha\alpha_1|, & |\beta\beta_1|, & |\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|, & |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|, \\ |\alpha\alpha_1|, & |\beta\beta_1|, & |\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1|, & |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1| \end{array}$$

gelegt werden können, haben die beiden Erzeugenden einer Regelschaar $|\alpha\alpha_1|$ und $|\beta\beta_1|$ gemeinschaftlich, folglich im Allgemeinen noch zwei Gerade $g\ g'$ der andern Regelschaar (welche auch imaginär sein können). Dies sind die beiden Geraden, welche gleichzeitig den vier Verbindungslinien:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|,\ \ |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|,\ \ |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|,\ \ |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|$$

begegnen, und von welchen wir nunmehr bewiesen haben, dass sie auch

den beiden Schnittlinien:

$$|\alpha\alpha_1| \quad \text{und} \quad |\beta\beta_1|$$

begegnen müssen; in ganz gleicher Weise geht hervor, dass $g\,g'$ auch den Schnittlinien:

$$|\gamma\gamma_1|, \quad |\delta\delta_1|$$

begegnen müssen, folglich begegnen $g\,g'$ allen acht Geraden, was der zu beweisende Satz ist.

(Der noch denkbare Fall, dass die beiden Hyperboloide, welche durch die Geraden-Quadrupel bestimmt sind:

$$|\alpha\alpha_1|, \quad |\beta\beta_1|, \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|,$$
$$|\alpha\alpha_1|, \quad |\beta\beta_1|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|, \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|,$$

identisch wären, also eine ganze Regelschaar den sechs Geraden:

$$|\alpha\alpha_1|, \quad |\beta\beta_1|, \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|, \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|,$$

und in gleicher Weise noch den beiden Geraden $|\gamma\gamma_1|$, $|\delta\delta_1|$ begegnete, erweist sich als unzutreffend; denn es ist schon klar, dass z. B. die vier Geraden:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|, \quad |\delta\delta_1|$$

nicht hyperboloidische Lage haben, weil sonst jede Gerade, die dreien von ihnen begegnet, auch der vierten begegnen müsste. Die Gerade $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ begegnet nun den dreien $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$, $|\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|$ und $|\delta\delta_1|$, weil sie in der Ebene δ liegt; $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ begegnet aber nicht $|\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|$; also ist die gemachte Annahme unzulässig.)

Nach dem Beweise dieses Satzes kehren wir zu den Betrachtungen am Schlusse von No. 2 zurück. Von den 24 Tetraëderpaaren, die dort auftraten, ist das der Gruppe (I.) angehörige erste:

$$\mathfrak{A} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{C}_1$$
$$\mathfrak{B} \quad \mathfrak{a} \quad \mathfrak{d} \quad \mathfrak{D}_1,$$

zwei Tetraëder, die einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben sind und deren entsprechende Ecken unter einander stehen. Die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen und die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$$

müssen nach dem vorigen Satze von denselben zwei Geraden $g\,g'$ getroffen werden.

(Dass die vier Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{d}|$, $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$ *nicht* hyperboloidische Lage haben, ist in unserem Falle a priori ersichtlich, denn sonst müsste

die Gerade $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}|$, welche den drei Geraden $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$ $|\mathfrak{ab}|$ $|\mathfrak{cd}|$ begegnet, auch der vierten $|\mathfrak{AB}|$ begegnen, oder es müssten $\mathfrak{C}_1\mathfrak{ABD}$ in einer Ebene liegen, in welcher auch $\mathfrak{c}$ liegt; es müsste daher $|\mathfrak{C}_1\mathfrak{c}|$ auch $|\mathfrak{AB}|$ begegnen, oder $\mathfrak{C}_1\mathfrak{c}\mathfrak{AB}$ in einer Ebene liegen, in welcher mithin auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ läge, d. h. $\mathfrak{Aa}$ und $\mathfrak{Bb}$ begegneten sich, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.)

Betrachten wir nun in der Gruppe I. von No. 2 die vier ersten Tetraëderpaare, so sehen wir, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken bei allen vieren dieselben Geraden:

$$|\mathfrak{AB}|, \quad |\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$$

sind, während bei den übrigen vier Tetraëderpaaren der Gruppe I. die Verbindungslinien entsprechender Ecken die vier Geraden sind:

$$|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad |\mathfrak{CD}|.$$

Es zeigt sich nun, dass die vier Geraden:

$$|\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad |\mathfrak{AB}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$$

hyperboloidische Lage haben und ebenfalls auch die vier Geraden:

$$|\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad |\mathfrak{CD}|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$$

hyperboloidische Lage haben, woraus folgt, dass *alle sechs Geraden:*

$$|\mathfrak{AB}|, \quad |\mathfrak{CD}|, \quad |\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$$

von denselben beiden Geraden g g' getroffen werden.

In der That haben die vier Geraden:

$$|\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad |\mathfrak{AB}|, \quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$$

hyperboloidische Lage, denn erstens begegnet die Gerade $|\mathfrak{AB}_1|$ allen vieren, zweitens auch die Gerade $|\mathfrak{BA}_1|$; sobald wir also noch von einer dritten Geraden nachweisen können, dass sie allen vieren begegnet, ist ihre hyperboloidische Lage erwiesen. Es ist aber leicht zu sehen, dass die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{cab}], \quad [\mathfrak{c}\mathfrak{AB}], \quad [\mathfrak{c}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1]$$

sich in einer Geraden schneiden, welche offenbar allen vieren begegnen muss. In der That, legen wir die Ebene:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1] = \varepsilon,$$

welche den Punkt $\mathfrak{b}$ enthält, und bezeichnen wir die Schnittpunkte:

$$(\mathfrak{cb}, \varepsilon) = \mathfrak{b}, \quad (\mathfrak{c}\mathfrak{B}, \varepsilon) = \mathfrak{A}', \quad (\mathfrak{c}\mathfrak{A}_1, \varepsilon) = \mathfrak{B}',$$

so sind in der Ebene ε die beiden Dreiecke:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{A} & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' \end{matrix}$$

offenbar in perspectiver Lage, weil die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten:

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{A},\ \mathfrak{b}\mathfrak{A}'),\quad (\mathfrak{a}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{b}\mathfrak{B}'),\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{A}'\mathfrak{B}')$$

in einer Geraden liegen; denn verbinden wir diese drei Punkte mit $\mathfrak{c}$, so erhalten wir die drei Geraden:

$$|\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|,$$

welche, wie wir wissen, in einer Ebene liegen, deren Schnittlinie mit ε eben diejenige Gerade ist, in welcher jene drei Schnittpunkte entsprechender Seiten sich befinden; aus der perspectiven Lage der beiden Dreiecke:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{A} & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{A}' & \mathfrak{B}' \end{matrix}$$

folgt aber, dass die Verbindungslinien entsprechender Ecken:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|,\quad |\mathfrak{A}\mathfrak{A}'|,\quad |\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'|$$

durch einen Punkt laufen, also, wenn wir diese drei Geraden mit dem Punkte $\mathfrak{c}$ verbinden, die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad [\mathfrak{c}\mathfrak{A}\mathfrak{A}'] = [\mathfrak{c}\mathfrak{A}\mathfrak{B}],\quad [\mathfrak{c}\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'] = [\mathfrak{c}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1]$$

sich in einer Geraden schneiden müssen, q. e. d.

Da wir nun bewiesen haben, dass die sechs Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|,\quad |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|,\quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|$$

von denselben beiden Geraden $g\,g'$ getroffen werden, so folgt aus dem oben bewiesenen Satze, dass auch die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der sämmtlichen acht Tetraëderpaare von Gruppe I. von $g\,g'$ getroffen werden müssen. Suchen wir diese Schnittlinien entsprechender Seitenflächen auf, so stellen sich nur folgende acht verschiedene Geraden heraus:

$$\begin{matrix} |[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = k, & |[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]| = k', \\ |[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = l, & |[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]| = l', \\ |[\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = m, & |[\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]| = m', \\ |[\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\ [\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = n, & |[\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{d}],\ [\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]| = n', \end{matrix}$$

von denen $k\,k'\,l\,l'$ die Durchschnittslinien entsprechender Seitenflächen bei den ersten vier Tetraëderpaaren, dagegen $m\,m'\,n\,n'$ die Durchschnittslinien ent-

sprechender Seitenflächen, bei den übrigen vier Tetraëderpaaren der Gruppe I. sind, und wir sehen, dass das Geradenpaar gg' gleichzeitig den vierzehn Geraden begegnen muss:

$$|\mathfrak{AB}|,\ |\mathfrak{CD}|,\ |\mathfrak{ab}|,\ |\mathfrak{cd}|,\ |\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|,\ |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|,\ k,\ k',\ l,\ l',\ m,\ m',\ n,\ n'.$$

Das Geradenpaar gg' ist aber schon dadurch eindeutig bestimmt, dass es gleichzeitig den vier Geraden:

$$|\mathfrak{AB}|,\quad |\mathfrak{CD}|,\quad |\mathfrak{ab}|,\quad |\mathfrak{cd}|$$

begegnen soll; denn diese vier Geraden haben, wie leicht zu sehen ist, nicht hyperboloidische Lage.

(In der That, hätten diese vier Geraden hyperboloidische Lage, so müsste die Gerade $|\mathfrak{AB}_1|$, welche den drei Geraden: $|\mathfrak{ab}|$, $|\mathfrak{cd}|$, $|\mathfrak{AB}|$ begegnet, auch der vierten $|\mathfrak{CD}|$ begegnen, d. h. $\mathfrak{AB}_1\mathfrak{CD}$ müssten in einer Ebene liegen, in welcher dann auch nothwendig $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ enthalten wäre; es müssten sich also $|\mathfrak{Cc}|$ und $|\mathfrak{Dd}|$ begegnen, was beim allgemeinen Tetraëder nicht der Fall ist.)

Das Resultat der vorigen Untersuchung stellt sich hiernach folgendermassen heraus:

Die acht Tetraëderpaare der Gruppe* I. *(No.* 2.*) haben eine derartige Lage im Raume, dass sowohl die (sechs) Verbindungslinien entsprechender Ecken, als auch die (acht) Schnittlinien entsprechender Seitenflächen sämmtlich von einem und demselben Geradenpaar gg' getroffen werden. Dieses Geradenpaar gg' ist schon dadurch vollständig und eindeutig bestimmt, dass es gleichzeitig den vier Geraden:

$$|\mathfrak{AB}|,\quad |\mathfrak{CD}|,\quad |\mathfrak{ab}|,\quad |\mathfrak{cd}|$$

begegnet.

4. Die Bedeutung des Geradenpaares gg' für unsere Raumcurve $C^{(4)}$ erkennen wir aus der Eigenschaft, dass gg' den Geraden (No. 3)

$$k,\ k',\ l,\ l',\ m,\ m',\ n,\ n'$$

gleichzeitig begegnet.

Betrachten wir nämlich die acht Geraden:

$$|\mathfrak{Aa}|,\quad |\mathfrak{Bb}|,\quad |\mathfrak{cD}_1|,\quad |\mathfrak{dC}_1|,$$
$$|\mathfrak{Ab}|,\quad |\mathfrak{Ba}|,\quad |\mathfrak{cC}_1|,\quad |\mathfrak{dD}_1|,$$

so erkennen wir, dass jede der einen Reihe jeder der andern begegnet, dass sie also den beiden Regelschaaren eines Hyperboloids $H^{(2)}$ angehören.

Auf diesem Hyperboloid haben wir zuerst die Seiten eines windschiefen Vierseits:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1|, \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1|,$$

welches gleichzeitig auf dem Höhenhyperboloid $H^{(2)}$ liegt. Die Diagonalen dieses windschiefen Vierseits sind:

$$|[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}], [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = k, \quad |[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{d}], [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]| = k'$$

und bilden ein Paar conjugirter Strahlen für beide Hyperboloide $\mathrm{H}^{(2)}$ und $H^{(2)}$ (sowie für das ganze Büschel von Hyperboloiden, welches durch die vier Seiten des windschiefen Vierseits gelegt werden kann). (Th. d. O. S. 144.) Die beiden Paare von Gegenecken des windschiefen Vierseits sind auf den Diagonalen die Doppelpunkte hyperbolischer Punktinvolutionen, welche den beiden Hyperboloiden zugehören. Ein beliebiges Paar conjugirter Punkte der einen und ein beliebiges Paar der andern Punktinvolution sind allemal die vier Ecken eines Tetraëders, welches für beide Hyperboloide gleichzeitig ein Polartetraëder ist. Solche zwei Hyperboloide $\mathrm{H}^{(2)}$ und $H^{(2)}$, die ein windschiefes Vierseit gemein haben, besitzen also nicht nur *ein* gemeinschaftliches Polartetraëder, sondern unendlich viele, die aber sämmtlich ein und dasselbe Paar Gegenkanten haben (ebenso wie zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte unendlich viele gemeinsame Polardreiecke besitzen, die aber sämmtlich eine Ecke und die Gegenseite gemein haben).

Zweitens haben wir auf dem Hyperboloid $\mathrm{H}^{(2)}$ die Seiten eines andern windschiefen Vierseits:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{a}|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{D}_1|, \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{C}_1|,$$

welches gleichzeitig auf dem orthogonalen Hyperboloid $H_1^{(2)}$ liegt. Die Diagonalen dieses windschiefen Vierseits sind:

$$|[\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}], [\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{c}]| = l, \quad |[\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{c}], [\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{d}]| = l'$$

und bilden ein Paar conjugirter Strahlen für beide Hyperboloide $\mathrm{H}^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$.

Es giebt nun im Allgemeinen nur zwei (reelle oder imaginaire) Gerade g g', welche gleichzeitig den vier Geraden $kk'll'$ begegnen (dass diese nicht hyperboloidische Lage haben, werden wir weiter unten nachweisen). Da es nun zu einer solchen Geraden g nur eine bestimmte conjugirte Gerade in Bezug auf das Hyperboloid $\mathrm{H}^{(2)}$ giebt und diese auch allen vieren begegnen muss, so ist sie mit g' identisch (Th. d. O. S. 133.), denn es giebt ausser g nur noch die einzige Gerade g', welche allen vieren begegnet; wir schliessen also, dass das Geradenpaar gg' ein Paar conjugirter

Strahlen ist für die beiden Hyperboloide $H^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ gleichzeitig, also auch, wie unmittelbar einleuchtet, für sämmtliche Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Schnittcurve $C^{(4)}$ der beiden Hyperboloide $H^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ hindurchgehen. Wir haben also das Resultat:

Das Geradenpaar gg' ist ein Paar conjugirter Strahlen für sämmtliche Oberflächen zweiter Ordnung des Büschels, welches durch die Raumcurve $C^{(4)}$ gelegt werden kann.

Es bleibt uns noch übrig nachzuweisen, dass die vier Geraden $kk'll'$ nicht hyperboloidische Lage haben, dass es also in der That nur *ein* Geradenpaar gg' giebt, welches allen vieren gleichzeitig begegnet. Dies lässt sich leicht direct nachweisen, folgt aber auch unmittelbar aus einem bekannten Satze, der so lautet:

Wenn zwei Tetraëder so im Raume liegen, dass vier Verbindungslinien ihrer Ecken hyperboloidische Lage haben, dann müssen auch die vier Schnittlinien entsprechender Tetraëderflächen hyperboloidische Lage haben *).

---

*) Der angeführte Satz ist in dieser Allgemeinheit zuerst von Herrn *O. Hermes* (dieses Journal Bd. 56, S. 222) ausgesprochen und analytisch bewiesen worden; es möge hier ein einfacher synthetischer Beweis dieses Satzes Platz finden:

Seien die beiden Tetraëder mit ihren Ecken, Seitenflächen und Kanten:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{abcd}, & \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1, \\ [\mathfrak{bcd}]=\alpha,\ [\mathfrak{cda}]=\beta,\ [\mathfrak{dab}]=\gamma,\ [\mathfrak{abc}]=\delta, & [\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]=\alpha_1,\ [\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1]=\beta_1,\ \dots \\ (\beta\gamma\delta)=\mathfrak{a},\ (\gamma\delta\alpha)=\mathfrak{b},\ (\delta\alpha\beta)=\mathfrak{c},\ (\alpha\beta\gamma)=\mathfrak{d}, & (\beta_1\gamma_1\delta_1)=\mathfrak{a}_1,\ (\gamma_1\delta_1\alpha_1)=\mathfrak{b}_1,\ \dots \\ |\mathfrak{cd}|=|\alpha\beta|,\ |\mathfrak{bd}|=|\alpha\gamma|,\ |\mathfrak{ad}|=|\beta\gamma|, & |\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|=|\alpha_1\beta_1|,\ \dots \\ |\mathfrak{ba}|=|\gamma\delta|,\ |\mathfrak{ca}|=|\beta\delta|,\ |\mathfrak{bc}|=|\alpha\delta|, & |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|=|\gamma_1\delta_1|,\ \dots \end{array}$$

Sollen die vier Verbindungslinien:

$$|\mathfrak{aa}_1|,\quad |\mathfrak{bb}_1|,\quad |\mathfrak{cc}_1|,\quad |\mathfrak{dd}_1|$$

hyperboloidische Lage haben, so muss jede Gerade, welche dreien von ihnen begegnet, auch die vierte treffen; die Schnittlinie g der beiden Ebenen $[\mathfrak{abb}_1]$ und $[\mathfrak{acc}_1]$ trifft $|\mathfrak{bb}_1|$ $|\mathfrak{cc}_1|$ und geht durch $\mathfrak{a}$, muss also auch $|\mathfrak{dd}_1|$ treffen, d. h. die Ebene $[\mathfrak{add}_1]$ muss die Gerade g enthalten oder, was dasselbe ist, die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{abb}_1],\quad [\mathfrak{acc}_1],\quad [\mathfrak{add}_1]$$

müssen sich in einer Geraden g schneiden; diese drei Ebenen lassen sich auch so schreiben:

$$[|\gamma\delta|,\mathfrak{b}_1],\quad [|\beta\delta|,\mathfrak{c}_1],\quad [|\beta\gamma|,\mathfrak{d}_1].$$

Betrachten wir nun in der Ebene:

$$\alpha_1 = [\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1]$$

die Durchschnittslinien mit den drei in g sich schneidenden Ebenen, so sind dies drei durch einen Punkt $\mathfrak{p}$ laufende Strahlen, wenn $\mathfrak{p}$ den Punkt bezeichnet, in welchem g die Ebene α_1 trifft. Bezeichnen wir daher die Schnittpunkte:

$$(|\gamma\delta|,\alpha_1)=\mathfrak{b}'_1,\quad (|\delta\beta|,\alpha_1)=\mathfrak{c}'_1,\quad (|\beta\gamma|,\alpha_1)=\mathfrak{d}'_1,$$

Hieraus folgt zugleich umgekehrt, dass, wenn die eine Gruppe von vier Geraden nicht hyperboloidisch liegt, auch die andere Gruppe von vier Geraden nicht hyperboloidisch liegen kann. Nun sind k, k', l, l' Durchschnittslinien der entsprechenden Seitenflächen der beiden Tetraëder:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1,$$

und da die Verbindungslinien entsprechender Ecken:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|,\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|,\quad |\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1|,$$

wie wir oben gesehen (S. 146), nicht hyperboloidische Lage haben, so können auch k, k', l, l' nicht hyperboloidisch liegen.

Da das Geradenpaar gg', welches den Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ begegnet, ein Paar conjugirter Strahlen ist in Bezug auf das Höhenhyperboloid $H^{(2)}$, welches durch die Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{b}|$ geht, so trennen die Treffpunkte von gg' mit $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ sowohl diese Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ har-

---

so haben wir in der Ebene α_1 zwei perspectiv liegende Dreiecke:

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$$
$$\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1\mathfrak{d}'_1$$

weil sich $|\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}'_1|$, $|\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}'_1|$, $|\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}'_1|$ in dem Punkte $\mathfrak{p}$ schneiden. Hieraus folgt, dass die drei Durchschnittspunkte entsprechender Seiten der beiden perspectiv liegenden Dreiecke auf einer Geraden l sich befinden müssen, und diese Gerade l enthält die Punkte:

$$(|\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|,\ |\mathfrak{b}'_1\mathfrak{c}'_1|),\quad (|\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1|,\ |\mathfrak{c}'_1\mathfrak{d}'_1|),\quad (|\mathfrak{d}_1\mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{d}'_1\mathfrak{b}'_1|)$$

oder

$$(|\alpha_1\delta_1|,\ |\delta\alpha_1|),\quad (|\alpha_1\beta_1|,\ |\beta\alpha_1|),\quad (|\alpha_1\gamma_1|,\ |\gamma\alpha_1|)$$

oder

$$(\alpha_1\delta_1\delta),\qquad (\alpha_1\beta_1\beta),\qquad (\alpha_1\gamma_1\gamma)..$$

Dies sagt aus, dass die Gerade l den drei Geraden $|\beta\beta_1|$, $|\gamma\gamma_1|$, $|\delta\delta_1|$ begegnet, und da l in der Ebene α_1 liegt, also auch die Schnittlinie $|\alpha\alpha_1|$ trifft, so trifft l alle vier Schnittlinien:

$$|\alpha\alpha_1|,\quad |\beta\beta_1|,\quad |\gamma\gamma_1|,\quad |\delta\delta_1|.$$

Wir haben also bewiesen, dass, wenn die Gerade g die vier Verbindungslinien:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|,\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1|,\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1|,\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1|$$

trifft, die Gerade l die vier Schnittlinien:

$$|\alpha\alpha_1|,\quad |\beta\beta_1|,\quad |\gamma\gamma_1|,\quad |\delta\delta_1|$$

treffen muss. Ebenso wie wir von $\mathfrak{a}$ ausgehend die Gerade g als Schnittlinie der drei Ebenen $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1]$, $[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1]$ gewählt haben und von ihr zur Geraden l gelangt sind, können wir von $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ ausgehend drei andere Gerade g', g'', g''' wählen und von ihnen zu den Geraden l', l'', l''' gelangen, so dass also, wenn g, g', g'', g''' den Verbindungslinien $|\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1|$, ... begegnen, l, l', l'', l''' den Schnittlinien $|\alpha\alpha_1|$, ... begegnen müssen. Dadurch ist die Abhängigkeit der hyperboloidischen Lage der einen Gruppe von je vier Geraden von der andern Gruppe erschlossen und die Richtigkeit des obigen Satzes bewiesen.

monisch, als auch die Treffpunkte von gg' mit $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ diese Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ harmonisch, folglich liegen die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{b}|,\quad g,\quad g'$$

im Raume hyperboloidisch-harmonisch, d. h. die Treffpunkte irgend einer Geraden, welche allen vieren begegnet, liegen so, dass die beiden ersten durch die beiden letzten harmonisch getrennt werden.

Da aber das Geradenpaar gg', welches den Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|$ begegnet, auch ein Paar conjugirter Strahlen ist in Bezug auf das orthogonale Hyperboloid $H_1^{(2)}$, welches durch die Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{a}|$ geht, so liegen auch die vier Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{b}|,\quad |\mathfrak{B}\mathfrak{a}|,\quad g,\quad g'$$

hyperboloidisch-harmonisch im Raume, was auch eine unmittelbare Folge des Vorigen ist. Die Gerade $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$, welche diesen vier Geraden begegnet, muss daher von ihnen in vier harmonischen Punkten getroffen werden. Da andererseits auf der Geraden $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ auch die beiden Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ selbst harmonisch getrennt werden durch die Treffpunkte mit gg', so haben wir auf $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ zwei Punktepaare einer Punktinvolution, deren Doppelpunkte die Treffpunkte mit gg' sind. Das Analoge gilt für die Gerade $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, und wir erhalten hieraus zur Bestimmung des Geradenpaares gg' folgende Construction:

Wenn man auf dem Paar Gegenkanten $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ des Tetraëders die beiden Punktinvolutionen ermittelt, welche durch die Punktepaare bestimmt werden:

$$\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B},\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{C}\mathfrak{d}) \text{ und } (\mathfrak{A}\mathfrak{B},\ \mathfrak{D}\mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{D},\quad (\mathfrak{C}\mathfrak{D},\ \mathfrak{A}\mathfrak{b}) \text{ und } (\mathfrak{C}\mathfrak{D},\ \mathfrak{B}\mathfrak{a}),$$

so geht das Geradenpaar gg' durch die Doppelpunkte dieser Punktinvolutionen.

Hat man umgekehrt die Doppelpunkte dieser beiden Punktinvolutionen ermittelt, so lassen sich dieselben durch zwei Linienpaare (ausser $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$) verbinden, und es entsteht die Frage, ob das eine oder das andere Linienpaar das Geradenpaar gg' ist. Diese Frage entscheidet sich aber leicht, wenn wir bemerken, dass für das orthogonale Hyperboloid $H_1^{(2)}$, welches durch die Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ geht, das Strahlenpaar gg' ein Paar conjugirter Strahlen ist. Haben wir nun ein windschiefes Vierseit, von welchem ein Seitenpaar ($|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$) ein Paar Erzeugender und das andere Seitenpaar ein Paar conjugirter Strahlen für ein Hyperboloid $H_1^{(2)}$ ist, so muss das Diagonalenpaar ein Paar Erzeugender desselben

sein, wie aus der Natur des räumlichen Polarsystems unmittelbar hervorgeht. Haben wir also auf den Geraden $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ die Doppelpunkte der vorigen Punktinvolutionen ermittelt, so wird das eine sie verbindende Strahlenpaar ein Paar Erzeugender des orthogonalen Hyperboloids $H_1^{(2)}$ sein müssen, und das andere ist das gesuchte Strahlenpaar gg'.

In ähnlicher Weise kann man das Geradenpaar gg' bestimmen durch die Doppelpunkte von Punktinvolutionen, welche auf dem Paar Gerader:

$$|\mathfrak{ab}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{cd}|$$

unmittelbar gegeben sind. Zunächst sehen wir, weil die vier Geraden:

$$|\mathfrak{Aa}|, \quad |\mathfrak{Bb}|, \quad g, \quad g'$$

hyperboloidisch-harmonisch im Raume liegen, dass die Gerade $|\mathfrak{ab}|$, welche allen vieren begegnet, in vier harmonischen Punkten von ihnen getroffen wird; folglich werden die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ harmonisch getrennt durch die Treffpunkte der Geraden $|\mathfrak{ab}|$ mit dem Paare gg'.

Ferner sind für das Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ (No. 2) die Geraden $|\mathfrak{AB}_1|$ und $|\mathfrak{BA}_1|$ Erzeugende, die Geraden gg' conjugirte Strahlen, folglich müssen die Geraden $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1|$, welche allen vieren begegnen, in je vier harmonischen Punkten getroffen werden, und es liegen daher auch die vier Geraden:

$$|\mathfrak{AB}_1|, \quad |\mathfrak{BA}_1|, \quad g, \quad g'$$

hyperboloidisch-harmonisch im Raume; diese vier Geraden werden aber von $|\mathfrak{ab}|$ getroffen, folglich werden die beiden Punkte:

$$(\mathfrak{ab}, \mathfrak{AB}_1) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{ab}, \mathfrak{BA}_1)$$

harmonisch getrennt durch die Treffpunkte der Geraden $|\mathfrak{ab}|$ mit dem Paare gg'. In gleicher Weise liegen natürlich auch die vier Geraden:

$$|\mathfrak{CD}_1|, \quad |\mathfrak{DC}_1|, \quad g, \quad g'$$

hyperboloidisch-harmonisch im Raume und werden ebenfalls von der Geraden $|\mathfrak{ab}|$ getroffen; folglich werden auch die beiden Punkte:

$$(\mathfrak{ab}, \mathfrak{CD}_1) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{ab}, \mathfrak{DC}_1)$$

harmonisch getrennt durch die Treffpunkte der Geraden $|\mathfrak{ab}|$ mit dem Paare gg'.

Wir haben somit auf $|\mathfrak{ab}|$ drei Punktepaare einer Punktinvolution, deren Doppelpunkte die Treffpunkte mit gg' sind, und das Analoge gilt für die Gerade $|\mathfrak{cd}|$, also können wir den Satz aussprechen:

Wenn man auf dem Geradenpaar $|\mathfrak{ab}|$ ***und*** $|\mathfrak{cd}|$ ***die je drei Punktepaare ermittelt:***

$\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; $(\mathfrak{ab}, \mathfrak{AB}_1)$ und $(\mathfrak{ab}, \mathfrak{BA}_1)$; $(\mathfrak{ab}, \mathfrak{CD}_1)$ und $(\mathfrak{ab}, \mathfrak{DC}_1)$,

$\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$; $(\mathfrak{cd}, \mathfrak{AB}_1)$ und $(\mathfrak{cd}, \mathfrak{BA}_1)$; $(\mathfrak{cd}, \mathfrak{CD}_1)$ und $(\mathfrak{cd}, \mathfrak{DC}_1)$,

so gehören dieselben je einer Punktinvolution an, und durch die Doppelpunkte dieser Punktinvolutionen geht das Geradenpaar gg'.

Da die Doppelpunkte der Punktinvolutionen durch zwei Strahlenpaare verbunden werden können, von denen nur eines das Paar gg' ist, so wird, wie vorhin, das andere Strahlenpaar dadurch auszuscheiden und erkennbar sein, dass es sich als ein Paar Erzeugender des Hyperboloids $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ herausstellt.

Ferner ist es leicht, einzusehen, dass die durch die angegebene Construction zu ermittelnden Punktinvolutionen sowohl auf dem Kantenpaar $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ des ursprünglichen Tetraëders, als auch auf dem Kantenpaar $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$ des von den Fusspunkten der Höhen gebildeten Tetraëders immer *gleichartig* sein müssen, d. h. entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch, und der Fall nicht möglich ist, dass die eine Punktinvolution elliptisch, die andere hyperbolisch sei; die Strahlen gg' sind also entweder beide reell oder beide imaginär.

Denn in dem orthogonalen Hyperboloid $H_1^{(2)}$, welches durch die Kanten $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ gelegt werden kann, sind:

$$|\mathfrak{Ab}|, \quad |\mathfrak{Ba}|, \quad |\mathfrak{Cd}|, \quad |\mathfrak{Dc}|$$

vier Erzeugende der einen Regelschaar, treffen also die beiden Erzeugenden $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ der andern Regelschaar in zwei projectiven Punktreihen; also sind die Doppelverhältnisse der je vier Punkte:

$$\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{AB}, \mathfrak{Cd}), \quad (\mathfrak{AB}, \mathfrak{Dc}),$$
$$(\mathfrak{CD}, \mathfrak{Ab}), \quad (\mathfrak{CD}, \mathfrak{Ba}), \quad \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{D}$$

einander gleich. Ist also der Werth des einen Doppelverhältnisses positiv, so ist es auch der des andern; ist der Werth des ersten negativ, so ist es auch der des zweiten. Der Werth eines Doppelverhältnisses ist aber allemal negativ oder positiv, je nachdem das eine Paar zugeordneter Punkte durch das andere getrennt wird oder nicht. Da nun hier die zugeordneten Punkte die Paare von Punktinvolutionen sind und das Trennen oder Nicht-Trennen der Paare den elliptischen oder hyperbolischen Charakter der Punktinvolution bestimmt, so schliessen wir:

Die Punktinvolutionen auf dem Kantenpaar $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$, welche durch die vorige Construction bestimmt werden, sind allemal gleichartig, d. h.

entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch. Dasselbe gilt von den Punktinvolutionen auf dem Geradenpaar $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$, indem wir nur das Hyperboloid $\mathfrak{H}_1^{(2)}$ mit seinen vier Erzeugenden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1|$$

durch die beiden Erzeugenden $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$ der andern Regelschaar zu durchschneiden und dieselbe Schlussfolge anzuwenden haben.

Aus der Projectivität der beiden Punktreihen auf den Trägern $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ folgt aber auch bei der paarweisen Gruppirung der je vier Punkte zu Punktepaaren einer Involution, dass die Doppelpunkte dieser Involutionen einander in bestimmter Weise entsprechen, wodurch das Strahlenpaar gg' charakterisirt wird.

Denn bezeichnen wir zur Abkürzung die Punkte:

$$(\mathfrak{AB}, \mathfrak{Cd}) = \mathfrak{p}, \quad (\mathfrak{AB}, \mathfrak{Dc}) = \mathfrak{q},$$
$$(\mathfrak{CD}, \mathfrak{Ab}) = \mathfrak{r}, \quad (\mathfrak{CD}, \mathfrak{Ba}) = \mathfrak{s},$$

so liefert die Projectivität der Punktreihen auf $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ die Gleichheit der Doppelverhältnisse:

$$(\mathfrak{ABpq}) = (\mathfrak{rsCD}).$$

Nennen wir aber $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ die Doppelpunkte der Punktinvolution, welche auf $|\mathfrak{AB}|$ durch die Punktepaare $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, bestimmt wird, und sind $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}'_1$ die in der Geraden $|\mathfrak{CD}|$ den Punkten $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ projectiv entsprechenden Punkte, so haben wir:

$$(\mathfrak{ABpg}) = (\mathfrak{BAqg})$$

wegen der projectiven Natur einer Involution; ferner

$$(\mathfrak{ABpg}) = (\mathfrak{rsC}\mathfrak{g}_1),$$
$$(\mathfrak{BAqg}) = (\mathfrak{srD}\mathfrak{g}_1),$$

folglich

$$(\mathfrak{rsC}\mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{srD}\mathfrak{g}_1),$$

also ist $\mathfrak{g}_1$ ein Doppelpunkt der Punktinvolution auf $|\mathfrak{CD}|$, welche durch die Punktepaare $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ bestimmt wird, und in gleicher Weise der andere Doppelpunkt $\mathfrak{g}'_1$ derjenige, welcher dem Doppelpunkt $\mathfrak{g}'$ des Trägers $|\mathfrak{AB}|$ projectiv entspricht. Hieraus folgt, dass die Verbindungslinien $|\mathfrak{gg}'|$ und $|\mathfrak{g}'\mathfrak{g}'_1|$ Erzeugende des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ und daher das einzig übrig bleibende Paar von Verbindungslinien $|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1|$ und $|\mathfrak{g}'\mathfrak{g}_1|$ das Geradenpaar gg' ist.

Endlich wollen wir noch bemerken eine Eigenschaft des Geradenpaars gg', welche sich unmittelbar aus dem Vorigen ergiebt. Da nämlich auf der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch die Treffpunkte mit gg' harmonisch getrennt werden und ebenso auf der Geraden $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ die Punkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ durch die Treffpunkte mit gg', so folgt, dass die vier Strahlen:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|, \quad g, \quad g'$$

und ebenso auch die vier Strahlen:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad g, \quad g'$$

hyperboloidisch-harmonisch liegen; in gleicher Weise liegen offenbar auch

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{c}|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{d}|. \quad g, \quad g'$$

und

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|, \quad g, \quad g'$$

hyperboloidisch-harmonisch. Wir können also folgende Eigenschaft des Geradenpaars gg' aussprechen:

Das Geradenpaar gg' besitzt rücksichtlich des Tetraëders $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Eigenschaft, dass es dem einen Paar Gegenkanten desselben $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ begegnet und mit jedem der beiden übrigen Paare von Gegenkanten hyperboloidisch-harmonisch liegt. Dieselbe Eigenschaft besitzt das Geradenpaar gg' auch rücksichtlich des Tetraëders $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$.

5. Das Geradenpaar gg', an welches sich unsere Betrachtungen von No. 3 und 4 knüpften, ging hervor aus der Gruppe (I.) von 8 Tetraëdern (No. 2), welcher die beiden Gruppen (II.) und (III.) zur Seite stehen; es ist einleuchtend, dass für diese genau dieselben Betrachtungen und Resultate sich ergeben. Es tritt also zu dem Geradenpaar gg', welches den vier Geraden begegnet:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|, \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{d}|,$$

noch ein zweites Geradenpaar hh', welches den vier Geraden begegnet:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{c}|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{d}|,$$

und ein drittes Geradenpaar ii', welches den vier Geraden begegnet:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{C}|, \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{d}|, \quad |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|;$$

Den Zusammenhang dieser drei Geradenpaare wollen wir jetzt ermitteln.

Hierzu betrachten wir einerseits die vier Geraden:

$$|[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}], \quad [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = k,$$
$$|[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{c}], \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = l,$$
$$|[\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{c}], \quad [\mathfrak{D}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = m,$$
$$|[\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{c}], \quad [\mathfrak{C}\mathfrak{b}\mathfrak{d}]| = n,$$

und andererseits die vier Geraden:

$$|[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad [\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]| = k_1,$$
$$|[\mathfrak{C}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]| = l_1,$$
$$|[\mathfrak{B}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad [\mathfrak{D}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]| = m_1,$$
$$|[\mathfrak{D}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad [\mathfrak{B}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]| = n_1,$$

von denen die vier ersten Schnittlinien entsprechender Seitenflächen von Tetraëderpaaren aus der Gruppe (I.) in (No. 2), die vier letzten aus der Gruppe (II.) entnommen sind, also die ersteren von dem Geradenpaar gg', die letzteren von dem Geradenpaar hh' getroffen werden.

Es ist nun ersichtlich, dass die vier Ebenen:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{c}],\quad [\mathfrak{B}\mathfrak{b}\mathfrak{d}],\quad [\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{b}],\quad [\mathfrak{C}\mathfrak{c}\mathfrak{d}]$$

sich in einem Punkte schneiden müssen, denn die erste und dritte Ebene schneiden sich in der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$, die zweite und vierte Ebene in der Geraden $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{d}|$ und die beiden Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{a}|$ und $|\mathfrak{D}_1\mathfrak{d}|$ treffen sich im Raume, weil sie in einer Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{D}_1]$ liegen, folglich müssen sich die obigen vier Ebenen in einem Punkte schneiden, durch welchen sämmtliche sechs Schnittlinien je zweier derselben hindurchgehen müssen; mithin ist der Schnittpunkt:

$$(kk_1) = (\mathfrak{A}\mathfrak{a},\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{d}).$$

In gleicher Weise erkennen wir, dass die Schnittpunkte:

$$(kl_1) = (\mathfrak{A}\mathfrak{c},\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{b}),$$
$$(km_1) = (\mathfrak{B}\mathfrak{b},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{c}),$$
$$(kn_1) = (\mathfrak{B}\mathfrak{d},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{a})$$

sind, und ebenso ergeben sich die Schnittpunkte:

$$(lk_1) = (\mathfrak{A}\mathfrak{b},\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{c});\quad (mk_1) = (\mathfrak{C}\mathfrak{c},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{b});\quad (nk_1) = (\mathfrak{C}\mathfrak{d},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{a});$$
$$(ll_1) = (\mathfrak{A}\mathfrak{d},\ \mathfrak{D}_1\mathfrak{a});\quad (ml_1) = (\mathfrak{C}\mathfrak{a},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{d});\quad (nl_1) = (\mathfrak{C}\mathfrak{b},\ \mathfrak{B}_1\mathfrak{c});$$
$$(lm_1) = (\mathfrak{B}\mathfrak{a},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{d});\quad (mm_1) = (\mathfrak{D}\mathfrak{d},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{a});\quad (nm_1) = (\mathfrak{D}\mathfrak{c},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{b});$$
$$(ln_1) = (\mathfrak{B}\mathfrak{c},\ \mathfrak{C}_1\mathfrak{b});\quad (mn_1) = (\mathfrak{D}\mathfrak{b},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{c});\quad (nn_1) = (\mathfrak{D}\mathfrak{a},\ \mathfrak{A}_1\mathfrak{d}).$$

Es zeigt sich also, dass jede der vier Geraden $klmn$ jeder der vier Geraden $k_1 l_1 m_1 n_1$ im Raume begegnet; folglich gehören die ersten vier Geraden der einen Regelschaar, die zweiten vier Geraden der andern Regelschaar eines und desselben Hyperboloids an, welches wir mit $H^{(2)}$ bezeichnen wollen. Der einen Regelschaar dieses Hyperboloids gehören offenbar auch die

beiden Geraden $|\mathfrak{ac}|$ und $|\mathfrak{bd}|$ an, weil sie den vier Geraden $klmn$ gleichzeitig begegnen, der andern Regelschaar die beiden Geraden $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$, weil sie den vier Geraden $k_1 l_1 m_1 n_1$ gleichzeitig begegnen; das Hyperboloid $H^{(2)}$ geht also durch die vier Seiten des windschiefen Vierseits:

$$\mathfrak{abdc}.$$

Dies Resultat, *dass die sechs Geraden:*

$$|\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n$$

einer Regelschaar, und die sechs Geraden:

$$|\mathfrak{ac}|, \quad |\mathfrak{bd}|, \quad k_1, \quad l_1, \quad m_1, \quad n_1$$

der andern Regelschaar eines und desselben Hyperboloids angehören, ergiebt zugleich die Projectivität der beiden Ebenenbüschel:

$$|\mathfrak{ac}|[\mathfrak{ABCD}] \;\overline{\wedge}\; |\mathfrak{bd}|[\mathfrak{BADC}],$$

sowie die Projectivität der beiden Ebenenbüschel:

$$|\mathfrak{ab}|[\mathfrak{ABCD}] \;\overline{\wedge}\; |\mathfrak{cd}|[\mathfrak{CDAB}],$$

aus welcher durch Umstellung der Elemente sich ergiebt

$$|\mathfrak{ab}|[\mathfrak{ABCD}] \;\overline{\wedge}\; |\mathfrak{cd}|[\mathfrak{ABCD}],$$

und hieraus folgt, dass die vier Geraden:

$$|\mathfrak{AB}_1|, \quad |\mathfrak{BA}_1|, \quad |\mathfrak{CD}_1|, \quad |\mathfrak{DC}_1|$$

hyperboloidische Lage haben, ein Resultat, welches schon oben (No. 2) auf andere Weise ermittelt wurde.

Da nun das Geradenpaar gg' den sechs Geraden:

$$|\mathfrak{ab}|, \quad |\mathfrak{cd}|, \quad k, \quad l, \quad m, \quad n$$

gleichzeitig begegnen muss, und ebenso das Geradenpaar hh' den sechs Geraden:

$$|\mathfrak{ac}|, \quad |\mathfrak{bd}|, \quad k_1, \quad l_1, \quad m_1, \quad n_1$$

gleichzeitig begegnen muss, so gehören auch gg' und hh' den beiden Regelschaaren desselben Hyperboloids $H^{(2)}$ an, und das erste Geradenpaar muss daher dem zweiten im Raume begegnen.

In ganz derselben Weise können wir nachweisen, dass auch das dritte Geradenpaar ii', welches aus der Gruppe (III.) der Tetraëderpaare (No. 2) entspringt, sowohl dem Geradenpaare gg', als auch dem Geradenpaare hh' begegnen muss. Da der Strahl i aber die Strahlen g und h treffen muss, die selbst in einer Ebene liegen, so muss i entweder in der

Ebene $[gh]$ liegen, oder, wenn i nicht in dieser Ebene liegt, durch den Punkt (gh) gehen. Da i gleichzeitig den beiden Strahlen g' und h' begegnet, die selbst in einer Ebene liegen, so muss i entweder in der Ebene $[g'h']$ liegen, oder durch den Punkt $(g'h')$ gehen. Es muss daher die Gerade i entweder die Schnittlinie $|[gh], [g'h']|$ oder die Verbindungslinie $|(gh), (g'h')|$ sein; denn der noch denkbare Fall, dass i durch den Punkt (gh) ginge und in der Ebene $[g'h']$ läge, ist unzulässig, weil der Punkt (gh) ausserhalb der Ebene $[g'h']$ liegt. Das Gleiche gilt auch für die Gerade i', welche entweder mit der Verbindungslinie $|(gh), (g'h')|$ oder mit der Schnittlinie $|[gh], [g'h']|$ zusammenfallen muss. Da es aber nur zwei Gerade ii' giebt, so wird die eine von ihnen die Verbindungslinie $|(gh), (g'h')|$ und die andere die Schnittlinie $|[gh], [g'h']|$ sein müssen.

Dies lässt sich nun so aussprechen:

Die drei Geradenpaare gg', hh', ii', fügen sich zu den drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders zusammen, treffen sich also viermal zu je dreien in einem Punkte (Tetraëderecke) und liegen viermal zu je dreien in einer Ebene (Tetraëderfläche).

Nennen wir die Ecken dieses Tetraëders:

$$\mathfrak{O} = (g\,h\,i),$$
$$\mathfrak{O}_1 = (g\,h'i'),$$
$$\mathfrak{O}_2 = (g'h\,i'),$$
$$\mathfrak{O}_3 = (g'h'i\,),$$

also

$$g = |\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_1|,\quad h = |\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_2|,\quad i = |\mathfrak{O}\,\mathfrak{O}_3|,$$
$$g' = |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|,\quad h' = |\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|,\quad i' = |\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|;$$

es ist leicht zu sehen, welche Bedeutung dieses Tetraëder $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ für unsere Raumcurve $C^{(4)}$ hat. Da nämlich (No. 4) sowohl gg', als auch hh' und ii' je ein Paar conjugirter Strahlen für sämmtliche Oberflächen zweiter Ordnung ist, welche durch die Raumcurve $C^{(4)}$ gehen, so ist $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ *das gemeinsame Polartetraëder für sämmtliche Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch die Raumcurve $C^{(4)}$ gehen.* Hieraus folgt die weitere Eigenschaft, dass *die Ecken des gemeinsamen Polartetraëders die Mittelpunkte (Spitzen) der vier Kegel zweiter Ordnung sind, welche sich durch die Raumcurve $C^{(4)}$ legen lassen,* d. h. dem Flächenbüschel durch $C^{(4)}$ angehören. Denn jede Ebene, welche durch eine Ecke des Tetraëders gelegt wird, schneidet die gegen-

überliegende Seitenfläche in einer Geraden und das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel, für welches jene Ecke und diese Gerade Pol und Polare sind. Die Ecke muss also ein Tripelpunkt für das Kegelschnittbüschel oder der Doppelpunkt eines in demselben enthaltenen Linienpaares sein. Da nun die durch die Tetraëderecke und die Raumcurve $C^{(4)}$ bestimmte Fläche zweiter Ordnung von jeder durch die Tetraëderecke gelegten Ebene in einem Linienpaar geschnitten wird, so ist sie ein Kegel zweiter Ordnung. Wir bemerken noch, dass unsere Construction der vier Kegelspitzen allein vom zweiten Grade ist, indem sie nur von der Ermittelung der Doppelpunkte bekannter Punktinvolutionen abhängt (S. 153). Diese Construction giebt auch Aufschluss über die Realität des Polartetraëders.

Schon früher sahen wir, dass die Punktinvolutionen auf einem Paar Gegenkanten des Tetraëders $\mathfrak{ABCD}$, durch deren Doppelpunkte das Geradenpaar gg' (ebenso hh' und ii') geht, immer gleichartig sein müssen; ob diese nun hyperbolisch oder elliptisch sind, erkennen wir sofort, wenn wir die Punktinvolutionen auf drei Tetraëderkanten einer Seitenfläche z. B. $[\mathfrak{ABC}]$ untersuchen. Wir haben

auf der Kante $|\mathfrak{AB}|$ die Punktepaare: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, $(\mathfrak{AB}, \mathfrak{C}\mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{AB}, \mathfrak{D}\mathfrak{c})$,
- - - $|\mathfrak{AC}|$ - - $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, $(\mathfrak{AC}, \mathfrak{B}\mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{AC}, \mathfrak{D}\mathfrak{b})$,
- - - $|\mathfrak{BC}|$ - - $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, $(\mathfrak{BC}, \mathfrak{A}\mathfrak{d})$ und $(\mathfrak{BC}, \mathfrak{D}\mathfrak{a})$,

zur Bestimmung der zugehörigen Punktinvolutionen.

In der Ebene $[\mathfrak{ABC}\mathfrak{d}]$ sind die drei Punkte:

$$(\mathfrak{AB}, \mathfrak{C}\mathfrak{d}), \quad (\mathfrak{AC}, \mathfrak{B}\mathfrak{d}), \quad (\mathfrak{BC}, \mathfrak{A}\mathfrak{d}),$$

nichts anderes, als die Durchschnittspunkte der Dreiecksseiten $|\mathfrak{AB}|$, $|\mathfrak{AC}|$, $|\mathfrak{BC}|$ und der Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken $\mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}$ mit dem vierten Punkte $\mathfrak{d}$. Solche drei Punkte können immer nur auf zweierlei Art gelegen sein, nämlich: entweder 1) alle drei liegen zwischen den Ecken des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$, oder 2) einer liegt zwischen den Dreiecksecken und die beiden andern auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten.

Ferner liegt der Punkt $(\mathfrak{AB}, \mathfrak{D}\mathfrak{c})$ in der Schnittlinie:

$$|[\mathfrak{DAB}]\ ,\ [\mathfrak{DC}\mathfrak{c}]|$$

d. h. in der Ebene, welche durch $|\mathfrak{DC}|$ normal zur Ebene $[\mathfrak{DAB}]$ gelegt werden kann; ebenso liegt der Punkt $(\mathfrak{AC}, \mathfrak{D}\mathfrak{b})$ in der Schnittlinie:

$$|[\mathfrak{DAC}]\ ,\ [\mathfrak{DB}\mathfrak{b}]|$$

d. h. in der Ebene, welche durch $|\mathfrak{D}\mathfrak{B}|$ normal zur Ebene $[\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{C}]$ gelegt werden kann, und endlich liegt der Punkt $(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\mathfrak{a})$ in der Schnittlinie:

$$|[\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C}], [\mathfrak{D}\mathfrak{A}\mathfrak{a}]|,$$

d. h. in der Ebene, welche durch $|\mathfrak{D}\mathfrak{A}|$ normal zur Ebene $[\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ gelegt werden kann.

Wenn man aber in dem Dreikant $|\mathfrak{D}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{D}\mathfrak{C}|$ durch jede Kante normal zur Ebene der beiden andern eine Ebene legt, so schneiden sich diese drei Ebenen bekanntlich in einer Geraden (Höhenstrahl des Dreikants, s. o. S. 132); trifft diese Gerade die Ebene $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ in dem Punkte $\mathfrak{d}'$, so sind die drei Punkte:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{D}\mathfrak{c}), \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\mathfrak{b}), \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{D}\mathfrak{a})$$

identisch mit

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{C}\mathfrak{d}'), \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\mathfrak{d}'), \quad (\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{A}\mathfrak{d}')$$

d. h. die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien $|\mathfrak{A}\mathfrak{d}'|$, $|\mathfrak{B}\mathfrak{d}'|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{d}'|$ mit den Gegenseiten des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$; folglich liegen diese drei Punkte in gleicher Weise auf den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, wie die vorigen drei Punkte, d. h. entweder alle drei zwischen den Ecken oder einer zwischen den Ecken des Dreiecks und die beiden andern auf den Verlängerungen der Dreiecksseiten.

Wir können jetzt das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und die beiden Punkte $\mathfrak{d}$ $\mathfrak{d}'$ auffassen und die Lage der Durchschnittspunkte der Verbindungslinien $|\mathfrak{d}\mathfrak{A}|$ $|\mathfrak{d}\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{d}\mathfrak{C}|$ so wie $|\mathfrak{d}'\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{d}'\mathfrak{B}|$, $|\mathfrak{d}'\mathfrak{C}|$ mit den Dreiecksseiten $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$, $|\mathfrak{C}\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ durch das Zeichen $+$ oder $-$ bezeichnen, je nachdem sie je zwei Dreiecksecken trennen oder nicht trennen, dann erhalten wir folgende Möglichkeiten:

(für $\mathfrak{d}$)			(für $\mathfrak{d}'$)		
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{B}\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{C}\rvert$	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{C}\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{B}\rvert$	$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{C}\rvert$	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{C}\rvert$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Verbinden wir nun jede Möglichkeit für $\mathfrak{d}$ mit jeder Möglichkeit für $\mathfrak{d}'$ und bezeichnen immer die Verbindung zweier gleichen Zeichen durch h (hyperbolische Involution), die Verbindung zweier entgegengesetzten Zeichen durch e (elliptische Involution), so erhalten wir die 16 Fälle:

$\|\mathfrak{AB}\|$	$\|\mathfrak{AC}\|$	$\|\mathfrak{BC}\|$
h	*h*	*h*
h	*e*	*e*
e	*h*	*e*
e	*e*	*h*
h	*e*	*e*
h	*h*	*h*
e	*e*	*h*
e	*h*	*e*
e	*h*	*e*
e	*e*	*h*
h	*h*	*h*
h	*e*	*e*
e	*e*	*h*
e	*h*	*e*
h	*e*	*e*
h	*h*	*h*

d. h. viermal die Verbindung *hhh* und zwölfmal die Verbindungen: *hee* oder *ehe* oder *eeh*, also:

Von den drei Punktinvolutionen auf den Seiten eines Dreiecks, welches eine Seitenfläche des Tetraëders ist, sind entweder alle drei hyperbolisch oder eine ist hyperbolisch und die beiden andern sind elliptisch; da ferner die Punktinvolutionen auf einem Paar Gegenkanten des Tetraëders immer gleichartig sind, so folgt:

Von den sechs Punktinvolutionen auf den Kanten des Tetraëders $\mathfrak{ABCD}$ sind entweder sämmtliche hyperbolisch oder nur zwei auf einem Paar Gegenkanten des Tetraëders hyperbolisch und die vier übrigen elliptisch. Von den drei Geradenpaaren gg', hh', ii' sind also entweder alle drei oder nur eines reell, d. h. die Ecken des Polartetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ sind entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär; immer aber muss ein Paar Gegenkanten des Tetraëders reell sein. Der Fall, dass von dem Polartetraëder nur zwei Ecken reell und die beiden andern imaginär sind, kann also hier überhaupt nicht eintreten. Wir werden im Folgenden vorzugsweise den Fall eines völlig reellen Polartetraëders im Auge behalten.

6. Wir haben oben (S. 153) gesehen, dass auf dem Paare Gegenkanten $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ die Doppelpunkte der Punktinvolutionen, welche

durch die Punktepaare:

$$\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{AB}, \mathfrak{Cd}) \text{ und } (\mathfrak{AB}, \mathfrak{Dc}),$$
$$\mathfrak{C} \text{ und } \mathfrak{D}, \quad (\mathfrak{CD}, \mathfrak{Ab}) \text{ und } (\mathfrak{CD}, \mathfrak{Ba})$$

bestimmt sind, durch zwei Linienpaare verbunden werden können, von denen das eine das Geradenpaar gg' ist und das andere auf dem orthogonalen Hyperboloid $H_1^{(2)}$ liegt. Betrachten wir dieses zweite Linienpaar und die analogen beiden Linienpaare, welche in gleicher Weise bei dem Kantenpaar $|\mathfrak{AC}|$ und $|\mathfrak{BD}|$ und bei dem Kantenpaar $|\mathfrak{AD}|$ und $|\mathfrak{BC}|$ auftreten, so erkennen wir, dass auch diese drei Linienpaare im Raume zu den drei Paar Gegenkanten eines neuen Tetraëders sich zusammenfügen. Um dies zu erkennen, bezeichnen wir die Treffpunkte

der Geraden	g	mit dem Kantenpaar	$\|\mathfrak{AB}\|$	und	$\|\mathfrak{CD}\|$	durch	$\mathfrak{g}$	und $\mathfrak{g}_1$,
- -	g'	- - -	-	und	-	-	$\mathfrak{g}'$	und $\mathfrak{g}'_1$,
- -	h	- - -	$\|\mathfrak{AC}\|$	und	$\|\mathfrak{BD}\|$	-	$\mathfrak{h}$	und $\mathfrak{h}_1$,
- -	h'	- - -	-	und	-	-	$\mathfrak{h}'$	und $\mathfrak{h}'_1$,
- -	i	- - -	$\|\mathfrak{AD}\|$	und	$\|\mathfrak{BC}\|$	-	$\mathfrak{i}$	und $\mathfrak{i}_1$,
- -	i'	- - -	-	und	-	-	$\mathfrak{i}'$	und $\mathfrak{i}'_1$,

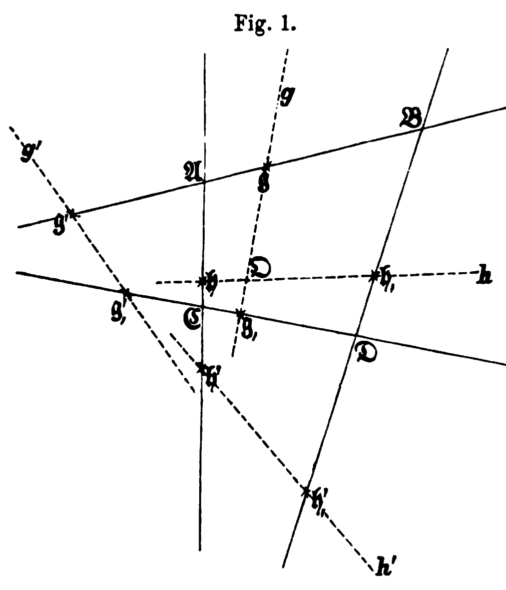


Fig. 1.

dann haben wir zunächst auf jeder der vier Seiten des windschiefen Vierseits

$$\mathfrak{ABDC}$$

ein Punktepaar, welches die beiden Ecken nach dem Obigen harmonisch trennt; es ist also das Doppelverhältniss

$$(\mathfrak{ABgg}') = -1,$$

und wenn wir diese vier harmonischen Punkte mit der Geraden $|\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1|$ verbinden, so erhalten wir vier harmonische Ebenen:

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1|[\mathfrak{ABgg}'] = -1,$$

welche der Geraden $|\mathfrak{AC}|$ wieder in vier harmonischen Punkten begegnen müssen; von diesen sind die beiden ersten offenbar $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, der dritte $\mathfrak{h}$, weil die Ebene $[\mathfrak{gg}_1\mathfrak{h}_1] = [gh]$ durch den Punkt $\mathfrak{D}$ geht, in welchem sich g h

begegnen, und die Gerade $|\mathfrak{h}_1\mathfrak{O}| = h$ der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ im Punkte $\mathfrak{h}$ begegnet; der vierte harmonische Punkt zu $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{h}$ ist aber der Punkt $\mathfrak{h}'$, folglich geht die Ebene $[\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}']$ durch den Punkt $\mathfrak{h}'$, oder, was dasselbe ist:

$$\mathfrak{g}_1 \quad \mathfrak{h}_1 \quad \mathfrak{g}' \quad \mathfrak{h}'$$

liegen in einer Ebene.

In gleicher Weise zeigen wir, dass auch die vier Punkte:

$$\mathfrak{g} \quad \mathfrak{h} \quad \mathfrak{g}_1' \quad \mathfrak{h}_1'$$

in einer Ebene liegen; ferner liegen

$$\mathfrak{g} \quad \mathfrak{h}_1 \quad \mathfrak{g}_1' \quad \mathfrak{h}'$$

in einer Ebene und endlich

$$\mathfrak{g}_1 \quad \mathfrak{h} \quad \mathfrak{g}' \quad \mathfrak{h}_1'$$

in einer Ebene.

Da die vier Punkte $\mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{h}_1$ $\mathfrak{g}'$ $\mathfrak{h}'$ in einer Ebene liegen, so müssen die beiden Geraden:

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|$$

sich treffen in einem Punkte, durch welchen nothwendig die vier Ebenen:

$$[\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'], \quad [\mathfrak{g}_1'\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'], \quad [\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'], \quad [\mathfrak{h}_1'\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}']$$

hindurchgehen müssen; in diesem Punkte treffen sich daher die sechs Schnittlinien von je zwei dieser vier Ebenen; diese sechs Schnittlinien sind aber:

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, \quad |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{O}|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{O}_1|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{O}_2|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{O}_3|$$

und treffen sich in dem Punkte

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}', \ \mathfrak{h}_1\mathfrak{h}').$$

In gleicher Weise sehen wir, weil die vier Punkte $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{g}_1'$ $\mathfrak{h}_1'$ in einer Ebene liegen, dass die beiden Geraden:

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'|$$

sich im Raume treffen müssen, also durch ihren Treffpunkt die vier Ebenen gehen:

$$[\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'], \quad [\mathfrak{g}'\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'], \quad [\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'], \quad [\mathfrak{h}'\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'],$$

und deren sechs Schnittlinien zu je zweien, nämlich:

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'|, \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{O}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{O}_1|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{O}_2|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{O}_3|,$$

welche sechs Geraden durch den Punkt

$$\mathfrak{P}_3 = (\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1', \ \mathfrak{h}\mathfrak{h}_1')$$

gehen.

Ferner haben wir die vier Punkte $\mathfrak{g}\ \mathfrak{h}_1\ \mathfrak{g}_1'\ \mathfrak{h}'$ in einer Ebene, also treffen sich

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|$$

in einem Punkte, durch welchen die vier Ebenen gehen müssen:

$$[\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'], \quad [\mathfrak{g}'\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'], \quad [\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'], \quad [\mathfrak{h}_1'\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}']$$

und deren sechs Schnittlinien zu je zweien, nämlich

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'|, \quad |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{O}|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{O}_1|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{O}_2|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{O}_3|,$$

welche sechs Geraden durch den Punkt:

$$\mathfrak{P}_2 = (\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1', \ \mathfrak{h}_1\mathfrak{h}')$$

gehen.

Endlich haben wir die vier Punkte $\mathfrak{g}_1\ \mathfrak{h}\ \mathfrak{g}'\ \mathfrak{h}_1'$ in einer Ebene, also treffen sich

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'|$$

in einem Punkte, durch welchen die vier Ebenen gehen müssen:

$$[\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'], \quad [\mathfrak{g}_1'\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'], \quad [\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'], \quad [\mathfrak{h}'\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'],$$

und deren sechs Schnittlinien zu je zweien, nämlich:

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'|, \quad |\mathfrak{B}\mathfrak{O}|, \quad |\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1|, \quad |\mathfrak{D}\mathfrak{O}_2|, \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{O}_3|,$$

welche sechs Geraden durch den Punkt

$$\mathfrak{P}_1 = (\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}', \ \mathfrak{h}\mathfrak{h}_1')$$

gehen.

Wir erkennen hieraus zunächst die eigenthümliche Lage des Polartetraëders zum ursprünglichen Tetraëder:

Das Polartetraëder $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ *und das ursprüngliche Tetraëder* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ *liegen auf vierfache Art perspectiv, so dass sich die je vier Verbindungslinien:*

$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}\rvert$	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}_1\rvert$	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}_3\rvert$	*in einem Punkte*	$\mathfrak{P}$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1\rvert$	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}\rvert$	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}_3\rvert$	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}_2\rvert$	- - -	$\mathfrak{P}_1$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}_3\rvert$	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}\rvert$	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}_1\rvert$	- - -	$\mathfrak{P}_2$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}_3\rvert$	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}_1\rvert$	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}\rvert$	- - -	$\mathfrak{P}_3$

schneiden. Diese vier Punkte $\mathfrak{P}\ \mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3$ bilden selbst die Ecken eines windschiefen Vierseits, dessen Seiten die Geradenpaare sind:

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'| \quad |\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'| \quad |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|,$$

von denen das erste das von gg' verschiedene Paar Verbindungslinien der Doppelpunkte der Involutionen auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ ist, das andere das von

hh' verschiedene Paar Verbindungslinien der Doppelpunkte der Involutionen auf $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ ist.

Wenn wir nun dieselbe Betrachtung wiederholen, indem wir nur statt von dem windschiefen Viereck:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}$$

von dem windschiefen Viereck:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

ausgehen, so erhalten wir ein analoges Resultat, welches wir aus dem vorigen ablesen können, indem wir nur $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ mit einander vertauschen, folglich an Stelle der vier Punkte:

$$\mathfrak{h} \quad \mathfrak{h}_1 \quad \mathfrak{h}' \quad \mathfrak{h}'_1$$

die vier Punkte:

$$\mathfrak{i} \quad \mathfrak{i}_1 \quad \mathfrak{i}' \quad \mathfrak{i}'_1$$

setzen; dadurch werden die Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ nicht alterirt, dagegen geht $\mathfrak{O}_2$ in $\mathfrak{O}_3$ und $\mathfrak{O}_3$ in $\mathfrak{O}_2$ über, folglich geht, wie wir sehen, $\mathfrak{P}_2$ in $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_3$ in $\mathfrak{P}_2$ über, während $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ nicht alterirt werden. Wir erhalten also wie vorhin

$$(|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|) = \mathfrak{P}; \quad (|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, |\mathfrak{h}\mathfrak{h}'_1|) = \mathfrak{P}_1; \quad (|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1|, |\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|) = \mathfrak{P}_2; \quad (|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1|, |\mathfrak{h}\mathfrak{h}'_1|) = \mathfrak{P}_3$$

nunmehr:

$$(|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, |\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}'|) = \mathfrak{P}; \quad (|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, |\mathfrak{i}\mathfrak{i}'_1|) = \mathfrak{P}_1; \quad (|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1|, |\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}'|) = \mathfrak{P}_3; \quad (|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1|, |\mathfrak{i}\mathfrak{i}'_1|) = \mathfrak{P}_2.$$

Gehen wir drittens von dem windschiefen Viereck:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathfrak{D}$$

aus, so haben wir in den ersten Ausdrücken $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ mit einander zu vertauschen; dadurch treten nur an Stelle der Punkte $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{g}_1$ $\mathfrak{g}'$ $\mathfrak{g}'_1$ die vier Punkte $\mathfrak{i}$ $\mathfrak{i}_1$ $\mathfrak{i}'$ $\mathfrak{i}'_1$; die Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_2$ werden nicht alterirt, dagegen geht $\mathfrak{O}_1$ in $\mathfrak{O}_3$ und $\mathfrak{O}_3$ in $\mathfrak{O}_1$ über, folglich bleiben $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_2$ ungeändert, während $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ in einander übergehen; wir erhalten also:

$$(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}', \mathfrak{h}_1\mathfrak{h}') = \mathfrak{P}; \quad (\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}', \mathfrak{h}\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{P}_3; \quad (\mathfrak{i}\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{h}_1\mathfrak{h}') = \mathfrak{P}_2; \quad (\mathfrak{i}\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{h}\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{P}_1$$

oder, wenn wir alle drei Ergebnisse zusammennehmen:

$$(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}', \mathfrak{h}_1\mathfrak{h}', \mathfrak{i}_1\mathfrak{i}') = \mathfrak{P},$$
$$(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}', \mathfrak{h}\mathfrak{h}'_1, \mathfrak{i}\mathfrak{i}'_1) = \mathfrak{P}_1,$$
$$(\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}', \mathfrak{i}\mathfrak{i}'_1, \mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1) = \mathfrak{P}_2,$$
$$(\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}', \mathfrak{g}\mathfrak{g}'_1, \mathfrak{h}\mathfrak{h}'_1) = \mathfrak{P}_3;$$

es sind also:

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'| = |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|, \quad |\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'| = |\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|,$$
$$|\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'| = |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2|, \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'| = |\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1|,$$
$$|\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}'| = |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_3|, \quad |\mathfrak{i}\mathfrak{i}_1'| = |\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2|$$

die drei Paare von Gegenkanten des Tetraëders $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$. Da wir nun wissen (S. 153), dass das Geradenpaar $|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|$ und $|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'|$ ein Paar Erzeugender des orthogonalen Hyperboloids $H_1^{(2)}$ und das Geradenpaar $|\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'|$ und $|\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'|$ ein Paar Erzeugender des orthogonalen Hyperboloids $H_2^{(2)}$ ist, so liegen die Schnittpunkte $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ auf der Schnittcurve $C^{(4)}$ der beiden Hyperboloide $H_1^{(2)}$ und $H_2^{(2)}$. Wir können mithin folgendes Resultat aussprechen:

Verbindet man die Doppelpunkte der oben ermittelten Punktinvolutionen auf den drei Paar Gegenkanten des Tetraëders $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ in anderer Weise als durch die drei Linienpaare gg', hh', ii', welche sich zu den Gegenkanten des Polartetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ zusammenfügen, so erhält man drei neue Linienpaare, welche sich ebenfalls zu den drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ zusammenfügen. Die Ecken dieses Tetraëders liegen auf der Raumcurve $C^{(4)}$. Diese drei Tetraëder:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3, \quad \mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$$

stehen in dem eigenthümlichen Zusammenhange mit einander, dass je zwei von ihnen auf vierfache Weise in perspectiver Lage sich befinden und die vier Perspectivitätscentra allemal die Ecken des dritten Tetraëders sind.

Das Letztere erkennen wir unmittelbar aus dem obigen Ergebniss, dass nämlich:

$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}_1\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}_2\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}_3\rvert$	in dem Punkte	$\mathfrak{P}$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}_3\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}_2\rvert$	- - -	$\mathfrak{P}_1$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}_2\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}_3\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}_1\rvert$	- - -	$\mathfrak{P}_2$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{O}_3\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{O}_2\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{O}_1\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{O}\rvert$	- - -	$\mathfrak{P}_3$,

sich treffen, woraus unmittelbar folgt, dass

$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{P}\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{P}_1\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{P}_2\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{P}_3\rvert$	in dem Punkte	$\mathfrak{O}$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{P}_1\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{P}\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{P}_3\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{P}_2\rvert$	- - -	$\mathfrak{O}_1$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{P}_2\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{P}_3\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{P}\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{P}_1\rvert$	- - -	$\mathfrak{O}_2$,
$\lvert\mathfrak{A}\mathfrak{P}_3\rvert$,	$\lvert\mathfrak{B}\mathfrak{P}_2\rvert$,	$\lvert\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1\rvert$,	$\lvert\mathfrak{D}\mathfrak{P}\rvert$	- - -	$\mathfrak{O}_3$,

sich treffen und endlich auch

$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{P}\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_1\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_2\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_3\vert$	in dem Punkte	$\mathfrak{A}$,
$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{P}_1\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_3\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_2\vert$	- - -	$\mathfrak{B}$,
$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{P}_2\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_3\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_1\vert$	- - -	$\mathfrak{C}$,
$\vert\mathfrak{O}\mathfrak{P}_3\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_2\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_1\vert$,	$\vert\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}\vert$	- - -	$\mathfrak{D}$

sich treffen, wodurch die vorige Behauptung gerechtfertigt ist. Auf diese eigenthümliche Lage von drei Tetraëdern hat Herr *Cyparissos Stephanos**) aufmerksam gemacht und nennt dieselben ein *„desmisches System von drei Tetraëdern"*. Sobald ein Tetraëder $\mathfrak{ABCD}$ und ein beliebiger Punkt $\mathfrak{O}$ gegeben ist, kann man nach dem Obigen ein solches desmisches System auf folgende Weise construiren:

Man lege durch $\mathfrak{O}$ die einzige Gerade g, welche dem Paar von Gegenkanten $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ begegnet, die einzige Gerade h, welche dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{AC}|$ und $|\mathfrak{BD}|$ begegnet, endlich die einzige Gerade i, welche den Gegenkanten $|\mathfrak{AD}|$ und $|\mathfrak{BC}|$ begegnet; dadurch erhält man auf jeder der sechs Kanten einen Treffpunkt; construirt man zu diesem den zugeordneten vierten harmonischen Punkt rücksichtlich der beiden Tetraëderecken auf der Kante, so erhält man sechs neue Punkte auf den Kanten; verbindet man von denselben je zwei auf einem Paar Gegenkanten liegende Punkte durch drei neue Gerade g', h', i', so sind gg', hh', ii' die drei Paar Gegenkanten eines zweiten Tetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$, welches mit dem Tetraëder $\mathfrak{ABCD}$ in vierfacher Weise perspectiv liegt. Die auf jedem Paar Gegenkanten des Tetraëders $\mathfrak{ABCD}$ construirten Punkte lassen sich aber noch auf eine zweite Art durch Linienpaare verbinden, und diese drei neuen Linienpaare setzen sich ebenfalls zu den drei Paar Gegenkanten eines dritten Tetraëders $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ zusammen, welches mit jedem der beiden vorigen in vierfacher Weise perspectiv liegt. Die Perspectivitätscentra für je zwei dieser drei Tetraëder sind allemal die Ecken des dritten Tetraëders. In dieser Weise kann man von jedem der drei Tetraëder des desmischen Systems ausgehen und braucht nur noch eine Ecke eines der beiden übrigen, um diese selbst vollständig herzustellen.

---

*) „Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres" par M. *Cyparissos Stephanos* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2ᵉ série, t. III; 1879). Bei Gelegenheit der Naturforscher-Versammlung in Baden-Baden (September 1879) habe ich eine Construction zweier in vierfacher Weise perspectiv liegenden Tetraëder angegeben (Tageblatt der 52. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Baden-Baden 1879: „Einige Sätze über das Tetraëder," Seite 177), die mit der von Herrn *Stephanos* übereinkommt.

Wir übersehen auch leicht den Zusammenhang zwischen den Kanten der drei Tetraëder eines desmischen Systems; da nämlich $|\mathfrak{A}\mathfrak{O}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{O}_1|$ sich in dem Punkte $\mathfrak{P}$ treffen, so liegen die vier Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ in einer Ebene, in welcher nicht allein der Punkt $\mathfrak{P}$, sondern auch der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1$ der beiden Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{O}_1|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{O}|$ liegen muss. Es trifft daher die Kante $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ sowohl $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, als auch $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ und in gleicher Weise auch $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$; dasselbe gilt von der Kante $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$. Das Gegenkantenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ und $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$ des einen Tetraëders eines desmischen Systems begegnet also sowohl dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ des andern, als auch dem Gegenkantenpaar $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$ des dritten Tetraëders. Dagegen erkennen wir, dass das Kantenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ und $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$ mit dem Kantenpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{C}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ hyperboloidisch-harmonisch liegt, weil diese vier Geraden im Raume sowohl von der Geraden $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$, als auch von der Geraden $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ in je vier harmonischen Punkten getroffen werden. Ebenso liegt auch das Kantenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ und $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$ mit dem Kantenpaar $|\mathfrak{A}\mathfrak{D}|$ und $|\mathfrak{B}\mathfrak{C}|$ hyperboloidisch-harmonisch. In gleicher Weise sehen wir, dass das Kantenpaar $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ und $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$ mit dem Kantenpaar $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$ hyperboloidisch-harmonisch liegt; denn diese vier Geraden im Raume werden sowohl von der Geraden $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = g$, als auch von der Geraden $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3| = g'$ in je vier harmonischen Punkten getroffen. (Dass die vier Punkte $\mathfrak{g}\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{O}\ \mathfrak{O}_1$ harmonisch liegen, geht daraus hervor, dass die vier Ebenen, welche durch $|\mathfrak{B}\mathfrak{D}|$ nach den vier harmonischen Punkten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{h}\ \mathfrak{h}'$ hingehen, die Gerade g in den vier harmonischen Punkten $\mathfrak{g}\ \mathfrak{g}_1\ \mathfrak{O}\ \mathfrak{O}_1$ treffen müssen.) Es stellt sich also das Ergebniss folgendermassen heraus:

Nimmt man von den drei Tetraëdern eines desmischen Systems ein beliebiges heraus und von einem zweiten irgend ein Paar Gegenkanten, so begegnet dasselbe allemal nur einem Paar Gegenkanten des ersten Tetraëders, liegt dagegen mit jedem der beiden andern Paare Gegenkanten hyperboloidisch-harmonisch. Von solchen drei Kanten der drei verschiedenen Tetraëder, welche sich begegnen, liegen allemal drei in einer Ebene und drei treffen sich in einem Punkte, welcher in der Ebene selbst liegt, z. B. liegen $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|\ |\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|\ |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ in einer Ebene, dagegen treffen sich $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|\ |\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|\ |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ in einem Punkte u. s. w.

Auch ergiebt sich der Zusammenhang zwischen den Seitenflächen der drei Tetraëder eines desmischen Systems. Bekanntlich müssen, wenn zwei Tetraëder perspective Lage haben, die vier Schnittlinien ihrer entsprechenden Seitenflächen in einer Ebene liegen (specieller Fall des oben

S. 151, Anmerkung, bewiesenen Satzes). Betrachten wir z. B. die beiden Tetraëder:

$$\begin{array}{cccc}\mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{O} & \mathfrak{O}_1 & \mathfrak{O}_2 & \mathfrak{O}_3,\end{array}$$

welche perspective Lage und den Punkt $\mathfrak{P}$ zum Perspectivitätscentrum haben, und suchen die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen auf, so wird die Schnittlinie $|[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}], [\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2]|$, weil in ihr der Schnittpunkt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{O}\mathfrak{O}_1) = \mathfrak{g}$$

und

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{C}, \mathfrak{O}\mathfrak{O}_2) = \mathfrak{h}$$

und

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{C}, \mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2) = \mathfrak{i}_1'$$

liegt, identisch sein mit der Geraden, in welcher die drei Punkte:

$$\mathfrak{g}\ \mathfrak{h}\ \mathfrak{i}_1'$$

liegen; ebenso ist die Schnittlinie der Seitenflächen:

$$\begin{aligned}|[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}], [\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3]| &= |\mathfrak{g}\ \ \mathfrak{i}\ \ \mathfrak{h}_1'|, \\ |[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}], [\mathfrak{O}\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]| &= |\mathfrak{h}\ \ \mathfrak{i}\ \ \mathfrak{g}_1'|, \\ |[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}], [\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]| &= |\mathfrak{i}_1'\ \mathfrak{h}_1'\ \mathfrak{g}_1'|.\end{aligned}$$

Die sechs Punkte $\mathfrak{g}\ \mathfrak{h}\ \mathfrak{i}\ \mathfrak{g}_1'\ \mathfrak{h}_1'\ \mathfrak{i}_1'$ liegen aber offenbar in einer Ebene, weil

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'| = |\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|, \quad |\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1'| = |\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1|, \quad |\mathfrak{i}\mathfrak{i}_1'| = |\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2|$$

ist, also in der Ebene:

$$[\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3]$$

und bilden die drei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits; also:

Wenn die beiden Tetraëder** $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ **und** $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ **rücksichtlich des Perspectivitätscentrums** $\mathfrak{P}$ **in perspectiver Lage sich befinden, so liegen die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen in der Ebene $[\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3]$. Oder allgemein:

Nimmt man von den drei Tetraëdern eines desmischen Systems irgend zwei heraus, so liegen sie auf vierfache Art gleichzeitig so im Raume, dass die vier Schnittlinien ihrer Seitenflächen sich in je einer Ebene befinden; diese vier Ebenen sind die vier Seitenflächen des dritten Tetraëders.

Wir sehen zugleich, wie sich die 12 Treffpunkte, in welchen sich die Kanten der drei Tetraëder eines desmischen Systems begegnen, zu je dreien auf geraden Linien und zu sechsen als die drei Paar Gegenecken vollständiger Vierseite in Ebenen gruppiren:

$[\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3]$:	$[\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3]$:	$[\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3]$:	$[\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2]$:
$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}'_1$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}'\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{i}'_1$
$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}$
$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}'\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}'\mathfrak{i}$
$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}'_1$	$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}'_1$.

Andererseits gruppiren sich dieselben 16 Geraden, in welchen je drei dieser Punkte liegen, zu folgenden vollständigen Vierseiten in den Ebenen:

$[\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]$:	$[\mathfrak{O}\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]$:	$[\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3]$:	$[\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2]$:
$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{i}'_1$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}'\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}'_1$
$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}'$
$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}'\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}'\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}'$
$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}'_1$	$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}'_1$,

und endlich gruppiren sich dieselben 16 Geraden, in welchen je drei dieser Punkte liegen, zu folgenden vollständigen Vierseiten in den Ebenen:

$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$:	$[\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}]$:	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{D}]$:	$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$:
$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}'_1$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}'\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{i}'_1$
$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}_1\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}'\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}_1$
$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}_1$	$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}'\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}_1\mathfrak{i}'$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}'\mathfrak{i}_1$
$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}'_1$	$\mathfrak{g}'_1\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}'_1\mathfrak{i}$	$\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{i}'_1$,

d. h. ***die zwölf Punkte, in welchen sich die Kanten der drei Tetraëder eines desmischen Systems zu je dreien begegnen, liegen auch zu je dreien auf sechszehn Geraden, in welchen sich gleichzeitig je drei Seitenflächen der drei verschiedenen Tetraëder des desmischen Systems durchschneiden, und bilden in diesen Seitenflächen zu je vieren zwölf vollständige Vierseite, deren Diagonalen die achtzehn Kanten der drei Tetraëder des desmischen Systems sind, indem jede Diagonale doppelt auftritt.*** Diese sechszehn Geraden stehen dual gegenüber denjenigen sechszehn Geraden, auf welchen zu je dreien immer drei Ecken verschiedener Tetraëder des desmischen Systems sich befinden:

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{A}\mathfrak{O}\,\mathfrak{P} & \mathfrak{B}\mathfrak{O}_1\mathfrak{P} & \mathfrak{C}\mathfrak{O}_2\mathfrak{P} & \mathfrak{D}\mathfrak{O}_3\mathfrak{P} \\ \mathfrak{A}\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{B}\mathfrak{O}\,\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{C}\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_1 & \mathfrak{D}\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_1 \\ \mathfrak{A}\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_2 & \mathfrak{B}\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_2 & \mathfrak{C}\mathfrak{O}\,\mathfrak{P}_2 & \mathfrak{D}\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_2 \\ \mathfrak{A}\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_3 & \mathfrak{B}\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_3 & \mathfrak{C}\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_3 & \mathfrak{D}\mathfrak{O}\,\mathfrak{P}_3, \end{array}$$

und diese bilden zwölf Vierkante, deren (räumliche) Diagonalen die achtzehn Kanten der drei Tetraëder des desmischen Systems sind, indem jede

Diagonale doppelt auftritt. So wie die vorigen sechszehn Geraden sich zu vieren in zwölf Punkten ($\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{i}$ etc.) trafen, in welchen sich immer je drei Kanten von verschiedenen Tetraëdern des desmischen Systems begegnen, liegen die letzteren sechszehn Geraden zu je dreien in zwölf Ebenen, in welchen immer je drei Kanten verschiedener Tetraëder des desmischen Systems liegen. Es stellt sich hiernach in der Figur selbst eine Dualität heraus, vermöge deren sie mit ihrer Polarfigur zusammenfällt.

7. Kehren wir nach dieser Abschweifung zu der Betrachtung unserer Raumcurve $C^{(4)}$ zurück. Es bedarf keines weiteren Nachweises, dass eine analoge Untersuchung, wie in No. 6, welche, anstatt von dem Tetraëder $\mathfrak{ABCD}$ auszugehen, von dem Tetraëder $\mathfrak{abcd}$ ausgeht, zu ähnlichen Resultaten führt. Auch die beiden Tetraëder $\mathfrak{abcd}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ constituiren ein desmisches System, für welches das dritte zugehörige Tetraëder $\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ auf der Raumcurve $C^{(4)}$ liegt. Da hiernach die Geradenpaare:

$$|\mathfrak{AB}| \text{ und } |\mathfrak{CD}|,$$
$$|\mathfrak{ab}| \text{ und } |\mathfrak{cd}|$$

die Gerade g (und ebenso g') in Punktepaaren treffen, welche wegen der Natur des desmischen Systems harmonisch getrennt werden durch die Punkte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ (ebenso auf g' durch $\mathfrak{O}_2$ und $\mathfrak{O}_3$), so sind uns auf dem Geradenpaar gg' die Punktinvolutionen unmittelbar gegeben, deren Doppelpunkte die Ecken des Polartetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ sind. Wir können also dem Endresultate von No. 3 (S. 149) folgende Ergänzung hinzufügen:

Wenn man das einzige Geradenpaar gg' construirt, welches gleichzeitig den vier Geraden:

$$|\mathfrak{AB}| \quad |\mathfrak{CD}| \quad |\mathfrak{ab}| \quad |\mathfrak{cd}|$$

begegnet, so wird dasselbe von diesen beiden Paaren $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$, $|\mathfrak{ab}|$ und $|\mathfrak{cd}|$ in Punktepaaren getroffen, die auf g und g' zwei Punktinvolutionen bestimmen, deren Doppelpunkte die Ecken des Polartetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$, d. h. die Mittelpunkte der vier Kegel zweiter Ordnung sind, welche durch die Raumcurve $C^{(4)}$ gelegt werden können.

Aus den Eigenschaften der Tetraëder eines desmischen Systems ergiebt sich noch ein neuer Zusammenhang zwischen den beiden Tetraëdern:

$$\mathfrak{ABCD} \text{ und } \mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$$

in folgender Weise:

Da auf dem Kantenpaar $|\mathfrak{AB}|$ und $|\mathfrak{CD}|$ die beiden Punktinvolutionen bekannt sind, deren Doppelpunkte:

$$\mathfrak{g}\mathfrak{g}' \text{ und } \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_1'$$

in der einen Weise verbunden die Geraden:

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1| = g = |\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{g}'\mathfrak{g}_1'| = g' = |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$$

liefern, in der andern Weise verbunden die Geraden:

$$|\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'| = |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1'| = |\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$$

liefern, und da wir wissen, dass das letztere Geradenpaar (S. 154) ein Paar Erzeugender des orthogonalen Hyperboloids $H_1^{(2)}$ ist, dem die Erzeugenden der Regelschaar:

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'| = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_1'| = |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$$

angehören, so folgt, dass die beiden Ebenen:

$$[\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'] \text{ und } [\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'\mathfrak{g}_1']$$

normal auf einander stehen müssen, sowie auch die beiden Ebenen:

$$[\mathfrak{g}\mathfrak{g}'\mathfrak{g}_1'] \text{ und } [\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_1']$$

normal auf einander stehen.

Diese Ebenen lassen sich aber so ausdrücken:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1] \perp [\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]; \quad [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3] \perp [\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1].$$

Die Schnittlinien dieser normalen Ebenenpaare, d. h. die Geraden $|\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1|$ und $|\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$ gehören hiernach nicht allein dem orthogonalen Hyperboloid $H_1^{(2)}$ an, welches durch zwei Ebenenbüschel erzeugt wird, deren Axen $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ und $|\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$ sind und deren entsprechende Ebenen normal auf einander stehen, sondern auch einem anderen orthogonalen Hyperboloid, welches durch zwei Ebenenbüschel erzeugt wird, deren Axen $[\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1]$ und $[\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3]$ sind und deren entsprechende Ebenen normal auf einander stehen.

Wenn man aber auf einem Hyperboloid ein windschiefes Vierseit hat, so sind die beiden Diagonalen desselben bekanntlich conjugirte Strahlen in Bezug auf das Hyperboloid, folglich sind die beiden Diagonalen des von den vier Geraden:

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| \quad |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1| \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3| \quad |\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3|$$

gebildeten windschiefen Vierseits, d. h. die Geraden:

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$$

ein Paar conjugirte Strahlen in Bezug auf dasjenige orthogonale Hyperboloid, welches von zwei Ebenenbüscheln erzeugt wird, deren Axen $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$ sind und deren je zwei entsprechende Ebenen normal zu einander sind.

Für ein windschiefes Vierseit auf einem Hyperboloid gilt aber noch die weitergehende Eigenschaft, dass seine Diagonalen nicht allein conjugirte Strahlen für das Hyperboloid sind, sondern auch irgend zwei Punkte auf der einen Diagonale, welche die Gegenkanten des Vierseits harmonisch trennen, und irgend zwei Punkte auf der andern Diagonale, welche die beiden übrigen Gegenecken des Vierseits harmonisch trennen, immer die vier Ecken eines Polartetraëders für das Hyperboloid bilden; da nun

$$|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1| = |\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1|, \quad |\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1| = |\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'|, \quad |\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3| = |\mathfrak{g}'\mathfrak{g}_1'|, \quad |\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3| = |\mathfrak{g}_1'\mathfrak{g}|$$

ist, also das von diesen vier Geraden gebildete Vierseit

$$\mathfrak{g}\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}'\mathfrak{g}_1'$$

zu seinen Diagonalen

$$|\mathfrak{g}\mathfrak{g}'| = |\mathfrak{A}\mathfrak{B}|, \quad |\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_1'| = |\mathfrak{C}\mathfrak{D}|$$

hat, und die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Punkte $\mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ harmonisch trennen, ebensowie $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die Punkte $\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_1'$ harmonisch trennen, so folgt, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Ecken eines Polartetraëders sind für dasjenige orthogonale Hyperboloid, welches von zwei projectiven Ebenenbüscheln erzeugt wird, deren Axen $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1|$ und $|\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3|$ sind, und deren entsprechende Ebenen normal auf einander stehen. In gleicher Weise sehen wir ein, dass $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ auch ein Polartetraëder ist für dasjenige orthogonale Hyperboloid, welches durch die Tetraëderkanten $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_2|$ und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_3|$, sowie auch für dasjenige, welches durch $|\mathfrak{O}\mathfrak{O}_3|$ und $|\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2|$ gelegt werden kann; mithin ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ das gemeinschaftliche Polartetraëder für sämmtliche Oberflächen zweiter Ordnung, die dem Büschel angehören, welches durch die Schnittcurve der letzten drei orthogonalen Hyperboloide geht. Es ergiebt sich hieraus das folgende reciproke Verhalten:

Wenn man durch die drei Paar Gegenkanten eines Tetraëders $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die drei orthogonalen Hyperboloide legt, die sich in einer Raumcurve $C^{(4)}$ schneiden (No. 1), und man ermittelt das Polartetraëder $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$, welches sämmtlichen durch $C^{(4)}$ gehenden Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlich ist, so ist auch umgekehrt für das Flächenbüschel durch eine Raumcurve $C_1^{(4)}$, die als der Durchschnitt dreier orthogonalen Hyperboloide, welche durch je ein Paar Gegenkanten des Tetraëders $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ gelegt werden können, auftritt, das gemeinschaftliche Polartetraëder das ursprüngliche $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$.

Da wir oben (S. 166) gesehen haben, dass aus den beiden Tetraëdern $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3$ eines desmischen Systems ein drittes Tetraëder $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$

hervorgeht, welches auf der Raumcurve $C^{(4)}$ liegt, so folgt nunmehr, dass dasselbe aus gleichen Gründen auch auf der Raumcurve $C_1^{(4)}$ liegen muss, also:

Die beiden Raumcurven $C^{(4)}$ und $C_1^{(4)}$ begegnen sich in den vier Punkten $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$.

Da wir ferner wissen, dass die sechs Punkte:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$$

in einer Ebene liegen und ebenso

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$$

in einer Ebene liegen, so folgt, dass die auf der Raumcurve $C^{(4)}$ liegenden acht Punkte:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3,$$

welche sich zu je vieren in zwei Ebenen vertheilen, eine *Gruppe von acht associirten Punkten* bilden.

Da auch die sechs Punkte:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$$

in einer Ebene liegen, so ergiebt sich gleichzeitig, dass die auf der Raumcurve $C_1^{(4)}$ liegenden acht Punkte:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_3\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3,$$

welche sich zu je vieren in zwei Ebenen vertheilen, eine *Gruppe von acht associirten Punkten* bilden.

Indem ich hiermit die Untersuchung unserer Raumcurve $C^{(4)}$ vorläufig abschliesse, möchte ich nur noch auf die Ermittelung des particulären Charakters unserer $C^{(4)}$, gegenüber der allgemeinen Raumcurve vierter Ordnung und erster Species, die Aufmerksamkeit der Geometer lenken.

Breslau, am 30. December 1881.

Ueber die Aufhängpunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers.

(Von Herrn *Böklen* in Reutlingen.)

Wenn ein Körper um eine feste Axe pendelartig schwingt, so ist die Länge l des isochronen einfachen Pendels gleich dem Trägheitsmoment des Körpers dividirt durch das statische Moment, beide in Beziehung auf die Schwingungsaxe genommen, oder

$$(1.)\qquad l = \frac{v^2+d^2}{d};$$

v ist der Trägheitsradius, welcher einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden parallel mit der Schwingungsaxe entspricht, und d der Abstand derselben von O. OJ ist das von O auf die Schwingungsaxe gefällte Perpendikel, also J der Aufhängpunkt, durch den unter Umständen mehrere Schwingungsaxen senkrecht zu OJ gehen, und es soll die Frage untersucht werden: Welches ist der Ort der Punkte J, sowie auch die Richtung der zugehörigen Schwingungsaxen, wenn $l = \text{const.}$? In diesem Falle werden also die Schwingungen des Körpers isochron sein.

Sind $a > b > c$ die Quadrate der drei durch O gehenden Hauptträgheitsradien, so ist

$$(2.)\qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c} = 1$$

das Grundellipsoid. Bezeichnet man das von O auf eine Tangential-Ebene von (2.) gefällte Perpendikel mit v, so ist v ein Radius der Fusspunktfläche von (2.) oder der inversen Fläche des *Cauchy-Poinsot*schen Centralellipsoids

$$(3.)\qquad ax^2+by^2+cz^2 = 1.$$

Errichtet man auf einem Centralschnitte der Fusspunktfläche eine Senkrechte in O, und trägt darauf zwei Strecken ON und On ab gleich den Halbaxen des Centralschnitts, so liegen die Punkte N und n auf der Wellengeschwindig-

kegelfläche

$$(4.)\qquad \frac{x^2}{a-v^2}+\frac{y^2}{b-v^2}+\frac{z^2}{c-v^2} = 0.$$

Aus (1.) erhält man $v^2 = ld-d^2$ und durch Substitution in (4.)

$$(5.)\qquad \frac{x^2}{a-ld+d^2}+\frac{y^2}{b-ld+d^2}+\frac{z^2}{c-ld+d^2} = 0.$$

Betrachtet man hier d als veränderlich und setzt $d^2 = x^2+y^2+z^2$, so repräsentirt diese Gleichung die Grenzfläche für den Ort der Punkte J, welche mit (J) bezeichnet werden soll.

Ist in (5.) d constant, so stellt diese Gleichung einen Kegel vom zweiten Grade vor; durch Veränderung des Werthes von d erhält man eine Reihe von Kegeln, die confocal sind; ihre Focallinien entsprechen den Gleichungen:

$$(6.)\qquad y = 0,\quad \frac{z^2}{x^2}+\frac{c-b}{a-b} = 0.$$

Diese Linien sind also die Asymptoten der Focalhyperbel des Grundellipsoids.

Hieraus folgt, dass die Fläche (J) durch eine Reihe von sphärischen Kegelschnitten gebildet wird, die auf confocalen Kegeln liegen, deren Focallinien unabhängig sind von l und also auch von d. Jeder Halbmesser v der Fusspunktfläche des Grundellipsoids ist gleich dem seiner Richtung entsprechenden Trägheitsradius; ist v constant, so beschreiben diese Trägheitsradien einen Kegel vom zweiten Grade, der die Fusspunktfläche in einer sphärischen Curve schneidet und dessen Ergänzungskegel (4.) ist. Durch Veränderung des Werthes von v erhält man wieder die Kegel (5.), nur giebt die Gleichung (4.) auf den Mantellinien derselben die Punkte N und n der Wellengeschwindigkeitsfläche an, während (5.) auf denselben Mantellinien die Punkte J der Fläche (J) bestimmt. Führt man nun eine neue Variable $v_1 = d-\frac{l}{2}$ ein, so erhält (5.) die Form

$$(7.)\qquad \frac{x^2}{\left(\frac{l^2}{4}-a\right)-v_1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{l^2}{4}-b\right)-v_1^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{l^2}{4}-c\right)-v_1^2} = 0.$$

Dies ist eine zweite Wellengeschwindigkeitsfläche, die mit V_1 bezeichnet werden soll, und welche unter der Voraussetzung $\frac{l^2}{4} > a$ aus der Fusspunktfläche des Ellipsoids

$$(8.)\qquad \frac{x^2}{\frac{l^2}{4}-a}+\frac{y^2}{\frac{l^2}{4}-b}+\frac{z^2}{\frac{l^2}{4}-c} = 1$$

abgeleitet ist. Die Fläche (J) entsteht also aus V_1, indem man sämmtliche Radien der letzteren um eine constante Strecke $\frac{l}{2}$ verlängert. Hieraus folgt, dass sie aus zwei Mänteln besteht, wie jede Wellengeschwindigkeitsfläche, und dass sie vier singuläre Punkte hat, in welchen beide Mäntel zusammenstossen, und die auf den Focallinien (6.) liegen. Sie ist die eine Grenzfläche der Aufhängpunkte für isochrone Schwingungen: die Punkte des äusseren Mantels sollen mit J, diejenigen des inneren mit i und die Punkte zwischen beiden Mänteln, die gleichfalls Aufhängpunkte sind, mit J_0 bezeichnet werden.

Um eine Vorstellung zu bekommen über die Vertheilung der Punkte J und ihrer Axen für isochrone Schwingungen im Raum, denke man sich für einen bestimmten Werth von v, also auch von d, die Kugel, deren Halbmesser d ist, und welche die Fläche J in einem sphärischen Kegelschnitt trifft, oder vielmehr in zwei congruenten Kegelschnitten, welche eine Kugelzone begrenzen. Diejenigen Punkte J_0, welche nicht bloss einem bestimmten Werth, sondern auch einer bestimmten Richtung von v entsprechen, liegen auf einem Grosskreis der Kugel, welcher beide Kegelschnitte berührt; die Mantellinien des Cylinders, welcher die Kugel in diesem Grosskreis berührt, sind die zugehörigen Schwingungsaxen. Verändert v die Richtung, aber nicht den Werth, so erhält man andere Grosskreise, welche in der erwähnten Kugelzone liegen und beide Kegelschnitte berühren.

Aus (1.) folgt

$$(9.)\qquad d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - v^2}.$$

Also gehören zu einem bestimmten Werthe von l (wobei stets vorausgesetzt wird, dass $\frac{l^2}{4} > a$ ist) zwei Werthe von d oder zwei verschiedene Flächen (J), welche aus V_1 oder (7.) entstehen, indem man entweder, wie oben angegeben, $\frac{l}{2}$ auf der Verlängerung eines Radius von V_1 oder auf der entgegengesetzten Seite auf dem Radius selbst abträgt. Zunächst soll aber bloss der erste Fall ins Auge gefasst werden. Die Fläche V_1 schneidet jede Hauptebene in zwei Curven, wovon eine ein Kreis ist; die Halbmesser dieser drei Kreise sind

$$A = \sqrt{\frac{l^2}{4} - a}, \quad B = \sqrt{\frac{l^2}{4} - b}, \quad C = \sqrt{\frac{l^2}{4} - c}.$$

A ist in der yz-, B in der zx- und C in der xy-Ebene. Also schneidet auch die Fläche (J) die Hauptebene in drei Kreisen, deren Halbmesser $A+\frac{l}{2}$, $B+\frac{l}{2}$, $C+\frac{l}{2}$ sind; durch dieselben gehen drei Kugeln mit dem Mittelpunkt O, A', B', C', welche (J) in diesen Kreisen berühren, und zwar A' den inneren Mantel in der yz-Ebene, B' sowohl den inneren als auch den äusseren in der zx- und C' den äusseren in der xy-Ebene.

Bei A' und C' liegen die Aufhängpunkte auf den zwei Kreisen, in welchen diese Kugeln (J) berühren, die zugehörigen Schwingungsaxen sind die Mantellinien der Cylinder, welche die Kugeln in diesen Kreisen berühren. Dagegen ist auf B' jeder Punkt ein Aufhängpunkt; die vier Durchschnittspunkte von B' mit den Geraden (6.) (welche in der Theorie des Lichts den wahren optischen Axen entsprechen) seien $O_1 O_2 O_3 O_4$; durch jeden dieser Punkte gehen unendlich viele Schwingungsaxen, welche senkrecht sind entweder zu $O_1 O_3$ oder zu $O_2 O_4$. Wird also der Körper z. B. in O_1 aufgehängt, so macht er isochrone Schwingungen um jede Axe, welche durch O_1 geht und senkrecht zu OO_1 ist. Durch alle anderen Punkte J_0 auf B' als Aufhängpunkte gehen nur zwei Schwingungsaxen, welche man erhält, indem man durch J_0 und $O_1 O_3$ oder $O_2 O_4$ zwei Grosskreise legt und auf ihren Ebenen in J_0 Perpendikel errichtet.

Jede der concentrischen Kugeln zwischen A' und B' schneidet die Fläche (J) in zwei sphärischen Kegelschnitten; nimmt man auf einer solchen Kugel einen Punkt J_0 an und legt durch denselben zwei Grosskreise, welche die Kegelschnitte berühren, so sind die auf den Ebenen dieser Kreise in J_0 errichteten Perpendikel die beiden Schwingungsaxen von J_0, d. h. wenn der Körper in J_0 aufgehängt wird, und um eines dieser Perpendikel als Axe schwingt, so ist die Schwingungszeit gleich derjenigen des einfachen Pendels von der Länge l. Der Punkt J_0 muss im Innern von (J) und auf der von den beiden Kegelschnitten gebildeten Kugelzone liegen; diese Zonen werden um so breiter, je mehr sich die Kugel B' nähert, wo die Kegelschnitte in die Punkte $O_1 O_2 O_3 O_4$ sich verwandeln, so dass die Zone der Aufhängpunkte J_0 gleich der ganzen Oberfläche von B' ist. Für die Kugeln zwischen B' und C' werden die Zonen zwischen den sphärischen Kegelschnitten schmaler und reduciren sich endlich in C' auf den Berührungskreis mit (J).

Da die Grenzfläche der Aufhängpunkte (J) zwei Mäntel hat, so schneidet sie jede durch O gehende Gerade in vier Punkten, wovon zwei,

eine Schwingungsaxe geht; zwei dieser Axen durch J und i' sind parallel und stehen senkrecht auf den beiden anderen durch i und J', welche also ebenfalls parallel sind. Für die weiteren Punkte J_0 auf Ji und J_0' auf $J'i'$ (diese beiden Strecken schliessen einander stets aus) giebt es je zwei Schwingungsaxen, nämlich die Perpendikel, welche in J_0 oder J_0' auf den Tangentialebenen errichtet werden, die man durch die Gerade an die confocalen Kegel legen kann. Für alle übrigen Punkte auf der Geraden, entweder zwischen i und i' oder ausserhalb J und J' giebt es keine Axen, um welche der Körper Schwingungen machen kann, welche denjenigen des einfachen Pendels von der Länge l isochron sind. Hat die Gerade die Richtung einer Asymptote der Focalhyperbel des Grundellipsoids, so liegen auf ihr vier Punkte mit unendlich vielen Schwingungsaxen, also giebt es für jeden Körper im Ganzen acht solcher Punkte, welche einer bestimmten Länge l des isochronen einfachen Pendels entsprechen.

Diese acht Punkte haben von O die Entfernungen $d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - b}$.

Die Summe der beiden Werthe von d in (9.) ist gleich l und ihr Product gleich v^2, somit ist $Ji' = iJ' = l$ und $OJ.Oi' = Oi.OJ' = v^2$; legt man nun durch O eine Ebene senkrecht zu OJ, welche das *Cauchy-Poinsot*sche Ellipsoid in einer Ellipse und die Fusspunktfläche des Grundellipsoids in der inversen Curve (deren Radien v mit den gleichgerichteten der Ellipse ein constantes Product liefern) schneidet, und die mit (v) bezeichnet werden soll, so kann man sich über die den einzelnen Punkten der Geraden OJ entsprechenden Schwingungsaxen folgende Vorstellung machen: Man beschreibe über $Ji' = l$ als Durchmesser eine Kugel, so wird sie die Curve (v) in den Endpunkten ihrer kleinen Axe berühren; durch diese Endpunkte und Ji' lege man einen Grosskreis, so sind dessen Tangenten in J und i' die Schwingungsaxen dieser Punkte. Der Mittelpunkt der Kugel liegt auf V_1. Rückt derselbe gegen O hin, so wird die Kugel die Gerade OJ in den Punkten J_0 und J_0' ($J_0J_0' = l$) und die Curve v in zwei Punkten schneiden, welchen zwei gleiche Werthe von v entsprechen. Die Tangenten der durch diese Punkte und J_0J_0' bestimmten Grosskreise sind die beiden Schwingungsaxen von J_0 und von J_0'. Je mehr sich die Kugel, deren Durchmesser immer gleich l ist, O nähert, um so weiter gehen die Schwingungsaxen sowohl in J_0 als auch in J_0' aus einander. Im zweiten Grenzfall, wenn die Kugel durch i und J' geht, wird dieser Winkel gleich 180°, und sie berührt die Curve (v) in den Endpunkten ihrer grossen Axe.

Hat die Gerade OJ die Richtung OO_1, so wird (v) ein Kreis, dessen Halbmesser v unter einander gleich sind, und es giebt nur zwei Kugeln vom Durchmesser l, welche durch diesen Kreis gehen, aber unendlich viele Grosskreise, welche sich in den singulären Punkten O_1, O_3 auf (J) oder O_1', O_3' auf (J') schneiden.

Die beiden Flächen (J) und (J') können auch als Fusspunktflächen aufgefasst werden und zwar von den Parallelflächen der Wellenfläche

$$(10.)\quad \frac{\left(\frac{l^2}{4}-a\right)x^2}{\left(\frac{l^2}{4}-a\right)-r^2}+\frac{\left(\frac{l^2}{4}-b\right)y^2}{\left(\frac{l^2}{4}-b\right)-r^2}+\frac{\left(\frac{l^2}{4}-c\right)z^2}{\left(\frac{l^2}{4}-c\right)-r^2} = 0,$$

von welcher die Wellengeschwindigkeitsfläche V_1 die Fusspunktfläche ist. Diese Parallelflächen haben den Abstand $\frac{l}{2}$ beiderseits vom Fusspunkt der Normalen an gerechnet.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Tangenten der ellipsoidischen Curven der Wellenfläche (10.) die Richtung des constanten Hauptträgheitsradius gleich $\frac{l}{2}$ für ihre Berührungspunkte angeben, und dass sie den Schwingungsaxen der auf den Flächen (J) und (J') liegenden Aufhängpunkte parallel sind.

Wenn die Voraussetzung $\frac{l^2}{4} > a$ nicht zutrifft, so nimmt die Fläche V_1 einen anderen Charakter an und gehört zu den noch wenig untersuchten Flächen, welche aus dem einmantligen und zweimantligen Hyperboloid auf ähnliche Art abgeleitet werden, wie die Wellengeschwindigkeitsfläche aus dem Ellipsoid.

Schliesslich möge noch an einem speciellen Beispiel gezeigt werden, wie ein Theil der hier vorgetragenen Theorie praktisch nachgewiesen werden kann.

Wenn die Kantenlängen eines rechtwinkligen Parallelepipeds 2α, 2β, 2γ sind, so ist

$$a = \tfrac{1}{3}(\beta^2+\gamma^2),\quad b = \tfrac{1}{3}(\gamma^2+\alpha^2),\quad c = \tfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2),$$

also wird die Gleichung (6.)

$$y = 0,\quad \frac{z^2}{x^2}+\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2-\alpha^2} = 0.$$

Wird nun das Parallelepiped an einem Drath aufgehängt, welcher einer von den beiden Richtungen dieser Gleichung entspricht, so werden die Schwingungen für alle durch einen Punkt dieses Draths gehenden Axen isochron sein.

Reutlingen, Februar 1882.

Notiz über das *Pascal*sche resp. *Brianchon*sche Sechseck.

(Von Herrn *Fr. Gräfe* in Darmstadt.)

Es sei ein *Pascal*sches oder ein *Brianchon*sches Sechseck mit den Seiten resp. Ecken a, b, c, d, e, f gegeben, dann sind auch die Sechsecke mit den Seiten resp. Ecken:

$$a,\ e,\ c,\ d,\ b,\ f,$$
$$a,\ e,\ f,\ d,\ b,\ c,$$
$$a,\ b,\ f,\ d,\ e,\ c$$

*Pascal*sche Sechsecke mit derselben *Pascal*schen Geraden resp. *Brianchon*sche Sechsecke mit demselben *Brianchon*schen Punkte*).

Es sei ein *Pascal*sches Sechseck mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben; es haben dann die *Pascal*schen Sechsecke

$$\begin{cases} 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4 \\ 1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4 \\ 1\ 5\ 2\ 4\ 6\ 3 \end{cases}$$

denselben *Kirkman*schen Punkt, welcher der *Brianchon*sche Punkt des *Brianchon*schen Sechsecks

$$\underset{a}{(26,\ 13)}\underset{b}{(13,\ 24)}\underset{c}{(24,\ 35)}\underset{d}{(35,\ 46)}\underset{e}{(46,\ 51)}\underset{f}{(51,\ 62)}$$

ist, wenn (m, n) der Schnittpunkt der Geraden m und n ist.

Man betrachte das *Brianchon*sche Sechseck a, b, c, d, e, f als gegeben, so ist der zugehörige *Brianchon*sche Punkt der *Kirkman*sche Punkt der *Pascal*schen Sechsecke:

*) Sätze über diese *Pascal*schen Sechsecke in Verbindung mit dem gegebenen (in Bezug auf *Pascal*sche, *Steiner*sche Geraden etc.) finden sich in meinen „Erweiterungen des *Pascal*schen Sechsecks". Wiesbaden 1880.

$$(ab,\ ef)(ab,\ cd)(cd,\ ef)(af,\ bc)(af,\ ed)(ed,\ bc)$$
$$1\quad 3\quad 5\quad 2\quad 6\quad 4,$$
$$1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4 \quad\text{und}\quad 1\ 5\ 2\ 4\ 6\ 3.$$

Das *Brianchon*sche Sechseck bestimmt aber auch die *Brianchon*schen Sechsecke mit den Ecken:

$$\left.\begin{array}{l} a,\ e,\ c,\ d,\ b,\ f, \\ a,\ e,\ f,\ d,\ b,\ c, \\ a,\ b,\ f,\ d,\ e,\ c, \end{array}\right\}\ \text{mit demselben } \textit{Brianchon}\text{schen Punkte.}$$

Zu jedem dieser Sechsecke kann man, wie eben geschehen, *Pascal*sche Sechsecke bestimmen, welche alle denselben *Kirkman*schen Punkt haben. Diese *Pascal*schen Sechsecke sind:

$$\left\{\begin{array}{l} (ae,\ bf)(ae,\ cd)(cd,\ bf)(af,\ ec)(af,\ bd)(bd,\ ec) \\ \quad \mathrm{I}\quad \mathrm{III}\quad \mathrm{V}\quad \mathrm{II}\quad \mathrm{VI}\quad \mathrm{IV}, \\ \mathrm{I}\ \mathrm{V}\ \mathrm{III}\ \mathrm{VI}\ \mathrm{II}\ \mathrm{IV}\quad\text{und}\quad \mathrm{I}\ \mathrm{V}\ \mathrm{II}\ \mathrm{IV}\ \mathrm{VI}\ \mathrm{III}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (ae,\ bc)(ae,\ fd)(fd,\ bc)(ac,\ ef)(ac,\ bd)(bd,\ ef) \\ \quad \mathrm{I}'\quad \mathrm{III}'\quad \mathrm{V}'\quad \mathrm{II}'\quad \mathrm{VI}'\quad \mathrm{IV}', \\ \mathrm{I}'\ \mathrm{V}'\ \mathrm{III}'\ \mathrm{VI}'\ \mathrm{II}'\ \mathrm{IV}'\quad\text{und}\quad \mathrm{I}'\ \mathrm{V}'\ \mathrm{II}'\ \mathrm{IV}'\ \mathrm{VI}'\ \mathrm{III}', \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (ab,\ ec)(ab,\ fd)(fd,\ ec)(ac,\ bf)(ac,\ ed)(ed,\ bf) \\ \quad \mathrm{I}''\quad \mathrm{III}''\quad \mathrm{V}''\quad \mathrm{II}''\quad \mathrm{VI}''\quad \mathrm{IV}'', \\ \mathrm{I}''\ \mathrm{V}''\ \mathrm{III}''\ \mathrm{VI}''\ \mathrm{II}''\ \mathrm{IV}''\quad\text{und}\quad \mathrm{I}''\ \mathrm{V}''\ \mathrm{II}''\ \mathrm{IV}''\ \mathrm{VI}''\ \mathrm{III}''. \end{array}\right.$$

Geht man vom *Pascal*schen Sechseck 1 3 5 2 6 4 aus, so braucht man hier nur zu setzen:

$a = (26, 13)$, $b = (13, 24)$, $c = (24, 35)$, $d = (35, 64)$, $e = (64, 15)$, $f = (15, 26)$.

Ist also ein *Brianchon*sches Sechseck mit den Ecken a, b, c, d, e, f gegeben, so bestimmt dies die *Pascal*schen Sechsecke mit den Seiten:

$$\begin{array}{ll}
(1.) & ab,\ cd,\ \{(cd,\ ef)(af,\ bc)\},\ af,\ ed,\ \{(ed,\ bc)(ab,\ ef)\}, \\
(2.) & ef,\ cd,\ \{(ab,\ cd)(af,\ ed)\},\ af,\ bc,\ \{(ed,\ bc)(ab,\ ef)\}, \\
(3.) & ab,\ ef,\ \{(cd,\ ef)(af,\ bc)\},\ bc,\ ed,\ \{(af,\ ed)(cd,\ ab)\}, \\
(1'.) & ae,\ cd,\ \{(cd,\ bf)(af,\ ec)\},\ af,\ bd,\ \{(bd,\ ec)(ae,\ bf)\}, \\
(2'.) & bf,\ cd,\ \{(ae,\ cd)(af,\ bd)\},\ af,\ ec,\ \{(bd,\ ec)(ae,\ bf)\}, \\
(3'.) & ae,\ bf,\ \{(cd,\ bf)(af,\ ec)\},\ ec,\ bd,\ \{(af,\ bd)(ae,\ cd)\},
\end{array}$$

(1''.)	ae,	fd,	$\{(fd, bc)(ac, ef)\}$,	ac,	bd,	$\{(bd, ef)(ae, bc)\}$,
(2''.)	bc,	fd,	$\{(fd, ae)(bd, ac)\}$,	ac,	ef,	$\{(ef, bd)(ae, bc)\}$,
(3''.)	ae,	bc,	$\{(bc, fd)(ac, ef)\}$,	ef,	bd,	$\{(bd, ac)(fd, ae)\}$,
(1'''.)	ab,	fd,	$\{(fd, ec)(fb, ac)\}$,	ac,	ed,	$\{(ed, bf)(ec, ab)\}$,
(2'''.)	ec,	fd,	$\{(fd, ab)(ed, ac)\}$,	ac,	bf,	$\{(bf, ed)(ab, ec)\}$,
(3'''.)	ab,	ec,	$\{(ec, fd)(ac, fb)\}$,	fb,	ed,	$\{(ed, ac)(fd, ab)\}$.

Die Sechsecke 1, 2, 3; 1', 2', 3'; etc. haben entsprechend dieselben Ecken; je zwei der Sechsecke haben zwei Seiten gemein (wie z. B. 1, 1'; 2, 2';) und zu je vier dieselbe *Pascal*sche Gerade (1, 1', 1'', 1''' etc.); die drei *Pascal*schen Geraden aller Sechsecke ad, be, cf gehen durch den allen Sechsecken gemeinschaftlichen *Kirkman*schen Punkt. Durch die Sechsecke 1, 2, 3 sind 60 Sechsecke bestimmt, welche nach der Tafel je drei *Pascal*sche Sechsecke liefern, die zu je drei dieselbe *Pascal*sche Gerade haben, und welche alle denselben *Kirkman*schen Punkt besitzen, oder jeder der 60 *Kirkman*schen Punkte liefert drei *Pascal*sche Sechsecke, welche dieselbe *Pascal*sche Gerade mit einem der Sechsecke haben, zu welchem jener Punkt *Kirkman*scher Punkt ist.

Dies wurde abgeleitet mit Hülfe des Satzes, dass die Sechsecke

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,$$
$$a,\ e,\ c,\ d,\ b,\ f,$$
$$a,\ b,\ f,\ d,\ e,\ c,$$
$$a,\ e,\ f,\ d,\ b,\ c$$

*Brianchon*sche Sechsecke sind, wenn a, b, c, d, e, f die Ecken eines *Brianchon*schen Sechsecks sind. Der Satz ist evident. Mit dessen Hülfe kann man sehr einfach nachweisen, dass je drei *Brianchon*sche Punkte des *Brianchon*schen Sechsecksystems, welches durch sechs Gerade bestimmt ist, in einer Geraden liegen. (Entsprechend den *Steiner*schen Punkten.)

Es sei das *Brianchon*sche Sechseck mit den Seiten a, b, c, d, e, f gegeben und bekannt, dass diese sechs Seiten 60 *Brianchon*sche Sechsecke festlegen. Der Schnittpunkt zweier Geraden m, n sei bezeichnet mit (m, n). Man bestimme (c, f) und (b, e) und bezeichne a mit 1, d mit 2, die Verbindungslinie $(d, c)(e, b)$ mit 5, die von (f, a) und (e, b) mit 4, die von (f, c) und (e, d) mit 3 und schliesslich die von (f, c) und (a, b) mit 6. Wenn man für die Verbindungslinie der Punkte (m, n) und (p, q) das Symbol

$[(m, n)(p, q)]$ gebraucht, kann man für das gegebene Sechseck setzen:

$$[(4, 1)(1, 6)]\,[(1, 6)(4, 5)]\,[(2, 5)(6, 3)]\,[(2, 5)(2, 3)]\,[(2, 3)(4, 5)]\,[(6, 3)(1, 4)].$$

Der *Brianchon*sche Punkt dieses Sechsecks ist der Schnittpunkt der Geraden $[(1, 6)(2, 3)]$ und $[(2, 5)(1, 4)]$. Denselben *Brianchon*schen Punkt hat auch das Sechseck 1, 6, 5, 2, 3, 4. Dass dieses Sechseck ein *Brianchon*sches ist, sieht man leicht. Da nämlich a, b, c, d, e, f ein solches ist, so ist auch a, b, e, d, c, f oder, wenn man statt der Seiten die Ecken einführt,

$$(a, b)(b, e)(e, d)(d, c)(c, f)(f, a)$$

ein *Brianchon*sches Sechseck, mithin auch das Sechseck

$$(a, b)(f, c)(e, d)(d, c)(b, e)(f, a)$$

oder, wenn man statt der Ecken wieder die Seiten einführt, 1, 6, 3, 2, 5, 4, daher auch das Sechseck 1, 6, 5, 2, 3, 4.

Das gegebene Sechseck hat also denselben *Brianchon*schen Punkt wie 1, 6, 5, 2, 3, 4, er liegt also in der Geraden $[(6, 5)(3, 4)]$. Die *Brianchon*schen Punkte der Sechsecke

$$a,\ d,\ c,\ f,\ e,\ b,$$
$$a,\ f,\ c,\ b,\ e,\ d$$

sind aber $(5, 6)$ und $(3, 4)$, d. h. die drei *Brianchon*schen Punkte liegen in derselben Geraden. Mit Hülfe von Permutationen folgt, dass je drei Punkte nur auf einer solchen Geraden liegen, dass es also deren zwanzig giebt.

Darmstadt, den 31. Januar 1882.

Zur Theorie der Integration eines Systems von *n nicht linearen* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und *n* abhängigen Veränderlichen.

(Von Herrn *Hamburger*.)

Im Anschluss an die Abhandlung im Bd. 81 dieses Journals p. 243 ff., worin die Systeme *linearer* partieller Differentialgleichungen und einer speciellen Klasse nicht linearer partieller Differentialgleichungen unter gewissen Integrabilitätsbedingungen integrirt werden, soll hier die Integration eines allgemeinen Systems *nicht linearer* partieller Differentialgleichungen auf die Integration von unvollständigen Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Sind dieselben integrabel, so führt die Kenntniss je eines Integrals eines jeden dieser Systeme zu der vollständigen Lösung des vorgelegten Systems partieller Differentialgleichungen mit $2n$ willkürlichen Constanten.

In einem zweiten Abschnitt behandelt man nach einer ähnlichen Methode die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Variablen. Die Resultate stimmen für $n=2$ mit denjenigen überein, die Herr *Darboux* in seiner Arbeit Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre Ann. de l'Éc. Norm. VII 163—173 auf einem ganz verschiedenen Wege erhalten hat.

§ 1.

Das zu integrirende System n simultaner partieller Differentialgleichungen laute:

$$(1.)\qquad f_i(x,\ y,\ z_1\dots z_n,\ p_1\dots p_n,\ q_1\dots q_n) = 0, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

wo x und y die unabhängigen Variablen, $z_1\dots z_n$ die zu bestimmenden n

Functionen von x und y bedeuten und die p und q durch die Gleichungen

$$p_k = \frac{\partial z_k}{\partial x}, \quad q_k = \frac{\partial z_k}{\partial y}$$

definirt sind.

Die Aufgabe der Integration kann dahin gefasst werden, n Functionen $v_1 \ldots v_n$ der Veränderlichen $x, y, z_1 \ldots z_n, p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n$ zu finden von der Art, dass, wenn man aus den $2n$ Gleichungen

$$f_i = 0, \quad v_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

die $2n$ Grössen p und q als Functionen von $x, y, z_1 \ldots z_n$ bestimmt, das Gleichungssystem

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy, \quad \ldots \quad dz_n = p_n dx + q_n dy$$

integrabel wird.

Differentiirt man die Gleichungen (1.) nach x und y und benutzt die Relationen

$$\frac{\partial p_k}{\partial y} = \frac{\partial q_k}{\partial x},$$

so erhält man, unter Anwendung der abkürzenden Bezeichnungen:

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial z_1} p_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial z_n} p_n,$$

$$\frac{df_i}{dy} = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial z_1} q_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial z_n} q_n,$$

das folgende System von $2n$ Gleichungen:

$$(2.) \quad \begin{cases} \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_k}{\partial y} = -\frac{df_i}{dx}, \\ \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial x} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial y} = -\frac{df_i}{dy}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und wenn wir hiermit die n identischen Gleichungen

$$(3.) \quad \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial z_k}{\partial x} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_k}{\partial y} = \sum_k \left(p_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + q_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right)$$

verbinden, so haben wir ein System von $3n$ *linearen partiellen* Differentialgleichungen zwischen den beiden unabhängigen Variablen x, y und den $3n$ als Functionen derselben zu betrachtenden Variablen $z_1 \ldots z_n, p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n$.

In dem besonderen Falle, dass die Functionen f_i die Variablen $z_1 \ldots z_n$ selbst explicite nicht enthalten, haben wir bereits in den Gleichungen (2.) ein System von $2n$ *linearen partiellen* Differentialgleichungen zwischen x, y als unabhängigen und $p_1 \ldots p_n, q_1 \ldots q_n$ als abhängigen Veränderlichen, und

es bedarf daher nicht der Hinzufügung der Gleichung (3.); $\frac{df_i}{dx}$, $\frac{df_i}{dy}$ sind in diesem Falle identisch mit $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$.

Die in der Eingangs angeführten Abhandlung entwickelte Integrationsmethode für ein System von $3n$ linearen partiellen Differentialgleichungen führt im Allgemeinen auf eine Integration von $3n$ Systemen von je zwei totalen Differentialgleichungen; unter gewissen an gedachter Stelle näher bezeichneten Bedingungen verringert sich indessen die Zahl der Systeme, während die Zahl der in jedem Systeme befindlichen totalen Differentialgleichungen eine grössere ist. Dieser Fall tritt bei dem Systeme der $3n$ Gleichungen (2.) und (3.) stets ein, und zwar erhalten wir hier statt der $3n$ Systeme von je zwei, n Systeme von je $n+3$ totalen Differentialgleichungen zwischen $3n+2$ Variablen, wie wir nunmehr zeigen wollen.

Man führe n noch zu bestimmende Functionen $l_1 \dots l_n$ der Variablen x, y, $z_1 \dots z_n$, $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_n$ ein und setze der Kürze wegen

$$\sum_{i=1}^{i=n} l_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} = \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right), \quad \sum_{i=1}^{i=n} l_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = \left(l \frac{\partial f}{\partial q_k}\right),$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} l_i \frac{df_i}{dx} = \left(l \frac{df}{dx}\right), \quad \sum_{i=1}^{i=n} l_i \frac{df_i}{dy} = \left(l \frac{df}{dy}\right),$$

so folgen unmittelbar aus den Gleichungen (2.) und (3.) durch Multiplication mit $l_1 \dots l_n$ und Addition die drei Gleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=n} \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \frac{\partial p_k}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(l \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) \frac{\partial p_k}{\partial y} = -\left(l \frac{df}{dx}\right), \\ \sum_{k=1}^{k=n} \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(l \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial y} = -\left(l \frac{df}{dy}\right), \\ \sum_{k=1}^{k=n} \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \frac{\partial z_k}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(l \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) \frac{\partial z_k}{\partial y} = \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ p_k \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) + q_k \left(l \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) \right\}. \end{cases}$$

Andrerseits bestehen identisch die Relationen

$$(5.)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \frac{\partial p_k}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \frac{\partial p_k}{\partial y} dy = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k dp_k, \\ \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \frac{\partial q_k}{\partial y} dy = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k dq_k, \\ \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \frac{\partial z_k}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k \frac{\partial z_k}{\partial y} dy = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_k dz_k, \end{cases}$$

wo $\lambda_1 \dots \lambda_n$ eine zweite Reihe noch zu bestimmender Functionen darstellen. Ueber die Grössen l und λ verfügen wir derart, dass die Gleichungen (4.),

unabhängig von den Derivirten $\frac{\partial p_k}{\partial x}, \frac{\partial q_k}{\partial x}, \frac{\partial z_k}{\partial x}, \frac{\partial p_k}{\partial y}, \frac{\partial q_k}{\partial y}, \frac{\partial z_k}{\partial y}$ Folgen der identischen Gleichungen (5.) werden. Dies ist der Fall, wenn folgende Gleichungen gelten:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Sigma\lambda_k dp_k}{-\left(l\frac{df}{dx}\right)} = \dfrac{\Sigma\lambda_k dq_k}{-\left(l\frac{df}{dy}\right)} = \dfrac{\Sigma\lambda_k dz_k}{\Sigma\left\{p_k\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)+q_k\left(l\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\}} \\ \qquad = \dfrac{\lambda_1 dx}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = \cdots = \dfrac{\lambda_n dx}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)} \\ \qquad = \dfrac{\lambda_1 dy}{\left(l\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)} = \cdots = \dfrac{\lambda_n dy}{\left(l\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(l\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = \cdots = \dfrac{\left(l\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)} = \mu, \\ \dfrac{\lambda_1 dp_1+\cdots+\lambda_n dp_n}{\lambda_1 dx} = -\dfrac{\left(l\frac{df}{dx}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}, \\ \dfrac{\lambda_1 dq_1+\cdots+\lambda_n dq_n}{\lambda_1 dx} = -\dfrac{\left(l\frac{df}{dy}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}, \\ \dfrac{\lambda_1 dz_1+\cdots+\lambda_n dz_n}{\lambda_1 dx} = \dfrac{\Sigma\left\{p_k\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)+q_k\left(l\frac{\partial f}{\partial q_k}\right)\right\}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)}, \end{cases}$$

wo μ eine neue Hülfsgrösse bezeichnet. Zwischen den Grössen $l_1 \dots l_n$ erhalten wir hiernach folgendes System von n Gleichungen

$$(8.)\quad \left(l\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)-\mu\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)=0, \quad \dots \quad \left(l\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)-\mu\left(l\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)=0$$

oder in ausgeführter Form

$$(8^a.)\quad \begin{cases} l_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}-\mu\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\right)+\cdots+l_n\left(\frac{\partial f_n}{\partial q_1}-\mu\frac{\partial f_n}{\partial p_1}\right) = 0, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ l_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_n}-\mu\frac{\partial f_1}{\partial p_n}\right)+\cdots+l_n\left(\frac{\partial f_n}{\partial q_n}-\mu\frac{\partial f_n}{\partial p_n}\right) = 0. \end{cases}$$

Das Bestehen dieser Gleichungen erfordert, dass

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f_n}{\partial p_1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f_1}{\partial p_n} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \varphi(\mu) = 0$$

ist, und nach Auflösung dieser Gleichung in μ erhält man für die Verhältnisse der Grössen l die Proportion

$$l_1 : l_2 : \ldots : l_n = \varphi_i^1(\mu) : \varphi_i^2(\mu) : \ldots : \varphi_i^n(\mu),$$

wenn man den Coefficienten des Elementes $\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \mu \frac{\partial f_k}{\partial p_i}$ in $\varphi(\mu)$ mit $\varphi_i^k(\mu)$ bezeichnet; und für die Verhältnisse der Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ erhalten wir aus (6.)

$$(9.) \quad \begin{cases} \lambda_1 : \ldots : \lambda_n = \left(l \frac{\partial f}{\partial p_1}\right) : \ldots : \left(l \frac{\partial f}{\partial p_n}\right) \\ \qquad\qquad\quad = \left(l \frac{\partial f}{\partial q_1}\right) : \ldots : \left(l \frac{\partial f}{\partial q_n}\right). \end{cases}$$

Da die Gleichung $\varphi(\mu) = 0$ vom n^{ten} Grade ist, so erhalten wir, den n Wurzeln derselben entsprechend, im Allgemeinen n Werthsysteme für die Verhältnisse der Grössen $l_1 \ldots l_n$ und die der Grössen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. Aus (7.) ergeben sich mit Rücksicht auf (9.) die Gleichungen:

$$(10.) \quad dy = \mu\, dx,$$

$$(11.) \quad \sum_k \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) dp_k = -\left(l \frac{df}{dx}\right) dx,$$

$$(12.) \quad \sum_k \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) dq_k = -\left(l \frac{df}{dy}\right) dx,$$

$$(13.) \quad \sum_k \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) dz_k = \sum_k \left\{ p_k \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) + q_k \left(l \frac{\partial f}{\partial q_k}\right) \right\} dx,$$

wo die Summen sich von $k = 1$ bis $k = n$ erstrecken.

Zu diesen sind noch die n Gleichungen

$$(14.) \quad dz_k = p_k dx + q_k dy, \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

die der Voraussetzung nach befriedigt sein müssen, hinzuzufügen. Nun ist aber die Gleichung (13.) eine Folge der Gleichungen (14.) und (10.), denn (13.) kann wegen (8.) geschrieben werden:

$$\sum_k \left(l \frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \{dz_k - (p_k + \mu q_k)\, dx\} = 0,$$

und da $dy = \mu\, dx$,

$$\sum_k \left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right) \{dz_k - p_k\,dx - q_k\,dy\} = 0.$$

Die Gleichung (13.) kann demnach aus dem System der Gleichungen (10.) bis (14.) fortgelassen werden, und indem wir in (14.) μdx für dy schreiben, erhalten wir:

$$(15.)\quad \begin{cases} dy = \mu\,dx, \\ dz_1 = (p_1 + q_1\mu)\,dx, \;\dots\; dz_n = (p_n + q_n\mu)\,dx, \\ \Sigma\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)dp_k = -\left(l\frac{df}{dx}\right)dx, \\ \Sigma\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)dq_k = -\left(l\frac{df}{dy}\right)dx. \end{cases}$$

Dies ist ein System von $n+3$ totalen Differentialgleichungen zwischen den $3n+2$ Variablen $x, y, z_1 \dots z_n, p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$. Solcher Systeme giebt es so viele, als die Gleichung $\varphi(\mu) = 0$ verschiedene Wurzeln hat, also im Allgemeinen n. In der Voraussetzung nun, dass die Wurzeln dieser Gleichung sämmtlich von einander verschieden sind, beweisen wir folgenden Satz: Lässt jedes der n Systeme (15.), die den n Wurzeln der Gleichung $\varphi(\mu) = 0$ entsprechen, je ein Integral zu, — und zwar genüge $v_r = c_r$ als Integral dem Systeme, das man aus (15.) erhält, wenn man darin für μ die Wurzel μ_r substituirt, — und bestimmt man aus diesen n Integralgleichungen und den gegebenen n Gleichungen des Systems $f_1 = 0, \dots f_n = 0$ die $2n$ Variablen $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$ als Functionen von $x, y, z_1 \dots z_n$, so bilden die Gleichungen

$$dz_1 = p_1\,dx + q_1\,dy, \quad \dots \quad dz_n = p_n\,dx + q_n\,dy$$

ein integrables System, d. h. die p und q erfüllen die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial p_i}{\partial y} + \frac{\partial p_i}{\partial z_1} q_1 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial z_n} q_n = \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial z_1} p_1 + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial z_n} p_n$$

für $i = 1, 2, \dots n$, oder nach der bereits eingeführten abkürzenden Bezeichnung:

$$\frac{dp_i}{dy} = \frac{dq_i}{dx}. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Die Integration des Systems (16.) giebt alsdann $z_1 \dots z_n$ als Functionen von $x, y, c_1 \dots c_n$ mit n neuen Constanten, und diese Functionen stellen die vollständige Lösung des Systems (1.) mit $2n$ Constanten dar.

Anmerkung: Die Möglichkeit der Bestimmung der Variablen p, q als Functionen der übrigen Variablen aus den $2n$ Gleichungen $f_i = 0$, $v_i = c_i$ setzt voraus, dass keines der gewählten Integrale v auf die Form gebracht werden könne: $F(f_1 \dots f_n, x, y, z_1 \dots z_n)$, was wir im Folgenden annehmen.

Wir gehen nunmehr zum Beweise des aufgestellten Satzes über.

Soll $v_r = c_r$ ein Integral des Systems (15.) für $\mu = \mu_r$ sein, so muss die Gleichung

$$(16.)\qquad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \sum_s \left(\frac{\partial v}{\partial z_s}dz_s + \frac{\partial v}{\partial p_s}dp_s + \frac{\partial v}{\partial q_s}dq_s\right) = 0\,^{*)}$$

eine identische Folge der Gleichungen (15.) sein. Drücken wir also die $n+3$ Differentiale $dy,\ dp_1,\ dq_1,\ dz_1 \dots dz_n$ durch die übrigen Differentiale mittelst (15.) aus und substituiren diese Ausdrücke in (16.), so müssen die Coefficienten der letzteren Differentiale einzeln verschwinden, was die Gleichungen ergiebt:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\mu + \frac{\partial v}{\partial z_1}(p_1 + q_1\mu) + \dots + \frac{\partial v}{\partial z_n}(p_n + q_n\mu)$$
$$- \frac{\partial v}{\partial p_1}\frac{\left(l\frac{df}{dx}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} - \frac{\partial v}{\partial q_1}\frac{\left(l\frac{df}{dy}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial p_1}\frac{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = 0,$$
$$(k = 2, \dots n).$$
$$\frac{\partial v}{\partial q_k} - \frac{\partial v}{\partial q_1}\frac{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = 0.$$

Mit Rücksicht darauf, dass nach unserer Bezeichnung

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z_1}p_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial z_n}p_n = \frac{dv}{dx},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z_1}q_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial z_n}q_n = \frac{dv}{dy},$$

können vorstehende Gleichungen auch geschrieben werden:

$$(17.)\quad \begin{cases} \left(\frac{dv}{dx} + \mu\frac{dv}{dy}\right)\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right) = \frac{\partial v}{\partial p_1}\left(l\frac{df}{dx}\right) + \frac{\partial v}{\partial q_1}\left(l\frac{df}{dy}\right), \\ \dfrac{\frac{\partial v}{\partial p_1}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = \dfrac{\frac{\partial v}{\partial p_2}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)} = \dots = \dfrac{\frac{\partial v}{\partial p_n}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)}, \\ \dfrac{\frac{\partial v}{\partial q_1}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = \dfrac{\frac{\partial v}{\partial q_2}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_2}\right)} = \dots = \dfrac{\frac{\partial v}{\partial q_n}}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)}. \end{cases}$$

---

*) Den Index r lassen wir der Einfachheit wegen fort.

Durch dieses System simultaner linearer partieller Differentialgleichungen, welchem v genügen muss, kann das System (15.) totaler Differentialgleichungen vollständig ersetzt werden.

Denkt man sich nun die Ausdrücke von $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_n$ als Functionen von x, y, $z_1 \dots z_n$, wie sie aus den $2n$ Gleichungen

$$v_1 = c_1, \quad \dots \quad v_n = c_n, \quad f_1 = 0, \quad \dots \quad f_n = 0$$

erhalten werden, in eines der Integrale $v = c$ eingesetzt, so hat man identisch:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial y} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial v}{\partial z_1} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial z_1} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial z_1} &= 0, \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \\
\frac{\partial v}{\partial z_n} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial p_s} \frac{\partial p_s}{\partial z_n} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial z_n} &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen von der dritten an der Reihe nach mit $p_1 \dots p_n$, bildet die Summe der Producte und addirt sie nach einander zur ersten und zweiten Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} + \sum_s \frac{\partial v}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dx} + \sum_s \frac{\partial v}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dx} &= 0, \\
\frac{dv}{dy} + \sum_s \frac{\partial v}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dy} + \sum_s \frac{\partial v}{\partial q_s} \frac{dq_s}{dy} &= 0,
\end{aligned}$$

und indem man die zweite der vorstehenden Gleichungen mit μ multiplicirt und zur ersten addirt:

$$\frac{dv}{dx} + \mu \frac{dv}{dy} + \Sigma \frac{\partial v}{\partial p_s} \left(\frac{dp_s}{dx} + \mu \frac{dp_s}{dy} \right) + \Sigma \frac{\partial v}{\partial q_s} \left(\frac{dq_s}{dx} + \mu \frac{dq_s}{dy} \right) = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit $\left(l \frac{\partial f}{\partial p_1} \right)$ und drückt gemäss den Gleichungen (17.) $\frac{dv}{dx} + \mu \frac{dv}{dy}$, $\frac{\partial v}{\partial p_s}$, $\frac{\partial v}{\partial q_s}$ durch $\frac{\partial v}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v}{\partial q_1}$ aus, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial p_1} \left\{ \left(l \frac{df}{dx} \right) + \sum_s \left(l \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) \left(\frac{dp_s}{dx} + \mu \frac{dp_s}{dy} \right) \right\} \\
&+ \frac{\partial v}{\partial q_1} \left\{ \left(l \frac{df}{dy} \right) + \sum_s \left(l \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) \left(\frac{dq_s}{dx} + \mu \frac{dq_s}{dy} \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

oder, da nach (7.)

$$\mu\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right) = \left(l\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)$$

ist,

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial p_1}\left\{\left(l\dfrac{df}{dx}\right)+\sum\limits_s\left(l\dfrac{\partial f}{\partial p_s}\right)\dfrac{dp_s}{dx}+\sum\limits_s\left(l\dfrac{\partial f}{\partial q_s}\right)\dfrac{dp_s}{dy}\right\} \\ +\dfrac{\partial v}{\partial q_1}\left\{\left(l\dfrac{df}{dy}\right)+\sum\limits_s\left(l\dfrac{\partial f}{\partial p_s}\right)\dfrac{dq_s}{dx}+\sum\limits_s\left(l\dfrac{\partial f}{\partial q_s}\right)\dfrac{dq_s}{dy}\right\} = 0. \end{cases}$$

Nun gelten aber identisch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{df_i}{dx}+\sum_s\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dx}+\sum\frac{\partial f_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dx} &= 0, \\ \frac{df_i}{dy}+\sum_s\frac{\partial f_i}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dy}+\sum\frac{\partial f_i}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dy} &= 0, \end{aligned} \qquad (i=1,\dots n).$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit l_i und Summation über i

$$\begin{aligned} \left(l\frac{df}{dx}\right)+\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\frac{dp_s}{dx}+\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)\frac{dq_s}{dx} &= 0, \\ \left(l\frac{df}{dy}\right)+\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\frac{dp_s}{dy}+\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)\frac{dq_s}{dy} &= 0. \end{aligned}$$

Vermöge dieser Identitäten kann die Gleichung (18.) geschrieben werden

$$0 = \frac{\partial v}{\partial p_1}\cdot\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)\left(\frac{dp_s}{dy}-\frac{dq_s}{dx}\right)+\frac{\partial v}{\partial q_1}\cdot\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\left(\frac{dq_s}{dx}-\frac{dp_s}{dy}\right),$$

und da

$$\left(l\frac{\partial f}{\partial q_s}\right) = \mu\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)$$

ist,

$$\left(\mu\frac{\partial v}{\partial p_1}-\frac{\partial v}{\partial q_1}\right)\sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\left(\frac{dp_s}{dy}-\frac{dq_s}{dx}\right) = 0.$$

Wofern also nicht $\dfrac{\partial v}{\partial q_1}=\mu\dfrac{\partial v}{\partial p_1}$ ist, ergiebt sich

$$(19.)\quad \sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial p_s}\right)\left(\frac{dp_s}{dy}-\frac{dq_s}{dx}\right)=0 \quad\text{oder}\quad \sum_s\left(l\frac{\partial f}{\partial q_s}\right)\left(\frac{dp_s}{dy}-\frac{dq_s}{dx}\right)=0.$$

Die Annahme, dass $\dfrac{\partial v}{\partial q_1}=\mu\dfrac{\partial v}{\partial p_1}$, ist jedoch auszuschliessen; denn setzt man $\dfrac{\partial v}{\partial p_1}=M\left(l\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right)$, so folgt

$$\frac{\partial v}{\partial q_1}=\mu M\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)=M\left(l\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)$$

und wegen (17.)

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial p_i}=M\left(l\dfrac{\partial f}{\partial p_i}\right)=M\left\{l_1\dfrac{\partial f_1}{\partial p_i}+\cdots+l_n\dfrac{\partial f_n}{\partial p_i}\right\}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial q_i}=\mu M\left(l\dfrac{\partial f}{\partial p_i}\right)=M\left(l\dfrac{\partial f}{\partial q_i}\right)=M\left\{l_1\dfrac{\partial f_1}{\partial q_i}+\cdots+l_n\dfrac{\partial f_n}{\partial q_i}\right\}. \end{cases}$$

Daraus schliesst man aber, dass dv auf die Form gebracht werden kann

$$dv = M(l_1 df_1 + \cdots + l_n df_n) + A\,dx + B\,dy + C_1 dz_1 + \cdots + C_n dz_n,$$

also

$$v = F(f_1 \dots f_n,\ x,\ y,\ z_1 \dots z_n),$$

was gegen unsere Voraussetzung ist. (S. obige Anm. p. 193.)

In den Gleichungen (19.) und (20.) ist für die Verhältnisse der Grössen $l_1 \dots l_n$ das Werthsystem zu nehmen, welches der Wurzel μ_r der Gleichung $\varphi(\mu) = 0$ entspricht. Bezeichnen wir dieses Werthsystem mit $l_1^r \dots l_n^r$, so lauten jene Gleichungen in ausgeführter Schreibweise:

$$(21.)\qquad l_1^r \sum_s \frac{\partial f_1}{\partial p_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) + \cdots + l_n^r \sum_s \frac{\partial f_n}{\partial p_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) = 0,$$

$$(22.)\qquad l_1^r \sum_s \frac{\partial f_1}{\partial q_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) + \cdots + l_n^r \sum_s \frac{\partial f_n}{\partial q_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) = 0.$$

Lassen wir r die Werthe von 1 bis n durchlaufen, so erhält man aus (21.) und (22.) $2n$ Gleichungen, die sich als Folge der Integralgleichungen

$$v_1 = c_1, \quad \dots \quad v_n = c_n$$

ergeben. Da nun unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln $\mu_1 \dots \mu_n$ sämmtlich von einander verschieden sind, die Determinante

$$\begin{vmatrix} l_1^1 & \dots & l_n^1 \\ \vdots & & \\ l_1^n & \dots & l_n^n \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, so können die obigen $2n$ Gleichungen nur bestehen, wenn einzeln

$$\sum_s \frac{\partial f_1}{\partial p_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) = 0, \quad \dots \quad \sum_s \frac{\partial f_n}{\partial p_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) = 0$$

und

$$\sum_s \frac{\partial f_1}{\partial q_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) = 0, \quad \dots \quad \sum_s \frac{\partial f_n}{\partial q_s}\left(\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}\right) = 0$$

stattfindet. Dies sind $2n$ Gleichungen zwischen den n Grössen $\frac{dp_s}{dy} - \frac{dq_s}{dx}$ $(s = 1, \dots n)$. Wofern nun nicht die Functionaldeterminanten der f, nach je n der Variablen $p_1 \dots p_n$, $q_1 \dots q_n$ genommen, sämmtlich verschwinden, was aus einem sogleich anzugebenden Grunde unzulässig ist, so müssen die genannten Grössen einzeln verschwinden, also

$$\frac{dp_1}{dy} - \frac{dq_1}{dx} = 0, \quad \dots \quad \frac{dp_n}{dy} - \frac{dq_n}{dx} = 0$$

sein, folglich sind, wie behauptet, die totalen Differentialgleichungen

$$dz_1 - p_1 dx - q_1 dy = 0, \quad \ldots \quad dz_n - p_n dx - q_n dy = 0$$

integrabel.

Der Fall nämlich, dass die erwähnten Functionaldeterminanten verschwinden, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen den Functionen $f_1 \ldots f_n$ eine die Derivirten $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ nicht enthaltende Relation existirt; man könnte demnach nicht, wie oben vorausgesetzt, aus den Gleichungen

$$f_1 = 0, \quad \ldots \quad f_n = 0, \quad v_1 = c_1, \quad \ldots \quad v_n = c_n$$

die Grössen p und q als Functionen von x, y, $z_1 \ldots z_n$ bestimmen.

Die Integration der obigen Gleichungen, welche ausser den n Constanten $c_1 \ldots c_n$, die in den Ausdrücken für die p und q enthalten sind, n neue Constanten liefert, ergiebt die vollständige Lösung des vorgelegten Systems (1.) mit $2n$ Constanten.

Ist $w_k = \text{const.}$ ein zweites von $v_k = \text{const.}$ verschiedenes Integral des Systems (15.) für $\mu = \mu_k$, und bedeutet $\psi_k(v_k, w_k)$ eine willkürliche Function von v_k und w_k, dann wird auch $\psi_k(v_k, w_k)$, für v eingesetzt, das System befriedigen, das aus (15.) hervorgeht, wenn μ_k statt μ und $l_1^k \ldots l_n^k$ resp. statt $l_1 \ldots l_n$ gesetzt wird. Da aber der im Vorhergehenden bewiesene Satz lediglich aus den Gleichungen (15.) hergeleitet wurde, so folgt, dass, wenn aus den $2n$ Gleichungen

$$\psi_1(v_1, w_1) = 0, \quad \ldots \quad \psi_n(v_n, w_n) = 0,$$
$$f_1 = 0, \quad \ldots \quad f_n = 0$$

$p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ als Functionen von x, y, $z_1 \ldots z_n$ bestimmt werden, alsdann die Gleichungen

$$dz_1 = p_1 dx + q_1 dy, \quad \ldots \quad dz_n = p_n dx + q_n dy$$

wiederum integrabel werden, und ihre Integration liefert die allgemeine Lösung des Systems (1.) mit n willkürlichen Functionen.

In dem besonderen bereits erwähnten Falle, dass die z in den gegebenen n Gleichungen (1.) nicht explicite vorkommen, gehen die n zu integrirenden Systeme (15.) von je $n+3$ totalen Differentialgleichungen zwischen den $3n+2$ Variablen x, y, $z_1 \ldots z_n$, $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ in die folgenden n Systeme von je drei totalen Differentialgleichungen zwischen den $2n+2$ Variablen x, y, $p_1 \ldots p_n$, $q_1 \ldots q_n$ über:

$$(23.)\quad \begin{cases} dy = \mu dx, \\ \Sigma\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)dp_k = -\left(l\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx, \\ \Sigma\left(l\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)dq_k = -\left(l\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy, \end{cases}$$

wo

$$\mu = \frac{\left(l\frac{\partial f}{\partial q_1}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_1}\right)} = \cdots = \frac{\left(l\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)}{\left(l\frac{\partial f}{\partial p_n}\right)}$$

ist.

Bestimmt man hier aus den gegebenen Gleichungen $f_1 = 0, \dots f_n = 0$ und den Gleichungen $v_1 = c_1, \dots v_n = c_n$, wo $v_r = c_r$ ein Integral des der Wurzel μ_r entsprechenden Systems (23.) ist, $p_1 \dots p_n$ und $q_1 \dots q_n$ als Functionen von x und y, dann müssen nach dem Vorhergehenden die Ausdrücke:

$$p_1 dx + q_1 dy, \quad \dots \quad p_n dx + q_n dy$$

genaue Differentiale werden, und man erhält

$$z_1 = \int(p_1 dx + q_1 dy), \quad \dots \quad z_n = \int(p_n dx + q_n dy)$$

als die vollständige Lösung des vorgelegten Systems mit $2n$ willkürlichen Constanten.

Lassen sich für jedes System (23.) zwei Integrale v_r, w_r erhalten, und bestimmt man die p und q aus den $2n$ Gleichungen

$$\psi_1(v_1, w_1) = 0, \quad \dots \quad \psi_n(v_n, w_n) = 0,$$
$$f_1 = 0, \quad \dots \quad f_n = 0$$

als Functionen von x, y, so stellt das System

$$z_1 = \int(p_1 dx + q_1 dy), \quad \dots \quad z_n = \int(p_n dx + q_n dy)$$

die allgemeine Lösung des Systems mit n willkürlichen Functionen dar.

Im Falle des *linearen* Systems

$$\begin{matrix} a_1^1 p_1 + \cdots + a_n^1 p_n + \alpha_1^1 q_1 + \cdots + \alpha_n^1 q_n = e_1, \\ \vdots \\ a_1^n p_1 + \cdots + a_n^n p_n + \alpha_1^n q_1 + \cdots + \alpha_n^n q_n = e_n, \end{matrix}$$

welches a. a. O. betrachtet ist, und worin die a, α und e Functionen von x, y, $z_1 \dots z_n$ bezeichnen, wird

$$\left(l\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = l_1 a_i^1 + \cdots + l_n a_i^n = (la_i),$$

$$\left(l\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) = l_1 \alpha_i^1 + \cdots + l_n \alpha_i^n = (l\alpha_i),$$

und die Verhältnisse der l werden durch die Gleichungen

$$\frac{(l\alpha_1)}{(la_1)} = \frac{(l\alpha_2)}{(la_2)} = \cdots = \frac{(l\alpha_n)}{(la_n)} = \mu$$

bestimmt, so dass die l ebenso wie μ blosse Functionen von x, y, $z_1 \ldots z_n$ werden; ferner ist

$$(la_k)p_k + (l\alpha_k)q_k = l_1 e_1 + \cdots + l_n e_n = (le),$$

oder

$$(la_k)\{p_k + \mu q_k\} = (le).$$

Multiplicirt man daher die n Gleichungen in der zweiten Zeile von (15.) der Reihe nach mit $(la_1) \ldots (la_n)$, so erhält man

$$(la_1)dz_1 + \cdots + (la_n)dz_n = (le)dx,$$

welche Gleichung zu Coefficienten ebenfalls Functionen hat, in deren Argumenten die Derivirten p und q nicht vorkommen. Man kann demnach in dem hier betrachteten Falle aus dem System (15.) das die Variablen x, y, $z_1 \ldots z_n$ allein enthaltende System

$$dy = \mu dx,$$

$$(la_1)dz_1 + \cdots + (la_n)dz_n = (le)$$

von zwei totalen Differentialgleichungen aussondern, welches mit den Gleichungen (10.) und (10^a.) § 1 a. a. O. übereinstimmt.

Die übrigen Gleichungen in (15.) dienen zur Bestimmung der p und q, sind aber unnöthig, da nach Integration der n Systeme, die aus dem vorstehenden hervorgehen, wenn man für μ die n Wurzeln der Gleichung $\varphi(\mu) = 0$ nimmt, die Functionen $z_1 \ldots z_n$ und somit auch ihre Derivirten als Functionen von x und y bestimmt werden.

Die Behandlung desjenigen Falles nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, in denen die Derivirten in den Verbindungen $p_r q_s - p_s q_r$ vorkommen, nach der hier befolgten Methode, führt unter den a. a. O. angegebenen Bedingungen zwischen den Coefficienten ebenfalls auf das dort aufgestellte System totaler Differentialgleichungen, das die Variablen x, y, $z_1 \ldots z_n$ allein enthält.

§ 2.

Nicht lineare partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Variablen.

In der öfters citirten Abhandlung ist die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Variablen unter Voraussetzung gewisser Integrabilitätsbedingungen angegeben. Wir wollen nun nach einer ähnlichen Methode, wie sie im vorhergehenden Abschnitte befolgt ist, auch die Integration einer *nicht linearen* partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen auf die Integration von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückführen, deren Integrabilität vorausgesetzt wird.

Es sei die zu integrirende Gleichung

$$f(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \dots\ p_1 \dots p_n,\ \dots\ q_1 \dots q_{n+1}) = 0,$$

wo $p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \dots\ p_1 \dots p_n,\ \dots\ q_1 \dots q_{n+1}$ bezüglich die Derivirten erster, zweiter, ... $(n-1)^{\text{ter}}$, n^{ter} Ordnung von z nach x und y bedeuten.

Die Aufgabe ist, n von f verschiedene Functionen $u_1, \dots u_n$ der Variablen $x,\ y,\ z,\ \dots\ q_1 \dots q_{n+1}$ von der Beschaffenheit zu finden, dass die aus den Gleichungen

$$(1.)\qquad f = 0,\quad u_1 = c_1,\quad \dots\quad u_n = c_n,$$

wo $c_1, \dots c_n$ Constanten bedeuten, bestimmten Grössen $q_1, \dots q_{n+1}$ als Functionen der Variablen $x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \dots\ p_1 \dots p_n$, die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} dp_1 = q_1 dx + q_2 dy,\quad dp_2 = q_2 dx + q_3 dy,\quad \dots\quad dp_n = q_n dx + q_{n+1} dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dp = r\,dx + s\,dy,\quad dq = s\,dx + t\,dy,\quad dz = p\,dx + q\,dy \end{cases}$$

integrabel machen.

Differentiirt man die Gleichung (1.) nach x und y und führt wieder die Symbole $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ zum Unterschiede von $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ ein, um anzudeuten, dass bei diesen Differentiationen $z, p, q, r, s, t, \dots p_1, \dots p_n$ als Functionen von x und y angesehen werden sollen, so erhält man

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial q_{n+1}}{\partial x} = -\frac{df}{dx}, \\ \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial q_{n+1}}{\partial y} = -\frac{df}{dy}. \end{cases}$$

Die Integrabilität der Gleichungen (2.) erfordert, dass

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial x},\quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial q_3}{\partial x},\quad \dots\quad \frac{\partial q_n}{\partial y} = \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x},$$

folglich

$$\begin{aligned}
dq_1 &= \frac{\partial q_1}{\partial x}dx + \frac{\partial q_2}{\partial x}dy,\\
dq_2 &= \frac{\partial q_2}{\partial x}dx + \frac{\partial q_3}{\partial x}dy = \frac{\partial q_1}{\partial y}dx + \frac{\partial q_2}{\partial y}dy,\\
&\vdots\\
dq_n &= \frac{\partial q_n}{\partial x}dx + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x}dy = \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}dx + \frac{\partial q_n}{\partial y}dy,\\
dq_{n+1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial q_n}{\partial y}dx + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial y}dy.
\end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich identisch

$$(4.)\quad \begin{cases} dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \cdots + \lambda_n dq_n = \frac{\partial q_1}{\partial x}dx + \frac{\partial q_2}{\partial x}(dy + \lambda_2 dx) \\ + \frac{\partial q_3}{\partial x}(\lambda_2 dy + \lambda_3 dx) + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial x}(\lambda_{n-1}dy + \lambda_n dx) + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial x}\lambda_n dy, \\ dq_2 + \lambda_2 dq_3 + \cdots + \lambda_n dq_{n+1} = \frac{\partial q_1}{\partial y}dx + \frac{\partial q_2}{\partial y}(dy + \lambda_2 dx) \\ + \frac{\partial q_3}{\partial y}(\lambda_2 dy + \lambda_3 dx) + \cdots + \frac{\partial q_n}{\partial y}(\lambda_{n-1}dy + \lambda_n dx) + \frac{\partial q_{n+1}}{\partial y}\lambda_n dy, \end{cases}$$

wo $\lambda_2, \dots \lambda_n$ noch zu bestimmende Functionen sind. Wir verfügen über dieselben nun in der Weise, dass die Gleichungen (3.) und (4.) unabhängig von den Derivirten $\frac{\partial q_1}{\partial x}, \dots \frac{\partial q_{n+1}}{\partial y}$ Folgen von einander sind, indem wir setzen:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{\frac{\partial f}{\partial q_1}} = \dfrac{dy + \lambda_2 dx}{\frac{\partial f}{\partial q_2}} = \dfrac{\lambda_2 dy + \lambda_3 dx}{\frac{\partial f}{\partial q_3}} = \cdots = \dfrac{\lambda_{n-1}dy + \lambda_n dx}{\frac{\partial f}{\partial q_n}} = \dfrac{\lambda_n dy}{\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}} \\ = \dfrac{dq_1 + \lambda_2 dq_2 + \cdots + \lambda_n dq_n}{-\frac{df}{dx}} = \dfrac{dq_2 + \lambda_2 dq_3 + \cdots + \lambda_n dq_{n+1}}{-\frac{df}{dy}}. \end{cases}$$

Hiernach erhalten wir zur Bestimmung der λ die Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} \lambda_2 + \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial q_2} : \frac{\partial f}{\partial q_1}, \\ \lambda_3 + \lambda_2 \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial q_3} : \frac{\partial f}{\partial q_1}, \\ \vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n-1}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial q_n} : \frac{\partial f}{\partial q_1}, \\ \lambda_n \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} : \frac{\partial f}{\partial q_1}. \end{cases}$$

Addiren wir diese Gleichungen, nachdem wir zuvor die erste mit $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}$, die zweite mit $-\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}$ u. s. f., die vorletzte mit $(-1)^{n-1}\frac{dy}{dx}$ und die letzte mit $(-1)^n$ multiplicirt haben, so erhalten wir für $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung n^{ten} Grades:

$$(6^a.)\qquad 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^n - \frac{\partial f}{\partial q_2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{dy}{dx} + (-1)^n\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}.$$

Die Wurzeln derselben seien $\mu_1 \dots \mu_n$, und das System der λ, welches der Wurzel μ_k entspricht, werde mit $\lambda_2^{(k)} \dots \lambda_n^{(k)}$ bezeichnet, so ergiebt sich aus (6.) leicht, dass $\lambda_2^{(k)}$ die Summe der Wurzeln μ mit Ausschluss von μ_k, $\lambda_3^{(k)}$ die Summe der Producte zu je zweien, $\lambda_4^{(k)}$ die Summe der Producte zu je dreien u. s. f. der Wurzeln $\mu_1 \dots \mu_{k-1}$, $\mu_{k+1} \dots \mu_n$ ist, oder auch, dass die Grössen $\lambda_2^{(k)} \dots \lambda_n^{(k)}$ durch die für jedes μ geltende Gleichung

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}\mu^n - \frac{\partial f}{\partial q_2}\mu^{n-1} + \cdots + (-1)^n\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\mu - \mu_k}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial q_1}\{\mu^{n-1} - \lambda_2^{(k)}\mu^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2}\lambda_{n-1}^{(k)}\mu + (-1)^{n-1}\lambda_n^{(k)}\}$$

definirt werden.

Man erhält so

$$\lambda_2^{(k)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial q_2} - \mu_k\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}},\qquad \lambda_3^{(k)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial q_3} - \mu_k\frac{\partial f}{\partial q_2} + \mu_k^2\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}},\quad \text{u. s. f.}$$

Sind die λ auf die angegebene Weise als Functionen von μ_k bestimmt, so liefern die Gleichungen (5.) die folgenden n Systeme von je drei totalen Differentialgleichungen:

$$(7.)\qquad \begin{cases} dy = \mu_k dx, \\ \frac{\partial f}{\partial q_1}(dq_1 + \lambda_2^{(k)}dq_2 + \cdots + \lambda_n^{(k)}dq_n) = -\frac{df}{dx}dx, \\ \frac{\partial f}{\partial q_1}(dq_2 + \lambda_2^{(k)}dq_3 + \cdots + \lambda_n^{(k)}dq_{n+1}) = -\frac{df}{dy}dx. \end{cases}\qquad (k=1, 2, \dots n)$$

Ist f von z und den Derivirten niederer als der n^{ten} Ordnung frei, so dass $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}$, dann enthält jedes System drei Gleichungen zwischen den $n+3$ Variablen x, y, $q_1 \dots q_{n+1}$. Im anderen Falle sind in jedem der Systeme zu den Gleichungen (7.) noch die Gleichungen (2.) hinzuzufügen. Wir beweisen nun folgenden Satz:

Es lasse sich jedem der Systeme (7.), nöthigen Falls mit Hinzuziehung der Gleichungen (2.), durch je ein Integral $u_k = c_k$ genügen, und es mögen sich aus den Gleichungen

$$f = 0, \quad u_1 = c_1, \quad \ldots \quad u_n = c_n$$

$q_1 \ldots q_{n+1}$ als solche Functionen von $x, y, p, q, r, s, t, \ldots p_1 \ldots p_n$ ergeben, dass das Gleichungssystem (2.) integrabel wird. Durch die Integration desselben, welche $\frac{n(n+1)}{2}$ neue Constanten zuführt, erhält man das vollständige Integral der Gleichung (1.) mit $\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$ Constanten. Kennt man von jedem der Systeme (7.) ausser $u_k = \text{const.}$ noch ein zweites von u_k und f unabhängiges Integral $u'_k = \text{const.}$, so erhält man das allgemeine Integral der Gleichungen (1.) mit n willkürlichen Functionen, wenn man aus dem Systeme

$$f = 0, \quad \varphi_1(u_1, u'_1) = 0, \quad \varphi_2(u_2, u'_2) = 0, \quad \ldots \quad \varphi_n(u_n, u'_n) = 0,$$

wo $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ willkürliche Functionen bedeuten, $q_1 \ldots q_{n+1}$ als Functionen von x, y, z und den Derivirten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt und wie oben bei der weiteren Integration verfährt.

Beweis: Der Voraussetzung nach muss, wenn mit u eine der Functionen u_k, u'_k oder $\varphi(u_k, u'_k)$ bezeichnet wird, die Gleichung

$$du = 0$$

eine identische Folge der Gleichungen (7.) und (2.) sein. Setzt man nun in du für die Differentiale der Function z und ihrer partiellen Derivirten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. ihre Ausdrücke in dx und dy, so erhält man

$$(8.) \qquad \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \cdots + \frac{\partial u}{\partial q_1}dq_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}dq_{n+1} = 0,$$

wo

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p + \frac{\partial u}{\partial p}r + \frac{\partial u}{\partial q}s + \cdots + \frac{\partial u}{\partial p_1}q_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial p_n}q_n,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q + \frac{\partial u}{\partial p}s + \frac{\partial u}{\partial q}t + \cdots + \frac{\partial u}{\partial p_1}q_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial p_n}q_{n+1}$$

ist. Die Gleichung (8.) muss nunmehr eine identische Folge der Gleichungen (7.) allein sein; folglich lassen sich drei Functionen M, N, P, bestimmen von der Beschaffenheit, dass identisch

$$\frac{du}{dx} = -M\mu_k + N\frac{df}{dx} + P\frac{df}{dy},$$

$$\frac{du}{dy} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial q_1} = N\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial q_i} = (N\lambda_i^{(k)} + P\lambda_{i-1}^{(k)})\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial q_{n+1}} = P\lambda_n^{(k)}\frac{\partial f}{\partial q_1}.$$

Durch Elimination von M, N, P erhält man folgendes System von simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen für u

$$(9.)\quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dx}+\mu_k\frac{du}{dy}\right)\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{df}{dx}\frac{\partial u}{\partial q_1}+\frac{df}{dy}\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{1}{\lambda_n^{(k)}}, \\ \frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\lambda_i^{(k)}+\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\lambda_{i-1}^{(k)}}{\lambda_n^{(k)}}. \end{cases} \quad \left(\begin{smallmatrix} i=2,3\dots n \\ \lambda_1^{(k)}=1 \end{smallmatrix}\right)$$

Die erste Gleichung kann, da

$$\lambda_n^{(k)}\mu_k = \mu_1\dots\mu_n = \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}:\frac{\partial f}{\partial q_1}$$

ist, geschrieben werden

$$(10.)\quad \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\frac{du}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}+\lambda_n^{(k)}\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{du}{dx}-\frac{df}{dx}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) = 0.$$

Die übrigen Gleichungen in (9.) sind der Ausdruck für die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichung

$$(11.)\quad 0 = \frac{\partial u}{\partial q_1}\mu^n-\frac{\partial u}{\partial q_2}\mu^{n-1}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{\partial u}{\partial q_n}\mu+(-1)^n\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}$$

mit der Gleichung

$$(12.)\quad 0 = \frac{\partial f}{\partial q_1}\mu^n-\frac{\partial f}{\partial q_2}\mu^{n-1}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{\partial f}{\partial q_n}\mu+(-1)^n\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}$$

alle Wurzeln $\mu_1\dots\mu_n$ mit Ausschluss von μ_k gemein habe. Denn wenn ν die Wurzel der Gleichung (11.) bezeichnet, die sie mit der Gleichung (12.) nicht gemein hat, so ist $\lambda_i^{(k)}+\lambda_{i-1}^{(k)}\nu$ nach der Definition der $\lambda^{(k)}$ die Summe der Producte aller Wurzeln der Gleichung (11.) zu je $i-1$, wo $\lambda_{n+1}^{(k)}=0$ zu setzen ist, folglich

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial q_1}(\lambda_i^{(k)}+\lambda_{i-1}^{(k)}\nu),$$

für $i=2, 3, \dots n$ und

$$\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\lambda_n^{(k)}\nu.$$

Substituirt man den aus der letzten Gleichung sich ergebenden Werth von ν in die $n-1$ ersten, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial q_1}\lambda_i^{(k)}+\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\lambda_{i-1}^{(k)}}{\lambda_n^{(k)}}, \quad (i=2,3,\dots n)$$

welche Gleichungen mit den $n-1$ letzten Gleichungen in (9.) überein-

stimmen. Die Bedingung aber, dass die Gleichungen (11.) und (12.) $n-1$ Wurzeln ausser μ_k gemeinsam haben, führt uns in Verbindung mit (10.) unmittelbar zu einer anderen Form für das simultane System linearer partieller Differentialgleichungen für u.

Denn bildet man aus ihnen zwei Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, indem man einmal μ^n dann μ^0 eliminirt, die letzterhaltene Gleichung durch μ dividirt, so müssen die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\mu^{n-1}-\left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\mu^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)=0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\mu^{n-1}-\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_2}-\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\mu^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)=0$$

dieselben $n-1$ Wurzeln gemeinsam haben, also die Coefficienten in beiden Gleichungen proportional sein, was die Relationen ergiebt

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_2}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_2}-\dfrac{\partial u}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_3}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_3}}=\cdots$$
$$\cdots=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_n}-\dfrac{\partial u}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}.$$

Beachtet man noch, dass $\lambda_n^{(k)}$ das Product aller Wurzeln obiger Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, also

$$\lambda_n^{(k)}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}},$$

und dass nach (10.)

$$\lambda_n^{(k)}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{df}{dy}-\dfrac{du}{dy}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{du}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial q_1}-\dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{df}{dx}},$$

so lässt sich das System (9.) von n simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen für u, das dem System (7.) totaler Differentialgleichungen äquivalent ist, in der Form schreiben

$$(13.)\quad \begin{cases} \lambda_n^{(k)} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_2}} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_2} - \dfrac{\partial u}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_3}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_3}} = \cdots \\ \cdots = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_n} - \dfrac{\partial u}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{df}{dy} - \dfrac{du}{dy}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\dfrac{du}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{df}{dx}}. \end{cases}$$

Nun erhält man durch Differentiation von $f=0$ und $u=\text{const.}$ nach x

$$\frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\frac{dq_{n+1}}{dx} = 0,$$
$$\frac{du}{dx} + \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{dq_{n+1}}{dx} = 0,$$

und hieraus durch Elimination von $\dfrac{dq_1}{dx}$

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{df}{dx} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_2}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_2}\right)\dfrac{dq_2}{dx} + \cdots \\ \qquad \cdots + \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\dfrac{dq_{n+1}}{dx} = 0. \end{cases}$$

In gleicher Weise ergiebt die Differentiation nach y von $f=0$ und $u=c$ und Elimination von $\dfrac{\partial q_{n+1}}{\partial y}$

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{df}{dy} - \dfrac{du}{dy}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\dfrac{dq_1}{dy} + \cdots \\ \qquad \cdots + \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_n} - \dfrac{\partial u}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\dfrac{dq_n}{dy} = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichung (14.) mit λ_n^k und zieht dann Gleichung (15.) ab, so erhält man mit Berücksichtigung von (13.)

$$(16.)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} - \dfrac{\partial u}{\partial q_1}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\left(\dfrac{dq_2}{dx} - \dfrac{dq_1}{dy}\right) + \cdots \\ \cdots + \left(\dfrac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_n} - \dfrac{\partial u}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\left(\dfrac{dq_{n+1}}{dx} - \dfrac{dq_n}{dy}\right) = 0. \end{cases}$$

In dieser Gleichung ist unter u ein dem System (7.) totaler Differentialgleichungen oder dem äquivalenten System (13.), welches zur Wurzel μ_k gehört, genügendes Integral zu verstehen; da aber die Gleichung (16.) die gewählte Wurzel μ_k nicht enthält, so gilt sie für $u = u_1 \dots u_n$ (oder allgemeiner für $u = \varphi_1(u_1, u_1'), \dots\ u = \varphi_n(u_n, u_n')$). Die Determinante des Systems, welches man erhält, wenn man in (16.) der Reihe nach $u_1 \dots u_n$ substituirt,

stimmen. Die Bedingung aber, dass die Gleichungen (11.) und (12.) $n-1$ Wurzeln ausser μ_k gemeinsam haben, führt uns in Verbindung mit (10.) unmittelbar zu einer anderen Form für das simultane System linearer partieller Differentialgleichungen für u.

Denn bildet man aus ihnen zwei Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, indem man einmal μ^n dann μ^0 eliminirt, die letzterhaltene Gleichung durch μ dividirt, so müssen die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\mu^{n-1}-\left(\frac{\partial u}{\partial q_3}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\mu^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\mu^{n-1}-\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_2}-\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)\mu^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)=0$$

dieselben $n-1$ Wurzeln gemeinsam haben, also die Coefficienten in beiden Gleichungen proportional sein, was die Relationen ergiebt

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_2}-\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\frac{\partial u}{\partial q_3}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_3}}=\cdots$$
$$\cdots=\frac{\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}.$$

Beachtet man noch, dass $\lambda_n^{(k)}$ das Product aller Wurzeln obiger Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, also

$$\lambda_n^{(k)}=\frac{\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}},$$

und dass nach (10.)

$$\lambda_n^{(k)}=\frac{\frac{\partial u}{\partial q_{n+1}}\frac{df}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}}{\frac{du}{dx}\frac{\partial f}{\partial q_1}-\frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{df}{dx}},$$

so lässt sich das System (9.) von n simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen für u, das dem System (7.) totaler Differentialgleichungen äquivalent ist, in der Form schreiben

[illegible]

[illegible]

[illegible] en
[illegible] er

[illegible]
[illegible]

[illegible]
[illegible]

[illegible]

und $\frac{dq_2}{dx}-\frac{dq_1}{dy}, \ldots \frac{dq_{n+1}}{dx}-\frac{dq_n}{dy}$ als Unbekannte betrachtet, ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}\right)^{n-1} \Sigma \pm \frac{\partial u_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial q_n} \frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}.$$

Der Fall, dass $\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} = 0$ ist, sei einstweilen ausgeschlossen. Der andere Factor ist die Functionaldeterminante der Functionen $u_1 \ldots u_n$, f in Beziehung auf $q_1 \ldots q_{n+1}$ als unabhängige Variablen; ihr Verschwinden würde anzeigen, dass zwischen diesen Functionen eine von $q_1 \ldots q_{n+1}$ freie Relation existirte, folglich aus den Gleichungen

$$u_1 = c_1, \quad \ldots \quad u_n = c_n, \quad f = 0,$$

nicht $q_1 \ldots q_{n+1}$ als Functionen der übrigen Variablen bestimmt werden könnten — gegen die Voraussetzung. Da sonach obige Determinante nicht verschwindet, so muss einzeln

$$\frac{dq_2}{dx}-\frac{dq_1}{dy} = 0, \quad \ldots \quad \frac{dq_{n+1}}{dx}-\frac{dq_n}{dy} = 0$$

sein, folglich sind die Gleichungen

$$dp_1 = q_1 dx + q_2 dy, \quad \ldots \quad dp_n = q_n dx + q_{n+1} dy$$

integrabel, mithin

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{dp_1}{dy}, \quad \ldots \quad \frac{dp_n}{dx} = \frac{dp_{n-1}}{dy}.$$

Sind nun $\pi_1 \ldots \pi_{n-1}$ die Derivirten $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von z, so sind ebenso die Gleichungen

$$d\pi_1 = p_1 dx + p_2 dy, \quad \ldots \quad d\pi_{n-1} = p_{n-1} dx + p_n dy$$

integrabel, und so ergiebt sich, dass das System (2.) integrabel ist, was zu erweisen war.

Wir bemerken noch, dass, wenn man in dem Gleichungssystem (13.) $\lambda_n^{(k)}$ fortlässt, man statt der n Systeme linearer partieller Differentialgleichungen ein einziges, von k unabhängiges System von $n-1$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zweiten Grades für u erhält, welchem sämmtliche u genügen müssen. Das äquivalente System totaler Differentialgleichungen erhält man aus (7.), indem man durch Wegschaffung der Wurzelgrössen μ_k die ihnen entsprechenden n Systeme in ein einziges vereinigt, welches dann aus drei Gleichungen vom n^{ten} Grade in Beziehung auf die Differentiale dx, dy, dq_1, $\ldots$ dq_{n+1} besteht. Die erste Gleichung wird offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dy^n - \frac{\partial f}{\partial q_2}dy^{n-1}dx + \cdots + (-1)^n\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}dx^n = 0;$$

die beiden anderen ergeben sich, indem man für $\lambda_2^{(k)} \dots \lambda_n^{(k)}$ ihre Ausdrücke durch μ_k substituirt, μ_k durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzt. In dem Falle $n = 2$, ist

$$q_1 = r, \quad q_2 = s, \quad q_3 = t;$$

μ_k ist Wurzel der Gleichung

$$(17.) \qquad \frac{\partial f}{\partial r}\mu^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\mu + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

und

$$\lambda_2^{(k)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial s} - \mu_k \frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial r}}.$$

Nach (7.) lauten also die beiden Systeme totaler Differentialgleichungen ersten Grades, auf deren Integration die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

zurückgeführt ist,

$$(18.) \quad \begin{cases} dy = \mu_k dx, \\ \frac{\partial f}{\partial r}dr + \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \mu_k\frac{\partial f}{\partial r}\right)ds = -\frac{df}{dx}dx, \\ \frac{\partial f}{\partial r}ds + \left(\frac{\partial f}{\partial s} - \mu_k\frac{\partial f}{\partial r}\right)dt = -\frac{df}{dy}dy, \end{cases} \qquad (k=1,\ 2)$$

mit Hinzufügung der Differentialgleichungen

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy, \quad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Die beiden Systeme (18.) ersten Grades lassen sich nun nach dem Obigen durch Wegschaffung der Wurzeln μ_k in ein einziges vereinigen, welches drei Gleichungen vom zweiten Grade in Beziehung auf die Differentiale dx, dy, dr, ds, dt enthält.

Substituirt man nämlich der Reihe nach in (17.) und den beiden letzten Gleichungen (18.) $\frac{dy}{dx}$ für μ_k, so ergiebt sich:

$$(19.) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dx} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{ds}{dx} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{ds}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dx} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial r}\frac{ds}{dx} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{dt}{dx} - \frac{\partial f}{\partial r}\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dy} = 0, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial p}r+\frac{\partial f}{\partial q}s = \frac{df}{dx},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial p}s+\frac{\partial f}{\partial q}t = \frac{df}{dy}$$

gesetzt ist.

Die Gleichungen (19.) in Verbindung mit den Gleichungen

$$\frac{dz}{dx}=p+q\frac{dy}{dx},\quad \frac{dp}{dx}=r+s\frac{dy}{dx},\quad \frac{dq}{dx}=s+t\frac{dy}{dx}$$

sind von Herrn *Darboux**) unseres Wissens zuerst aufgestellt worden, und zwar ist er zu denselben durch die Methode der Vertauschung der Variablen gelangt. Das äquivalente System simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für u, wenn u irgend ein Integral des Systems totaler Differentialgleichungen bedeutet, lautet nach (13.)

$$(20.)\quad \frac{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}\frac{df}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{du}{dx}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{\partial u}{\partial r}\frac{df}{dx}},$$

und löst sich in zwei lineare Systeme auf, wenn man jeden der drei gleichen Ausdrücke gleich

$$\lambda_2^{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial s}-\mu_k\frac{\partial f}{\partial r}\right):\frac{\partial f}{\partial r}$$

setzt und dem Index k der Reihe nach die Werthe 1, 2 beilegt.

Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial r}\mu^2-\frac{\partial f}{\partial s}\mu+\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial r}\mu^2-\frac{\partial u}{\partial s}\mu+\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

haben eine Wurzel gemeinsam.

Je nach der gemeinsamen Wurzel zerfallen die u in zwei Klassen, und zur vollständigen Lösung der vorgelegten Differentialgleichung reicht es hin, eine Gleichung $u=0$ von jeder Klasse zu haben, die eine willkürliche Function enthält. Man erkennt hierin, sowie in dem Umstande, dass u gleichzeitig zwei homogenen partiellen Differentialgleichungen erster

*) *Darboux,* Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. Ann. de l'Ec. Norm. VII 163—173.

Ordnung und zweiten Grades genügen muss, die Bestätigung eines Satzes, den Herr *Darboux* l. c. ausgesprochen hat.

Wenn $n=1$, d. h. für den Fall einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ist $q_1=p$, $q_2=q$, und die Gleichungen (13.) gehen in die zwei Gleichungen über

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}}{\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial q}\frac{df}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}}{\frac{du}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{df}{dx}},$$

woraus $\lambda_1^{(k)}=1$ und die bekannte lineare partielle Differentialgleichung für u

$$\frac{du}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{du}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial u}{\partial p}\frac{df}{dx}-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{df}{dy} = 0$$

hervorgeht, welche, mit Hinzufügung der Gleichung $dz=p\,dx+q\,dy$, dem System der totalen Differentialgleichungen

$$dx:dy:dz:dp:dq = \frac{\partial f}{\partial p}:\frac{\partial f}{\partial q}:p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}:-\frac{df}{dx}:-\frac{df}{dy} = 0$$

äquivalent ist, wo

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p,\quad \frac{df}{dy}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q$$

zu setzen ist.

Zum Schluss behandeln wir noch den ausgeschlossenen Fall, dass $\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}}=0$ ist.

Wir müssen hierfür auf die Gleichungen (6.) zurückgehen; die letzte derselben zeigt, dass dann entweder $\frac{dy}{dx}=0$ oder $\lambda_n=0$ ist. Die Gleichung (6^a^.) ergiebt in der That einen Wurzelwerth Null, und zwar sei $\mu_1=0$; dann sind nach (6.) die diesem Wurzelwerth zugehörigen Werthe für λ

$$\lambda_2^{(1)}=\frac{\partial f}{\partial q_2}:\frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \dots\quad \lambda_n^{(1)}=\frac{\partial f}{\partial q_n}:\frac{\partial f}{\partial q_1},$$

und dasjenige der Gleichungssysteme (7.), welches diesem Wurzelwerth entspricht, lautet demnach

$$(21.)\quad \begin{cases} dy=0, & \frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n \;\;= -\frac{df}{dx}dx, \\ & \frac{\partial f}{\partial q_1}dq_2+\frac{\partial f}{\partial q_2}dq_3+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_n}dq_{n+1} = -\frac{df}{dy}dx. \end{cases}$$

Das simultane System (13.), welches diesem entspricht, wenn man $k=1$ setzt, enthält in der That unter den Quotienten, die $\lambda_n^{(1)}$ gleich gesetzt sind,

einen, der in Folge von $\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} = 0$ den Werth $\frac{\partial f}{\partial q_n} : \frac{\partial f}{\partial q_1}$ erhält. Die übrigen Werthe μ_k sind Wurzeln der Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$(22.)\qquad \frac{\partial f}{\partial q_1}\mu^{n-1} - \frac{\partial f}{\partial q_2}\mu^{n-2} + \cdots \pm \frac{\partial f}{\partial q_{n-1}}\mu \mp \frac{\partial f}{\partial q_n} = 0$$

und $\lambda_n^{(k)} = 0$ für $k = 2, 3, \ldots n$.

Das $\mu = \mu_k$ zugehörige System wird

$$(23.)\qquad \begin{cases} dy = \mu_k dx, \\ \frac{\partial f}{\partial q_1}(dq_1 + \lambda_2^{(k)} dq_2 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(k)} dq_{n-1}) = -\frac{df}{dx}dx, \\ \frac{\partial f}{\partial q_2}(dq_2 + \lambda_2^{(k)} dq_3 + \cdots + \lambda_{n-1}^{(k)} dq_n) = -\frac{df}{dy}dy. \end{cases}$$

Wie sich aus (6.) ergiebt, hängen, da jetzt $\lambda_n^{(k)} = 0$ ist, die $\lambda_2^{(k)} \cdots \lambda_{n-1}^{(k)}$ mit den Wurzeln μ der Gleichung (22.) in derselben Weise zusammen, wie im allgemeinen Falle die $\lambda_2^{(k)} \ldots \lambda_n^{(k)}$ mit den Wurzeln der Gleichung (6^a.). Da in unserem Falle ferner das Gleichungssystem (23.) von der Variablen q_{n+1} gänzlich frei ist, wird das Integral desselben $u_k = c_k$ $(k = 2, \ldots n)$ auch von q_{n+1} frei sein. Die Zähler in den Quotienten des Systems (13.) werden also sämmtlich Null, was mit $\lambda_n^{(k)} = 0$ übereinstimmt.

Vermöge der Bemerkung über den Zusammenhang der $\lambda^{(k)}$ mit den μ_k ersieht man, dass sich an den $n-1$ Systemen (23.) dieselben Betrachtungen wie an den n Systemen (7.) anstellen lassen, und dass demgemäss die ersteren Systeme sich durch die $n-1$ Systeme linearer partieller Differentialgleichungen für u

$$\lambda_{n-1}^{(k)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_n}}{\frac{\partial u}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}} = \cdots = \frac{\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_{n-1}} - \frac{\partial u}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial f}{\partial q_n}}{\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_n}}$$
$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{df}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{\partial f}{\partial q_n}}{\frac{du}{dx}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{df}{dx}}, \qquad (k=2, 3, \ldots n)$$

wo u wie f von q_{n+1} frei ist, ersetzen lassen. Man schliesst daraus weiter, wie oben, dass

$$(24.)\qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)\left(\frac{dq_2}{dx} - \frac{dq_1}{dy}\right) + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_{n-1}} - \frac{\partial u}{\partial q_{n-1}}\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)\left(\frac{dq_n}{dx} - \frac{dq_{n-1}}{dy}\right) = 0 \end{cases}$$

ist. Diese Gleichung, die vom Index k unabhängig ist, gilt für $u = u_2 \dots u_n$. Die Determinante des Systems, welches aus (24.) hervorgeht, wenn man $u = u_2 \dots u_n$ setzt und $\frac{dq_2}{dx} - \frac{dq_1}{dy}, \dots \frac{dq_n}{dx} - \frac{dq_{n-1}}{dy}$ als Unbekannte betrachtet, ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)^{n-2} \Sigma \pm \frac{\partial u_2}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial u_n}{dq_{n-1}} \frac{\partial f}{\partial q_n}.$$

Der Factor $\frac{\partial f}{\partial q_n}$ kann nicht verschwinden, weil sonst die Gleichung (6^a.) gegen die Voraussetzung zwei gleiche Wurzeln $\mu = 0$ haben würde, und das Verschwinden der Functionaldeterminante würde zur Folge haben, dass zwischen $u_2 \dots u_n$ und f eine von $q_1 \dots q_n$ und, da die u und f q_{n+1} nicht enthalten, auch von q_{n+1} freie Relation existirte, was ebenfalls ausgeschlossen ist. Da mithin die Determinante des betrachteten Systems nicht verschwindet, so folgt, dass

$$\frac{dq_2}{dx} = \frac{dq_1}{dy}, \quad \dots \quad \frac{dq_n}{dx} = \frac{dq_{n-1}}{dy}$$

ist. Es erübrigt noch zu zeigen, dass $\frac{dq_{n+1}}{dx} = \frac{dq_n}{dy}$ ist. Hierzu betrachten wir das abgesonderte, der Wurzel $\mu = 0$ entsprechende System der Gleichungen (21.). Ein Integral derselben sei $u_1 = c_1$, welches q_{n+1} enthält, so genügt u_1 einem System simultaner linearer partieller Differentialgleichungen, welches wir aus (13.) erhalten, wenn wir $\frac{\partial f}{\partial q_{n+1}} = 0$ und $\lambda_n^{(k)} = \lambda_n^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial q_n} : \frac{\partial f}{\partial q_1}$ (s. S. 211) setzen, nämlich:

$$(25.) \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial q_n}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}} = \cdots = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial f}{\partial q_{n-1}}}{\frac{\partial u_1}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_n}} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}} \frac{df}{dy}}{\frac{du_1}{dx}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{df}{dx}}.$$

Nun giebt aber die Differentiation von $f = 0$ und $u_1 = \text{const.}$ nach x

$$\frac{df}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}\frac{dq_{n+1}}{dx} = 0,$$

und die Elimination von $\frac{dq_1}{dx}$:

$$(26.) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dx}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{df}{dx} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\frac{dq_2}{dx} + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial q_1} - \frac{\partial u_1}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial q_n}\right)\frac{dq_n}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_{n+1}}{dx} = 0. \end{cases}$$

Die Differentiation von $f=0$ nach y giebt ferner:

$$(27.)\qquad \frac{df}{dy}+\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dy}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dy} = 0.$$

Multiplicirt man (26.) mit $\frac{\partial f}{\partial q_n}:\frac{\partial f}{\partial q_1}$ und (27.) mit $\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}$ und zieht ab, so erhält man in Berücksichtigung von (25.)

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(\frac{dq_2}{dx}-\frac{dq_1}{dy}\right)+\cdots+\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_{n-1}}\left(\frac{dq_n}{dx}-\frac{dq_{n-1}}{dy}\right)$$
$$+\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}\frac{\partial f}{\partial q_n}\left(\frac{dq_{n+1}}{dx}-\frac{dq_n}{dy}\right) = 0.$$

Wie vorhin bewiesen, ist

$$\frac{dq_2}{dx}-\frac{dq_1}{dy}=0,\quad \ldots\quad \frac{dq_n}{dx}-\frac{dq_{n-1}}{dy}=0,$$

und da ferner nach unserer Voraussetzung weder $\frac{\partial u_1}{\partial q_{n+1}}$ noch $\frac{\partial f}{\partial q_n}$ verschwindet, so muss $\frac{dq_{n+1}}{dx}=\frac{dq_n}{dy}$ sein.

Berlin, im Januar 1882.

Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Die *Kummer*sche Fläche vierter Ordnung und Klasse mit sechzehn singulären Punkten und Ebenen ist in ihrer Eigenschaft als Singularitätenfläche des allgemeinen Complexes zweiten Grades analytisch von Herrn *F. Klein**) ausführlich untersucht worden. Nachdem auf synthetischem Wege durch Herrn *Reye***) diese Fläche mit dem Systeme der Doppeltangenten construirt ist, liegt es nahe, hieran anschliessend die Construction des Complexes zweiten Grades zu versuchen. Es gelingt dies, indem wir die Lagen der zwölf Strahlen der sechs Fundamentalcomplexe betrachten, welche in einer Ebene liegen oder durch einen Punkt gehen.

Hierzu sind einige Hülfssätze erforderlich, welche sich auf Flächenbüschel zweiten Grades beziehen und von Herrn *Harnack* bereits dargestellt worden sind. Die synthetische Behandlung derselben ist sehr einfach und soll desshalb vorangeschickt werden. Die Beweise mancher Sätze sind im weiteren Verlaufe der Betrachtungen der Kürze halber oft nur angedeutet, aber haben keine besonderen Schwierigkeiten.

§ 1.

1. Es seien gegeben eine Raumcurve dritter Ordnung α_3, eine Sehne derselben a und eine Fläche zweiter Ordnung F_2, welche die ersteren enthält. Die Secanten von α_3, welche auf F_2 liegen, schneiden α_3 in den Punktepaaren einer Involution. Durch den *einen* Punkt eines Paares legen wir eine Gerade der zweiten Schaar von F_2 und bestimmen ihren Schnitt-

---

*) *Klein,* zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. Bd. 2, S. 198.

**) *Reye,* dieses Journal Bd. 86, S. 97.

punkt mit a; durch den *anderen* Punkt legen wir eine Gerade, die einer zweiten durch a und α_3 gehenden Fläche F_2' angehört und nicht Secante von α_3 ist, und bestimmen ebenfalls ihren Schnittpunkt mit a. Es entstehen so auf a zwei projective Punktreihen, welche in Involution stehen, denn ein Paar ist stets das Schnittpunktepaar von α_3 mit a.

2. Auf einer Regelschaar zweiten Grades seien gegeben zwei Strahlen a und b und zwei Raumcurven dritter Ordnung α_3 und β_3, welche diese Strahlen zu Secanten haben. Die beiden Raumcurven haben vier gemeinschaftliche Punkte, durch welche die Strahlen c, d, e, f der Regelschaar gehen mögen. Letztere treffen α_3 resp. β_3 zum zweiten Male in je vier Punkten, welche entsprechende Punkte projectiver Punktreihen auf α_3 und β_3 sind. Die Geraden a und b werden durch die Strahlen c', d', e', f', welche der anderen Schaar angehören und durch dieselben vier Punkte gehen, projectiv auf einander bezogen.

3. Es sei C_4 die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung; N_1, N_2, N_3, N_4 seien die Ecken des gemeinsamen Polartetraeders. $\overline{N_1N_2}$ und $\overline{N_3N_4}$ sind reciproke Polaren für alle F_2. Je zwei Punkte A und A' von C_4, deren Verbindungsgerade diese reciproken Polaren schneidet, sind durch dieselben harmonisch von einander getrennt. Je zwei Strahlen einer Regelschaar von F_2, welche durch $\overline{N_1N_2}$ und $\overline{N_3N_4}$ harmonisch getrennt liegen, sind die Paare einer Involution. Diese Paare enthalten die Punkte A resp. A'. Jede Secante oder Tangente von C_4 projicirt die Punktepaare A, A' durch einen involutorischen Ebenenbüschel. Die Kegel N_1 und N_2 und ebenso N_3 und N_4 des Flächenbüschels können zur Construction der Punktepaare A, A' dienen. Ist B ein beliebiger Punkt von C_4, so treffen die Geraden $\overline{BN_1}$ und $\overline{BN_2}$ oder $\overline{BN_3}$ und $\overline{BN_4}$ die C_4 zum zweiten Male in einem Punktepaare A, A'.

In dem Büschel der F_2 bestimmen wir jetzt eine Involution, in welcher die Kegel N_1 und N_2 ein Paar, die Kegel N_3 und N_4 ein anderes bilden. Eine Tangente von C_4 an dem beliebigen Punkte B ist der Träger eines involutorischen Ebenenbüschels, dessen Paare Tangentialebenen an den Paaren des Flächenbüschels sind. Zwei der Paare des Ebenenbüschels welche von den Kegeln N_1 und N_2 sowie von den Kegeln N_3 und N_4 herrühren, gehen durch Punktepaare A, A' von C_4. Die Paare des involutorischen Ebenenbüschels projiciren demnach die Punktepaare A, A'. *Jede*

*der Ordnungsflächen der betrachteten Involution hat die Eigenschaft, dass je zwei ihrer Erzeugenden verschiedener Schaaren, welche in einem beliebigen Punkte von C_4 zusammentreffen, diese zum zweiten Male in einem Punktepaare A, A' schneiden**). Da drei Involutionen durch verschiedene Anordnungen der Punkte N möglich sind, so erhält man drei Gruppirungen von je zwei Punkten auf C_4 und sechs Flächen des Büschels, welche paarweise als Ordnungsflächen zu derselben Gruppirung gehören. Die zu einem Punkte von C_4 in den drei Involutionen gehörenden Punkte bilden mit dem ersten eine *Quadrupelanordnung* auf C_4. Je zwei Punkte eines Quadrupels bilden ein Punktepaar für eine Involution. Die zu einer Fläche F_2 gehörenden drei Flächen des Büschels liefern mit der ersten eine *Quadrupelanordnung*. Je zwei Flächen eines Quadrupels sind ein Paar einer der drei Involutionen.

4. Hat die Grundcurve C_4 einen wirklichen Doppelpunkt D, so vereinigen sich in ihm zwei Punkte N. Von den drei Involutionen bleibt nur *eine* eigentliche übrig, von welcher der Kegel D ein Ordnungselement ist. Das andere ist eine Fläche F_2, welche durch die Kegel N_3 und N_4 von D harmonisch getrennt ist.

5. Sechs Punkte A, B, C, D, E, F einer allgemeinen C_4 mögen so liegen, dass sie von einem Punkte U von C_4 durch sechs Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung projicirt werden. Es soll bewiesen werden, dass die den sechs Punkten in einer der Involutionen zugeordneten $A', B', C', \dots F'$ von U ebenfalls durch Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung projicirt werden.

Es ist

$$\overline{UA}(C,\ D,\ E,\ F) \;\overline{\wedge}\; \overline{UB}(C,\ D,\ E,\ F),$$

ferner nach 3.
$$\overline{UA}(C',\ D',\ E',\ F') \;\overline{\wedge}\; \overline{UA}(C,\ D,\ E,\ F),$$
$$\overline{UB}(C',\ D',\ E',\ F') \;\overline{\wedge}\; \overline{UB}(C,\ D,\ E,\ F).$$

Daher folgt:
$$\overline{UA}(C',\ D',\ E',\ F') \;\overline{\wedge}\; \overline{UB}(C',\ D',\ E',\ F').$$

Die Strahlen $U(A, B, C', D', E', F')$ liegen auf einem Kegel und desshalb sind die Strahlen $U(A', B, C', D, E, F)$ und schliesslich $U(A', B', C', D', E', F')$ sechs Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung. Sind U', U'', U''' die drei mit U ein Quadrupel bildenden Punkte auf C_4, so folgt nun auch, dass

---

*) Vgl. *Harnack*, Math. Ann. Bd. 12 S. 47.

$U'(A, B, C, D, E, F)$, $U''(A, \dots F)$ und $U'''(A, \dots F)$ je sechs Strahlen eines Kegels zweiten Grades sind. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Kernfläche des Gebüsches mit den sechs Grundpunkten $A, B, \dots F$ wird von jeder durch diese Punkte gelegten C_4 in vier Punkten geschnitten, welche auf C_4 ein Quadrupel bilden.

§ 2.

6. Wir denken uns die sechs Strahlensysteme zweiter Ordnung und Klasse, welche dieselbe *Kummer*sche Fläche zur Brennfläche haben, auf dem von Herrn *Reye* eingeschlagenen Wege construirt*); die wichtigsten Sätze sind folgende:

Ein F_2-Gebüsch mit sechs Grundpunkten 1, 2, ... 6 ist projectiv auf ein räumliches System Σ_1 bezogen, so dass jeder Fläche eine Ebene von Σ_1 entspricht und jedem seiner F_2-Büschel ein zu demselben projectiver Ebenenbüschel erster Ordnung von Σ_1. Die Punkte der cubischen Raumcurve k_3, welche die sechs Punkte 1, ... 6 verbindet, sind associirte Punkte des F_2-Gebüsches und entsprechen alle einem und demselben Punkte (0) des Raumes Σ_1. Das Sehnensystem von k_3 ist auf den Strahlenbündel (0) projectiv bezogen und zwar so, dass die collinearen Strahlenbündel, durch welche es aus den Punkten von k_3 projicirt wird, zu dem Bündel (0) reciprok sind. Je zwei associirte Punkte in dem Raume des Gebüsches sind durch eine Sehne von k_3 verbunden und entsprechen einem und demselben Punkte von Σ_1. Einem Strahle a von einem der Bündel 1, ... 6 ist eine Raumcurve dritter Ordnung α_3 associirt, welche durch die fünf übrigen Punkte geht und a zur Sehne hat. Die einander associirten Punkte von a und α_3 sind verbunden durch Sehnen von k_3, welche auf einer Fläche des Gebüsches liegen. Einer solchen Geraden a entspricht in Σ_1 wieder eine Gerade, welche projectiv auf sie bezogen ist.

Den sechs Strahlenbündeln 1, ... 6 entsprechen in Σ_1 sechs Strahlensysteme zweiter Ordnung zweiter Klasse I, II, ... VI, welche in sechs verschiedenen linearen Strahlencomplexen liegen und die zugehörigen Nullsysteme bestimmen. Die gemeinschaftliche Brennfläche Φ_4 der sechs Strahlensysteme ist in jedem dieser Nullsysteme sich selbst zugeordnet, so dass jedem Punkte von Φ_4 eine durch ihn gehende Ebene von Φ_4, jedem

*) Vergl. *Reye* a. a. O. und Geometrie der Lage Bd. 2.

Knotenpunkte aber eine singuläre Ebene zugeordnet ist. Durch Abbildung vermittelst eines dieser Nullsysteme geht jedes der sechs Strahlensysteme in sich selbst über. Der Fläche Φ_4 entspricht im Raume des Gebüsches die Kernfläche desselben.

7. Es sei F_2 eine beliebige Fläche des Gebüsches; a, b, c, d, e, f seien die sechs Geraden der einen, a', b', c', d', e', f' die sechs Geraden der anderen Regelschaar von F_2, welche durch die Punkte $1, \dots 6$ gehen. F_2' sei die Fläche, welche die durch alle Punkte von a gehenden Sehnen von k_3 enthält; F_2' schneidet F_2 in α_3. Dann folgt aus § 1, 1: Die den zwölf Geraden in Σ_1 entsprechenden Strahlen liegen in einer Ebene μ der Art angeordnet, dass jeder Strahl von zehn der übrigen, welche paarweise fünf Strahlensystemen angehören, in fünf Punktepaaren einer Involution geschnitten wird. Aus § 1, 2 folgt: Die zwölf in einer Ebene liegenden Geraden der sechs Strahlensysteme lassen sich auf 32 verschiedene Arten zu Gruppen von je sechs vereinigen, welche einen Kegelschnitt umhüllen.

Die erste Folgerung lässt erkennen, *dass die sechs Geradenpaare der Strahlensysteme, als Curven zweiter Ordnung aufgefasst, einem und demselben Curvennetze angehören.*

8. Die *Hesse*sche Curve dritter Ordnung H_3 dieses Netzes geht durch die sechs auf einem Kegelschnitte σ liegenden Schnittpunkte A, B, C, D, E, F der zu den Strahlensystemen gehörenden Geradenpaare. Die *Cayley*sche Curve C_3 des Netzes wird von den zwölf Geraden der Systeme berührt. Die sechs Punkte $A, B, \dots F$ haben auf der H_3 conjugirte Punkte $A', B', \dots F'$, welche auf einem Kegelschnitte σ' liegen. Herr *Cremona* hat nun gezeigt*), dass alle Kegelschnitte eines Netzes als die *ersten Polaren* von den Punkten der Ebene in Bezug auf eine durch das Netz vollkommen bestimmte *Curve dritter Ordnung* G_3 aufgefasst werden können. Nach dem Vorgange des Herrn *Geiser***) können wir aus dem Netze eine *einfach unendliche Schaar* von Kegelschnitten herausgreifen, indem wir zu den Punkten von σ' die ersten Polaren in Bezug auf G_3 bestimmen. Die Schaar ist dadurch eindeutig auf die Punkte von σ' bezogen. Alle Curven der Schaar umhüllen eine Curve vierter Ordnung, welche, wie sich später ergeben wird, der Schnitt von μ mit der Brennfläche Φ_4 ist. Zu den sechs Punkten $A', B', \dots F'$

*) Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven.
**) *Geiser*, Ueber die *Steiner*schen Sätze etc., dieses Journal, Bd. 72, S. 370.

gehören als erste Polaren die Geradenpaare der Strahlensysteme, die desshalb Curven der Schaar sind. Ausserdem besitzt die Schaar *keine* Linienpaare.

9. Die Polaren eines beliebigen Punktes P von μ in Bezug auf alle Curven der Schaar bilden einen *Strahlenbüschel zweiter Ordnung* π, der projectiv zu σ' ist. Diese Polaren sind nämlich die zweiten gemischten Polaren des Punktes P und der Punkte von σ' in Bezug auf G_3; sie bilden also die Polarfigur der Punkte von σ' in Bezug auf die erste Polare von P. Durch den Punkt P gehen zwei Curven der Schaar, welche die zu π gehörenden Strahlen als Tangenten haben. Jeder Büschel des Netzes enthält zwei Curven der Schaar.

10. Der Ort der Pole einer beliebigen Geraden l von μ in Bezug auf alle Curven der Schaar ist eine *Curve vierter Ordnung* λ_4 mit *drei* Doppelpunkten. Dieser Ort wird als Schnitt entsprechender Strahlen zweier projectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung gefunden. λ_4 geht durch die sechs Punkte $A, B, \ldots F$. l schneidet H_3 in drei Punkten, deren conjugirte die drei Doppelpunkte von λ_4 sind, da l mit jedem dieser Punkte Polare und Pol für einen dem Netze angehörigen Büschel bildet. Die Punkte von λ_4 sind projectiv zu denjenigen von σ'. Ist l eine Tangente der *Cayley*schen Curve, so liegen zwei der Doppelpunkte von λ_4 auf l. Eine beliebige Linie l wird von vier Curven der Schaar in den Schnittpunkten von l mit λ_4 berührt.

11. Analoge Betrachtungen lassen sich für die Geraden der sechs Strahlensysteme ausführen, welche durch irgend einen Punkt M des Raumes gehen. An Stelle der Curven der Schaar in μ treten hier *Kegelflächen*, welche sechsmal in Linienpaare zerfallen. Den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ der Linienpaare sind in Bezug auf alle Kegel der Schaar sechs andere Ebenen eines Ebenenbüschels zweiter Ordnung $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$ conjugirt. Auf diesen Ebenenbüschel ist die Kegelschaar eindeutig bezogen. Einer beliebigen durch M gelegten Ebene sind in Bezug auf die Kegelschaar die Strahlen einer *Kegelfläche zweiter Ordnung* als Polaren zugeordnet. Einem beliebigen Strahle l von M ist ein *Ebenenbüschel vierter Ordnung* L_4 mit *drei* Doppelebenen als Ort der Polarebenen in Bezug auf die Kegelschaar zugewiesen. Der Ebenenbüschel vierter Ordnung ist auf den Büschel zweiter Ordnung der $\alpha', \ldots \zeta'$ *projectiv* bezogen.

12. Ist μ eine Tangentialebene der Brennfläche Φ_4 und M ihr Berührungspunkt, so bestehen alle Curven des Netzes, also auch der Schaar

aus *doppelt zu zählenden Geraden* des Strahlenbüschels (M, μ). Dem Punkte M ist in Bezug auf das Netz jeder Punkt von μ conjugirt. Analoges gilt für die Kegelschaar, deren Mittelpunkt M ist. —

§ 3.

13. *Zwei beliebige Ebenen des Raumes enthalten Curvennetze, welche projectiv der Art auf einander bezogen werden können, dass die zu denselben Strahlensystemen gehörenden Linienpaare einander entsprechen.* Wir haben, um dies zu zeigen, nur zu beweisen, dass die sechs Punkte $A', \dots F'$ auf σ' für alle Ebenen μ eine *constante projective Relation* ergeben.

Es sei l der Schnitt von μ mit einer der singulären Ebenen der Brennfläche; der Punkt P sei einer der Schnittpunkte von l mit der *Hesse*schen Curve in μ. P hat in μ einen conjugirten Punkt P' in Bezug auf alle Curven des Netzes in μ; die beiden Punkte sind harmonisch getrennt durch die sechs Strahlenpaare der Systeme. Beschreibt μ den Büschel l, so wird die von dem festen Punkte P harmonisch durch das Strahlenpaar eines Systems getrennte Gerade eine Regelfläche beschreiben. Wir wissen, dass alle Geraden eines Strahlensystemes, welche l treffen, eine Regelfläche dritter Ordnung erfüllen, deren einfache Leitgerade l ist, deren Doppelgerade aber durch den singulären Punkt von Φ_4 geht, welcher der singulären Ebene in Bezug auf dieses System entspricht. Es folgt hieraus, dass der gesuchte Ort der vierten harmonischen Geraden eine Regelschaar zweiten Grades ist. Wir erhalten so sechs Regelschaaren zweiten Grades, welche ausser in l sich zu je zweien in einer cubischen Raumcurve schneiden. Diese Raumcurven gehen sämmtlich durch P' und die Berührungspunkte der beiden durch l gelegten Tangentialebenen von Φ_4. Sind U und V die Schnitte von l mit dem in der singulären Ebene befindlichen Berührungskegelschnitt und ist W durch U und V von P harmonisch getrennt, so wird die Regelfläche dritter Ordnung eines jeden Systems zwei in der singulären Ebene liegende durch U und V gehende Strahlen enthalten und die cubischen Raumcurven gehen desshalb sämmtlich durch den Punkt W.

Fünf dieser Curven, welche in einer Regelfläche liegen, bestimmen auf den Geraden der Regelschaar, die nicht zu den Secanten gehören (diese sind die von P harmonisch getrennten Geraden), je fünf Punkte, welche entsprechende Elemente projectiver Punktreihen sind. Es bleibt

desshalb die projective Relation der sechs Polaren von P in Bezug auf die in einer Ebene μ liegenden Geradenpaare der Strahlensysteme bei der Drehung von μ um l ungeändert. Die Relation ist stets gleich derjenigen von den sechs Punkten $A', \ldots F'$ auf dem jedesmal auftretenden Kegelschnitte σ'. Fällt μ in die singuläre Ebene, so sind die Punkte $A, B, \ldots F$ die in den sechs Systemen der Ebene zugeordneten Punkte auf dem Berührungskegelschnitte. Die denselben conjugirten Punkte liegen auf dem gleichen Kegelschnitte und sind von den ersten durch U und V harmonisch getrennt.

Die projective Relation der sechs Punkte $A', \ldots F'$ in einer beliebigen Ebene ist desshalb stets gleich der Relation der sechs singulären Punkte in einer Ebene, also constant.

14. Da die sechs durch einen singulären Punkt von Φ_4 gehenden singulären Ebenen *dieselbe* projective Relation haben wie die in einer singulären Ebene liegenden Punkte, so muss die projective Relation der sechs Ebenen $\alpha', \beta', \ldots \zeta'$, welche für einen beliebigen Punkt M des Raumes sich ergeben, ebenfalls *constant* und *gleich* derjenigen der Punkte $A', \ldots F'$ in einer beliebigen Ebene μ sein.

15. Man kann alle Ebenen μ und alle Strahlenbündel M projectiv auf eine *feste Ebene* τ beziehen, in welcher die sechs den Punkten $A', \ldots F'$ und den Ebenen $\alpha', \ldots \zeta'$ entsprechenden Punkte ebenfalls mit $A', \ldots F'$ bezeichnet werden sollen. Sie liegen in einem Kegelschnitte σ' und zeigen die oben genannte constante projective Relation. Zu jedem Punkte von σ' gehört nun in jeder Ebene μ eine bestimmte Curve zweiten Grades und in jedem Strahlenbündel M eine bestimmte Kegelfläche. Wir werden zeigen, dass diese Curven und Kegel die Complexcurven resp. Complexkegel eines *Liniencomplexes* zweiten Grades sind, und werden einstweilen schon diese Bezeichnung für die Curven und Kegel einführen.

16. Ist μ eine Tangentialebene von Φ_4 und M der Berührungspunkt, so ist die projective Relation der sechs in μ liegenden durch M gehenden Strahlen der Systeme gleich derjenigen der zugehörigen Punkte von σ'. Eine Complexcurve in μ besteht aus einer doppelt zu zählenden Geraden, welche durch M geht und sich projectiv mit dem entsprechenden Punkte auf σ' bewegt. Eine solche in μ liegende Linie, welche als Curve und Kegelfläche eines Complexes gelten kann, nennen wir eine *singuläre* Linie des Complexes.

§ 4.

17. Wir gehen auf die Herleitung der Strahlensysteme aus dem Flächengebüsche zurück und machen eine Anwendung von den Sätzen in § 1, 3.

Einer Curve C_4, welche durch die sechs Punkte 1, ... 6 geht, entspricht in Σ_1 eine Gerade l. Die Punktquadrupel auf C_4 werden als Punktquadrupel auf l übertragen und bestimmen auf dieser Geraden drei Involutionen. Es werden nämlich die Punktquadrupel von C_4 von irgend einer Sehne von C_4 durch Ebenenquadrupel projicirt, und diese übertragen die Quadrupelanordnung auf eine Regelschaar zweiten Grades, welche aus gemeinschaftlichen Sehnen von C_4 und k_3 besteht. Diese Quadrupel der Regelschaar bestimmen drei Involutionen, welche bei der Abbildung auf den Raum Σ_1 auf einen Strahlenbüschel übertragen werden, dessen Mittelpunkt (0) ist und dessen Ebene durch l geht. So entstehen durch die Quadrupelanordnung auf l drei Involutionen. Ein Quadrupel auf l bilden die vier Durchschnittspunkte mit Φ_4 (§ 1, 5). Andere finden sich, indem man durch die Berührungspunkte der vier durch l gelegten Tangentialebenen von Φ_4 die Strahlen eines der Systeme construirt und sie zum Schnitte mit l bringt. Da die singulären Linien in diesen Berührungspunkten projective Büschel zu der Punktreihe auf σ' beschreiben und es sechsmal vorkommt, dass die in einem Complexe befindlichen singulären Linien in Quadrupeln auf l eintreffen, so schneiden je vier einem Complexe angehörende singuläre Linien durch die Berührungspunkte der vier Tangentialebenen die Gerade l in einem Punktquadrupel.

18. Die Curve C_4 war der Träger von drei involutorischen Flächenbüscheln (§ 1, 3). l ist somit der Träger von drei involutorischen Ebenenbüscheln. Je vier Ebenen sind zu einem Quadrupel in analoger Weise vereinigt, wie vier Flächen des Büschels C_4. Ein solches Quadrupel bilden die vier Kegelflächen durch C_4, wesshalb die vier Tangentialebenen durch l an Φ_4 ein Quadrupel des Ebenenbüschels liefern. Andere Ebenenquadrupel erhält man in folgender Weise. Man bestimme die vier durch die Schnittpunkte von l mit Φ_4 gehenden in den Tangentialebenen dieser Punkte liegenden singulären Geraden irgend eines Complexes und projicire dieselben durch Ebenen des Büschels l. Die sechs Ordnungsebenen der drei Involutionen haben die Eigenschaft, dass l in jeder von ihnen Tangente der *Cayley*schen Curve des Netzes ist, welches durch die Strahlensysteme be-

stimmt wird. Es folgt nämlich aus § 1, 3, dass die sechs Strahlenpaare der Systeme in einer solchen Ebene in sechs Punktepaaren einer Involution l treffen.

Die sechs Ordnungspunkte der Involutionen auf l, sowie die sechs Ordnungsebenen der involutorischen Ebenenbüschel l gehören paarweise zusammen der Art, dass ein Paar conjugirter Punkte auf l in Bezug auf die Netze in zwei ein Paar bildenden Ebenen mit einem Paare der Ordnungspunkte auf l zusammenfällt. Jeder der sechs Ordnungspunkte auf l ist Mittelpunkt eines Netzes von Kegelflächen, für welche l ein Strahl des Cayleyschen Kegels ist. Die beiden zu dem Ordnungspunkte gehörenden Ordnungsebenen sind in Bezug auf alle Kegel des Netzes einander conjugirt.

19. Es sei m eine Tangente von Φ_4, M ihr Berührungspunkt, und μ die Tangentialebene in M. Der Geraden l entspricht im Raume des Flächengebüsches eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte (§ 1, 4.). Ausser μ gehen noch zwei Tangentialebenen der Φ_4 durch l. In derjenigen Ebene ν, welche durch jene von μ harmonisch getrennt ist, ist m Tangente der *Cayley*schen Curve. Das auf m bestimmte Paar conjugirter Punkte besteht aus M und dem Punkte N, welcher von M durch die Schnitte von m mit Φ_4 harmonisch getrennt ist.

20. Die sämmtlichen m schneidenden Strahlen eines der Systeme I... bilden eine Regelfläche vierter Ordnung, welche die Linie m und die derselben im Nullsysteme I... entsprechende Gerade m' zu Doppelgeraden hat. Eine Doppelerzeugende r ist die durch M gehende Gerade des Systems I..., welche auch in μ liegt. In jeder durch m gelegten Ebene bestimmen wir die Gerade, welche von M durch die beiden in dieser Ebene befindlichen Strahlen des Systems I... harmonisch getrennt ist. Man findet leicht, dass der Ort dieser Geraden eine Regelschaar zweiter Ordnung ist, welche r enthält und desshalb Φ_4 im Punkte M berührt. Im Punkte N ist ν Tangentialebene der Regelschaar. Je zwei der auf diese Weise durch verschiedene Systeme entstandenen Regelschaaren schneiden sich ausser in m in einer cubischen Raumcurve q_3, welche durch M und N geht und daselbst von μ resp. ν berührt wird. Alle q_3 haben ausserdem die Berührungspunkte der beiden durch m gelegten Tangentialebenen von Φ_4 mit einander gemein. Die fünf in einer Regelfläche liegenden q_3 bilden Bestandtheile eines q_3-Büschels, dessen Elemente auf den Strahlen der Regelschaar projective Punktreihen ausschneiden. Zu jedem Complexe gehört eine bestimmte q_3

des Büschels. Zwei Curven q_3, die zu demselben Complexe gehören, aber auf verschiedenen Regelschaaren liegen, können durch eine neue Regelfläche zweiten Grades verbunden werden. Die Strahlen derselben, welche m schneiden, sind die Polaren des Punktes M für Complexcurven eines und desselben Complexes, welche in den Ebenen des Büschels m liegen. So gehört zu jedem Complexe eine Regelschaar. In der Ebene ν bilden die Polaren von M für alle Curven der in ν liegenden Schaar den Strahlenbüschel N. Die zur Geraden m dieses Büschels gehörende Curve der Schaar berührt m in M. Zu dem diese Curve enthaltenden Complexe gehört eine Regelfläche, für welche sich eine Gerade der einen Schaar mit einer Geraden der anderen in m vereinigt und welche in M und N von den Ebenen μ resp. ν berührt wird. Die Regelfläche muss desshalb aus zwei Ebenen bestehen und wird von jeder durch m gehenden Ebene nur in m geschnitten. Aus diesem Grunde ist die Gerade m die Polare des Punktes M für alle Complexcurven eines und desselben Complexes, welche in den Ebenen des Büschels m liegen. Alle diese Complexcurven berühren m in M; m selbst gehört als singuläre Linie dem Complexe an.

Die Curven der Schaar in einer beliebigen Ebene μ des Raumes hüllen die Schnittcurve von μ und der Brennfläche Φ_4 ein. Durch einen Punkt dieser Curve geht nur ein Kegelschnitt der Schaar, welcher Φ_4 ausserdem noch dreimal berührt. Zwei Berührungspunkte eines Kegelschnittes der Schaar mit Φ_4 sind durch eine Tangente der Cayleyschen Curve verbunden. Ist m eine singuläre Linie und M ihr Berührungspunkt mit Φ_4, so tangiren alle Curven des Complexes, welche in den Ebenen des Büschels m liegen, die Gerade m in M.

§ 5.

21. In Bezug auf eine Gerade l ordnen sich die sämmtlichen Kegelschnitte solcher Schaaren, welche in durch l gelegten Ebenen sich befinden, und die Kegel solcher Schaaren, deren Spitzen auf l liegen, zu *Quadrupeln* an. Je vier Kegelschnitte der in einer Ebene liegenden Schaar, welche Φ_4 in den vier Durchschnitten von l mit Φ_4 berühren, bilden ein solches Quadrupel. Je vier Kegel einer Schaar, welche von den vier durch l an Φ_4 gelegten Tangentialebenen berührt werden, bilden ein Quadrupel. Beide Quadrupelanordnungen können auf den Kegelschnitt σ' in der Ebene τ übertragen werden und zeigen dort *dieselbe* Quadrupelanordnung. Die drei

dadurch auf σ' bestimmten Involutionen haben die Ecken eines *Polardreiecks* von σ' zu Involutionscentren.

22. Die Gerade l wird von vier Curven der in einer Ebene μ des Büschels l befindlichen Schaar berührt. Die zu diesen Curven gehörenden Punkte auf σ' sind die Schnittpunkte von σ' mit der auf die Ebene τ übertragenen *Polokonika* von l*). Die vier Curven der Schaar in μ, welche Φ_4 in den Schnittpunkten mit l berühren, haben auf σ' entsprechende Punkte, in welchen die gemeinschaftlichen Tangenten der Polokonika und σ' letztere Curve berühren. Die letzten vier Punkte bilden eines der auf σ' (in 21) bestimmten Quadrupel, wesshalb die ersten vier Punkte auch ein solches Quadrupel bilden. Die projective Relation der vier gemeinsamen Tangenten der Polokonika von l und σ' ist auf der Polokonika gleich der projectiven Relation der vier Schnittpunkte von l mit Φ_4. Bei der Drehung der Ebene μ um l bleibt diese projective Relation ungeändert, und desshalb beschreiben die auf τ übertragenen Polokoniken von l einen Curvenbüschel, dessen Grundpunkte auf σ' liegen. Vier Curven einer Schaar, deren Ebene beliebig durch l gelegt ist, berühren l und haben auf σ' stets dieselben entsprechenden Punkte.

Ist ein Punkt von σ' und dadurch ein Complex von Curven bestimmt, so ist jede Tangente l einer Complexcurve Tangente für alle solche Complexcurven, welche in durch l gelegten Ebenen sich befinden.

23. In analoger Weise können die Betrachtungen von (22) für die Complexkegel, deren Spitzen auf l liegen, ausgeführt werden. Die Polokonika von l für ein Netz eines Bündels, dessen Mittelpunkt auf l liegt, ist ein Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welcher auf die Ebene τ von σ' als Kegelschnitt übertragen wird. Die Polokonika geht dann durch dieselben vier Grundpunkte des in (22) genannten Büschels. Man bemerke nämlich, dass die vier durch l an Φ_4 gelegten Tangentialebenen dieselbe projective Relation zeigen, wie die vier Durchschnittspunkte von l mit Φ_4. Die einer Schaar angehörenden vier Kegel, deren Spitze ein beliebiger Punkt von l ist und welche l enthalten, haben auf σ' stets dieselben vier entsprechenden Punkte. *Ist ein Punkt auf σ' und dadurch ein Complex von Kegelflächen bestimmt, so wird ein Strahl l eines Complexkegels auf allen Complexkegeln liegen, deren Spitzen in l sich befinden.* Hierdurch ist er-

*) Vgl. *Geiser* a. a. O. und *Durège*, Curven dritter Ordnung.

wiesen, *dass alle Complexcurven und Complexkegel, welche einem Punkte von σ' entsprechen, die Complexcurven resp. Complexkegel eines Liniencomplexes zweiten Grades sind.*

24. Durch l sei eine beliebige Ebene μ gelegt und in derselben die zu l gehörende Curve λ_4 (nach § 2, 10) construirt. Ebenso sei für einen beliebigen Punkt P von l der zu l gehörende Ebenenbüschel L_4 (nach § 2, 11) dargestellt. λ_4 und L_4 sind durch Vermittelung von σ' projectiv auf einander bezogen. Zehn Punkte von λ_4 liegen in den ihnen entsprechenden Ebenen von L_4. Diese Punkte sind die vier Schnittpunkte von λ_4 mit l und die sechs Punkte $A, B, \ldots F$, welche der Ebene μ in Bezug auf die sechs Nullsysteme I... zugeordnet sind. Es liegt desshalb jeder Punkt von λ_4 auf der ihm entsprechenden Ebene von L_4. Zwei Punkte P und P' auf l liefern zwei Ebenenbüschel L_4 und L_4', welche zu einander projectiv sind. Die Durchschnitte entsprechender Ebenen bilden eine *Regelfläche* R_8 achter Ordnung, welche alle zu l gehörenden Curven λ_4 in den Ebenen des Büschels l enthält. Eine Gerade l' von R_8 ist der Ort für alle Pole von l in Bezug auf die Curven eines und desselben Complexes in den Ebenen des Büschels l und gleichzeitig der Durchschnitt aller Polarebenen von l in Bezug auf die Kegel desselben Complexes, deren Spitzen auf l liegen. Diese Gerade l' ist nach *Plücker*s Bezeichnung die *Polare* von l in Bezug auf den Complex. Die Fläche R_8 kann desshalb die *Polarfläche* von l genannt werden.

25. Die Polarfläche R_8 von l hat eine *Doppelcurve* fünfzehnter Ordnung D_{15}, welche von jeder Erzeugenden *sechsmal* getroffen wird. Auf l selbst befinden sich *sechs* Doppelpunkte von D_{15}, welche die Ordnungspunkte der auf l bestimmten Involutionen sind. Jede durch l gelegte Ebene enthält noch drei andere Punkte von D_{15}. Die Curve D_{15} hat ferner vier dreifache Punkte in den Berührungspunkten der durch l gelegten Tangentialebenen an Φ_4. Die Gerade l ist eine *vierfache* Linie von R_8. Selbstverständlich hat R_8 auch alle reciproken Eigenschaften.

Gehört die Linie l einem der sechs Nullsysteme I... an, so zerfällt R_8 in eine Regelschaar zweiten und eine Regelschaar sechsten Grades. Ist l ein Strahl zweier der Nullsysteme, so reducirt sich R_8 auf eine Fläche vierter Ordnung. Gehört l zu dreien dieser Nullsysteme, so ist der Ort der Polaren von l die Regelschaar zweiten Grades, welche diesen Nullsystemen angehört. Liegt endlich l in vier dieser Nullsysteme, so ist ihre

Polare in Bezug auf alle Complexe zweiten Grades die zweite diesen vier Nullsystemen gemeinsame Linie*).

§ 6.

26. Durch l sei eine Ordnungsebene μ der für den Ebenenbüschel l sich ergebenden Involutionen gelegt. In μ befinden sich zwei Curven der Schaar, welche beide in zwei Schnittpunkten von l mit der Fläche Φ_4 letztere berühren. Zu der Ebene μ gehören zwei Ordnungspunkte M und N der auf l befindlichen Punktinvolutionen, welche einander in Bezug auf beide Curven conjugirt sind. Man betrachte den Complex, welchem eine dieser Curven angehört, und construire alle Strahlen desselben, welche l treffen. Sie sind bestimmt durch die vier in Punktepaare zerfallenden Complexcurven, welche in den durch l gelegten Tangentialebenen von Φ_4 sich befinden. Die Verbindungsgerade jedes Paares enthält einen der beiden Ordnungspunkte M oder N. Die ganze Anordnung entspricht sich selbst in einer perspectivisch involutorischen Collineation, deren Centrum M ist, deren Collineationsebene aber durch die beiden in N eintreffenden Verbindungsgeraden von Punktepaaren geht. M und N sind desshalb einander conjugirt in Bezug auf alle Complexcurven, welche in den Ebenen des Büschels l liegen.

27. Ebenso folgt: Die zu M und N gehörenden Ordnungsebenen μ und ν sind in Bezug auf alle diejenigen Complexkegel einander conjugirt, deren Spitzen auf l liegen und welche dem in (26) betrachteten Complexe angehören.

28. Wir fragen nach dem Orte der Polaren aller Geraden einer beliebigen Ebene μ in Bezug auf einen bestimmten Complex. Gleichzeitig mit diesen Polaren betrachten wir die sogenannten *Polaraxen* von μ, d. h. die Polaren der Ebene μ in Bezug auf alle Complexkegel, deren Spitzen in μ liegen. Für den Zusammenhang beider Liniensysteme gilt der Satz**):

Eine Polaraxe von μ, welche diese Ebene im Punkte P schneidet, trifft die Polaren aller Geraden des Büschels ($P\mu$).

In den Punkten U, V, W, Z möge die Complexcurve k der Ebene μ die Fläche Φ_4 berühren. Eine der Ordnungsebenen für die involutorischen

*) Vgl. *Klein* a. a. O.

**) Vgl. *Plücker,* Neue Geometrie des Raumes.

Büschel $\overline{UV}$ ist μ. Es liegen desshalb alle Polaraxen von μ, welche in Punkten von $\overline{UV}$ eintreffen, in einer zweiten Ebene, und da sie alle die Polare von $\overline{UV}$ schneiden, bilden sie in dieser zweiten Ebene einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Dasselbe gilt für die Polaraxen, welche $\overline{WZ}$ schneiden. Beide so erhaltenen Strahlenbüschel besitzen einen gemeinsamen Strahl in der Polaraxe, welche durch den Schnitt von $\overline{UV}$ mit $\overline{WZ}$ geht.

Um die Polare l' von l zu erhalten, ziehe man durch den Pol von l in Bezug auf k diejenige Gerade, welche mit l die gleichen in $\overline{UV}$ und $\overline{WZ}$ eintreffenden Polaraxen schneidet.

Alle Polaren der Geraden von μ bilden ein specielles Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse*). Der Ebene μ ist in Bezug auf den Complex ein Pol K zugeordnet.

29. Der Pol K der Ebene μ ist, wie *Plücker* schon bewiesen hat, gleichzeitig der *Pol* von μ in Bezug auf die *Fläche* Φ_4. Betrachtet man nämlich eine Tangente t der *Cayley*schen Curve in μ, so ist für sie μ eine der sechs Ordnungsebenen. Die dazugehörige Ordnungsebene durch t ist in Bezug auf die vier durch t gehenden Tangentialebenen von Φ_4 bekanntlich die dritte Polare von μ und geht desshalb durch den Pol K der Ebene μ in Bezug auf Φ_4. ***Eine Ebene μ hat für alle in Betracht kommenden Complexe stets denselben Punkt K als Pol.***

§ 7.

Der allgemeine Strahlencomplex zweiten Grades lässt sich, wie Herr *Schur***) dargelegt hat, durch Schnitte entsprechender Elemente zweier ***reciproken Bündel linearer Complexe*** erzeugen. An diese Construction anknüpfend, will ich die Polarentheorie für den Complex zweiten Grades erörtern und dann für die oben behandelten Complexe die *Schur*sche Erzeugungsart beweisen.

30. Zwei Regelschaaren S_1 und S_2 seien als Träger zweier reciproken Bündel von linearen Complexen gegeben. Zu jedem durch S_1 gelegten linearen Complexe gehört ein Strahlensystem ersten Grades von S_2 und umgekehrt. Je zwei entsprechende Elemente der Bündel haben mit ein-

*) Vgl. dieses Journal Bd. 91, S. 1.
**) *Schur*, Math. Ann. Bd. 15, S. 440.

ander eine Regelschaar gemein. Die Gesammtheit aller Strahlen dieser Regelschaaren bildet den zu betrachtenden Complex zweiten Grades.

Diese Construction wollen wir hier in indirecter Weise verwenden. Jede Gerade l des Raumes bestimmt in dem Bündel S_1 ein Strahlensystem ersten Grades, welchem l angehört. Dem Strahlensysteme entspricht im Bündel S_2 ein Nullsystem. Es werde nun die Gerade l_1 construirt, welcher l in dem Nullsysteme zugewiesen ist. In analoger Weise werde l_2 durch Vertauschung der Functionen von S_1 und S_2 erhalten. Die drei Geraden l, l_1, l_2 bestimmen eine Regelschaar, welcher sie angehören und in der wir den Strahl l' construiren, welcher von l durch l_1 und l_2 harmonisch getrennt ist. Wir behaupten, *dass l' die Polare von l in Bezug auf den Complex zweiten Grades ist.* In jeder durch l gelegten Ebene μ ist eine reciproke Beziehung durch die Beziehung der Bündel S_1 und S_2 gegeben *). Die Punkte L_1 und L_2, welche der Ebene μ in den zwei hier benutzten Nullsystemen entsprechen, sind die beiden in der reciproken Beziehung zu l gehörenden Punkte. Durch dieselben gehen die Geraden l_1 und l_2. Die Linie l' trifft μ in dem Punkte L', welcher von l durch L_1 und L_2 harmonisch getrennt ist. Nach einem von Herrn *Schröter* **) herrührenden Satze ist L' der Pol von l in Bezug auf den Kegelschnitt, welcher von allen solchen in μ befindlichen Geraden umhüllt wird, die ihre in der reciproken Beziehung zugeordneten Punkte enthalten. Dieser Kegelschnitt ist aber die Complexcurve in der Ebene μ. Da die reciproke Betrachtung für einen beliebigen Punkt von l in analoger Weise gemacht werden kann, so erkennen wir, dass l' die Polare von l in Bezug auf den Complex zweiten Grades ist.

31. Wir fragen nach dem Orte der Polaren l', wenn l die Ebene μ beschreibt.

Da die reciproke Beziehung in der Ebene μ bekannt ist, so haben wir für die Linien l_1 folgende Construction: l_1 muss durch den Punkt L_1 gehen und diejenigen Strahlen von S_2 schneiden, welche auch von l getroffen werden. Sämmtliche Geraden l_1, die zu Linien l der Ebene μ gehören, bilden ein ***Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse,*** welches auch die *Leitschaar* von S_2 enthält. Alle Linien l_1, die in einer Geraden u_1 von μ eintreffen, liegen auf einer ***Regelfläche dritter Ordnung,*** deren ein-

---

*) *Reye,* Geometrie der Lage, II. Theil.

**) Dieses Journal Bd. 77. S. 105.

fache Leitgerade u_1 ist und deren Doppelgerade durch U_2 geht*). Ebenso bilden sämmtliche Linien l_2, die zu den Geraden l von μ gehören, ein ***Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse***, zu welchem die ***Leitschaar*** von S_1 gehört. Die Linien l_2, welche in einer Geraden u_2 von μ eintreffen, bilden eine ***Regelfläche dritter Ordnung***, deren einfache Leitlinie u_2 ist und deren Doppelgerade durch U_1 geht.

32. Die Gerade l möge in μ den Strahlenbüschel U beschreiben. Dem Punkte U entsprechen zwei Punktreihen u_1 und u_2, welche einfache Leitlinien der beiden Regelflächen dritter Ordnung sind, die von den betreffenden Linien l_1 und l_2 gebildet werden. Diese Regelflächen sind projectiv auf einander bezogen, wenn solche Strahlen l_1 und l_2 derselben als entsprechende angesehen werden, welche zu derselben l gehören. Beide Regelschaaren werden von U aus durch projective Ebenenbüschel erster Ordnung projicirt, und diese erzeugen eine Kegelfläche zweiten Grades. Die Strahlen des Kegels treffen je zwei einander entsprechende Geraden l_1 und l_2. Der Kegel hat mit jeder der Flächen die Doppelgerade und die beiden Tangenten, welche von U an die Complexcurve in μ gehen, gemeinschaftlich. Er schneidet desshalb jede der beiden Flächen dritter Ordnung je in einem Kegelschnitte. Letztere zwei sind von einander durch U und einen dritten Kegelschnitt λ harmonisch getrennt. λ ist projectiv zu dem Büschel U oder auch zu der Punktreihe u' in μ, welche die Pole der Geraden l in Bezug auf die Complexcurve enthält. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte von u' und λ sind die ***Polaren der Geraden des Büschels ($U\mu$) in Bezug auf den Complex und bilden eine Regelfläche F_3 dritter Ordnung, deren einfache Leitlinie u' ist und deren Doppelgerade durch U geht. Letztere ist die Polaraxe der Ebene μ in Bezug auf den Complexkegel, dessen Spitze U ist.***

33. In Zusammenhang mit den Polaren der Geraden l betrachten wir die Polaraxen der Ebene μ. Durch jeden Punkt von μ geht eine Polare und eine Polaraxe. Sind A und A' zwei conjugirte Punkte in Bezug auf die Complexcurve, so schneidet die Polaraxe durch A die Polare durch A'. Es folgt hieraus, dass eine Polare und die in demselben Punkte von μ eintreffende Polaraxe harmonisch getrennt sind durch die Ebene μ und

---

*) Vgl. hier und im Folg. dieses Journal Bd. 91, S. 1—22.

einen festen Punkt K, den Pol von μ in Bezug auf den Complex *). Das System der Polaren und dasjenige der Polaraxen bilden entsprechende Linien zweier involutorisch-collinearen Räume, für welche μ die Involutionsebene und K das Centrum ist. Die in einer Geraden u' von μ eintreffenden Polaraxen liegen auf einer Fläche dritter Ordnung F'_3, deren einfache Leitlinie u' und deren Doppelgerade die durch U gehende Polare ist. Je zwei Erzeugende von F_3 und F'_3, welche durch conjugirte Punkte von u' gehen, treffen einander und werden von U aus durch projective Ebenenbüschel projicirt, welche eine Kegelfläche zweiten Grades erzeugen. Die Strahlen derselben gehen durch gemeinsame Punkte von F_3 und F'_3, welche auf einem Kegelschnitte ϱ liegen. Der Kegel hat nämlich mit jeder der Flächen die Doppelgerade und die beiden von U an die Complexcurve gelegten Tangenten gemein und schneidet desshalb die Flächen in einem Kegelschnitte. Die Ebene von ϱ geht durch K, und in oben genannter Collineation entspricht ϱ sich selbst.

34. Durch zwei Flächen F'_3 oder zwei F_3 ist das System der Polaren und Polaraxen vollständig bestimmt. Die durch einen Punkt U von μ gehende Polare schneidet dieselben Geraden der Flächen F'_3 wie u', und die durch U gehende Polaraxe trifft dieselben Geraden der Flächen F_3 wie u'. Wir werden nun zeigen, dass zur Construction zweier Flächen F_3 an Stelle zweier Flächen F'_3 eine Regelschaar zweiten Grades φ_2 treten kann. Diese beiden F_3 gehören dann zu einem speciellen ***Strahlensysteme dritter Ordnung zweiter Klasse***, aus welchem das System der Polaraxen entspringt. Letzteres ist desshalb ebenfalls ein ***specielles Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse***, zu welchem die Regelschaar von φ_2 gehört. Das System der Polaren ist aber das zuerst genannte Strahlensystem.

Durch die in U einmündende Polare l' von l legen wir eine beliebige Ebene, welche ausser einer die Gerade l schneidenden Polaraxe eine zweite Polaraxe g'_1 enthält. Beide treffen einander auf dem Kegelschnitte ϱ. Eine Fläche zweiten Grades φ_2 möge bestimmt werden durch ϱ, die Gerade g'_1 und die durch U gehende Polaraxe l'_1. K ist der Pol der Ebene μ in Bezug auf φ_2, welche desshalb auch die Polare g' enthält, die von g'_1 auf μ in G getroffen wird. Legt man bei der Construction eines Strahlensystemes dritter Ordnung zweiter Klasse Σ die Regelschaar von φ_2

*) *Plücker*, a. a. O.

zu Grunde, zu welcher g'_1 und l'_1 gehören, und zwar der Art, dass der durch einen Punkt N von μ gehende Strahl des Systemes dieselben Geraden der Regelschaar trifft wie die Linie n, welche die Polare von N bezüglich der Complexcurve ist; so erkennt man, dass die durch u' gehende Fläche F_3 der Polaren zu Σ gehört. Eine zweite zu Σ gehörende F_3 der Polaren findet man in den Strahlen, welche die Gerade $\overline{GU}$ treffen. In der That ist die in dieser Geraden eintreffende Fläche von Σ dritter Ordnung und hat mit der F_3 der Polaren die Leitgeraden und fünf Erzeugende gemeinschaftlich. Diese sind die Linien g' und l', die Gerade durch den Schnitt von $\overline{GU}$ mit u' und endlich die beiden durch U an die Complexcurve in μ gelegten Tangenten. Obige beide Flächen sind daher identisch.

Die Polaraxen von μ sowie die Polaren aller Geraden von μ in Bezug auf einen Complex zweiten Grades bilden specielle Strahlensysteme dritter Ordnung zweiter Klasse. Beide Systeme umhüllen dieselbe Brennfläche, welche in der Complexcurve der Ebene μ eine Cuspidalkante besitzt. Die reciproke Beziehung der Bündel S_1 und S_2 ist durch ein System von Polaren der Geraden einer Ebene μ vollständig bestimmt und demnach, wenn der erste Complex sich ergeben soll, nur auf eine Art möglich.

35. Die Polaraxen der Ebenen eines Büschels in Bezug auf die Complexkegel, deren Spitzen auf dem Träger l des Büschels liegen, bilden ein *Strahlensystem erster Ordnung und Klasse*, dessen Axen die Linie l und deren Polare l' sind. Für jede Ebene des Büschels findet sich eine Regelfläche dritter Ordnung. Alle diese Flächen bilden einen Büschel, denn sie haben die einfache und zweifache Leitlinie und ausserdem die vier Strahlen mit einander gemein, in welchen sich irgend zwei der Flächen schneiden. Einer dieser vier Strahlen ist nämlich die Polaraxe zweier verschiedenen Ebenen in Bezug auf denselben Complexkegel, welcher desshalb in zwei Ebenen zerfällt, deren Schnittgerade diese Polaraxe ist. Die *Singularitätenfläche des Complexes* ist daher von der *vierten Ordnung und Klasse.*

36. Eine Polaraxe der Ebene μ hat als Polare in Bezug auf den Complex eine Gerade von μ. *Bewegt sich eine Polare in einer Ebene, so beschreibt die zu ihr gehörige Gerade ein Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse. Zu einer Polaren gehören aber im Allgemeinen neun Geraden.*

§ 8.

37. Bekannt sei das zu den Geraden einer Ebene μ gehörende Strahlensystem dritter Ordnung zweiter Klasse der Polaren, eine Regelschaar S_1 des Complexes und ferner ein beliebiger Strahl r desselben. Hiermit ist der Complex bestimmt, weil die Complexkegel für diejenigen Punkte von μ, in welchen die gegebenen Strahlen des Complexes eintreffen, bekannt sind. Ist R der Schnitt von μ mit r, so ist die Complexcurve in jeder durch R gelegten Ebene construirbar.

Es soll die Aufgabe gelöst werden, durch r eine Regelschaar S_2 zu legen, welche der Träger eines Bündels linearer Complexe ist, der, mit S_1 in reciproke Beziehung gesetzt, den Complex zweiten Grades erzeugt. Wir suchen zu den Geraden l des Büschels (R, μ) die zugehörigen Linien l_2. Eine Gerade l trifft zwei Strahlen von S_1, welche auch von l_2 geschnitten werden. Der Strahl l_1 schneidet r. Da l, l_1, l', l_2 vier harmonische Strahlen sind, so muss l_2 von der Geraden n geschnitten werden, welche von r durch l und l' harmonisch getrennt ist. Die Gerade n gehört dem Complexkegel R an und liegt mit r und l in einer Ebene. Desshalb ist l_2 auf eine Regelschaar beschränkt, von welcher drei Leitgeraden bekannt sind und zu welcher l gehört. l_2 muss in einer bestimmten Geraden s_2 auf μ eintreffen, welche dieselben Geraden der Leitschaar von S_1 wie n schneidet. Beschreibt l den Büschel (R, μ), so bewegt sich n auf dem Complexkegel R, und s_2 beschreibt nach einem bekannten Satze einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung k. (R, μ) und k sind zu einander projectiv und erzeugen durch die Schnitte entsprechender Strahlen eine Tangente t von k.

Da die Punkte, in welchen alle zu dem Büschel (R, μ) gehörenden l_2 die Ebene μ schneiden, auf einer geraden Linie liegen müssen, welche projectiv ist zu (R, μ), so kann diese Gerade nur eine Tangente von k sein. Greift man *eine beliebige* r_2 (nicht t) dieser Tangenten heraus, so sind für die reciproke Beziehung in μ gegeben: Die Tangenten der Complexcurve, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, sowie die projective Beziehung zwischen dem Strahlenbüschel R und der demselben zugewiesenen Punktreihe r_2. Hiermit ist die reciproke Beziehung in μ bestimmt, und folglich sind auch die Systeme aller Linien l_2 und l_1 bekannt. Durch das System der Geraden l_2 ist nun auch S_2 gegeben.

Um S_2 zu construiren, können wir auch folgenden Weg einschlagen: Zu einer Tangente g_2 von k gehört in der reciproken Beziehung der Ebene

μ ein Punkt G. Die Gerade $\overline{GR}$ liegt mit r und demjenigen Strahle n des Complexkegels R in einer Ebene, welcher mit g_2 zu demselben durch S_1 gelegten Strahlensysteme erster Ordnung gehört. Dieses Strahlensystem hat mit dem Complexe ausser S_1 eine zweite Regelschaar G', welche n enthält, gemeinsam. Ein linearer Complex, welcher durch G' geht und in welchem der Ebene μ der Punkt G entspricht, muss die gesuchte Regelschaar S_1 enthalten. Weil nun G, n und r in einer Ebene liegen, gehört r diesem linearen Complexe an. Drei beliebige Tangenten g_2 von k bestimmen drei lineare Complexe, deren gemeinschaftliche Regelschaar S_2 ist.

38. Hat man auf diese Weise die Regelschaar S_2 construirt, so ist leicht ersichtlich, dass unter Zugrundelegung der in μ angenommenen reciproken Beziehung, welche die Beziehung von S_1 und S_2 bestimmt, der gegebene Complex entsteht. Ferner ist im Obigen nachgewiesen, dass ein Complex zweiten Grades stets bestimmbar ist, sobald von ihm gegeben sind: *Eine beliebige Regelschaar zweiten Grades, ein Strahl, welcher derselben nicht angehört und das Polarsystem der Geraden einer Ebene.*

39. Durch einen Strahl r des Complexes lassen sich *einfach unendlich viele* Regelschaaren S_2 legen, die zu einer S_1 gehören. *Es giebt desshalb zu einer S_1 des Complexes dreifach unendlich viele Flächen S_2.* Mit den hier gegebenen Hülfsmitteln beweist man ferner, *dass alle S_2, welche durch einen Strahl r gehen, in einem linearen Complexe liegen, und dass zwei beliebige S_2 Leitstrahlen eines Nullsystems sind.* Um von einer S_2 ausgehend alle übrigen S_2 zu construiren, lege man durch die gegebene S_2 alle *möglichen linearen Complexe*, welche mit dem Complexe zweiten Grades *Congruenzen* bestimmen. In jeder derselben giebt es *eine Gruppe von Regelschaaren zweiten Grades*, zu welcher die *gegebene S_2* gehört. *Alle Regelschaaren derselben Gruppe sind ebenfalls Flächen S_2.*

40. *Durch Angabe einer Regelschaar S_1 des Complexes sind zwei dreifach unendlich grosse Gruppen von Regelschaaren S_1 und S_2 bestimmt. Jede S_1 kann mit jeder S_2 den gegebenen Complex erzeugen* *); *die reciproke Beziehung zwischen den Bündeln S_1 und S_2 ist aber nur auf eine Weise möglich. Die vierfach unendlich vielen Regelschaaren des Complexes bilden eine einfach unendliche Schaar solcher Doppelgruppen.*

---

*) Vergl. *Schur* a. a. O.

41. Die in dem ersten Theile dieser Arbeit gegebene Construction des Complexes führt nun auch auf die Erzeugung desselben durch reciproke Bündel linearer Complexe. Man hat zu diesem Zwecke nur die *Existenz einer Regelschaar zweiten Grades* in dem Complexe zu beweisen. Eine singuläre Gerade enthält die Mittelpunkte von vier Strahlenbüscheln erster Ordnung, welche dem Complexe angehören und die singuläre Gerade enthalten. Man wähle *zwei dieser Strahlenbüschel aus,* welche in *verschiedenen* Ebenen liegen und *verschiedene* Mittelpunkte haben. *Sie ersetzen eine Regelschaar* S_1.

Aachen, im Februar 1882.

Ueber zwei Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind.

(Von Herrn *R. von Lilienthal.*)

Es sollen im Folgenden zwei Schaaren von Raumcurven aufgestellt werden, deren Coordinaten elliptische Functionen sind, und welche folgende Eigenschaften haben:

1. Es lassen sich sämmtliche Constante, die in den Ausdrücken für die Coordinaten vorkommen, bis auf eine, die nebst dem Modul beliebig bleibt, so bestimmen, dass die betreffende Curve auf einer Kugel liegt.

2. Das Integral, welches die Bogenlänge der Curve darstellt, ist ein elliptisches Integral erster Art, vermehrt um die Differenz zweier elliptischen Integrale dritter Art.

3. Bei der zweiten Schaar der betrachteten Curven lässt sich die noch beliebige Constante so bestimmen, dass das Bogenintegral ein elliptisches erster Art wird.

4. Integrirt man die Functionen, welche die Coordinaten der betrachteten Curven darstellen, so erhält man zwei Schaaren transcendenter Curven, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist. Dabei liegen die Integralcurven der zweiten Schaar auf algebraischen Cylindern.

5. Die Integralcurven derjenigen Curven der zweiten Schaar, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist, sind Asymptotenlinien von Minimalflächen, auf welchen eine Schaar algebraischer Curven liegt.

§ 1.

Erste Schaar sphärischer Curven.

Die primitiven Perioden 2ω und $2\omega'$ der zu betrachtenden elliptischen Functionen mögen so gewählt werden, dass 2ω reell, $2\omega'$ rein imaginär ist. Wir setzen:

$$a_1 = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}, \quad a_2 = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2},$$
$$a_3 = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad a_4 = -\frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2},$$

so dass a_2, a_4 zu a_1, a_3 conjugirt sind.

Es sei ferner:

$$\wp^{(2\nu-1)}(u-a_\alpha) + \lambda \wp^{(2\nu-3)}(u-a_\alpha) + \lambda_1 \wp^{(2\nu-5)}(u-a_\alpha) + \cdots$$
$$\cdots + \lambda_{\nu-2} \wp'(u-a_\alpha) - \lambda_{\nu-1} \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_\alpha) = \psi(u-a_\alpha),$$

worin die Constanten λ, λ_1, ... $\lambda_{\nu-1}$ reelle Grössen sein sollen.

Wir setzen jetzt:

$$\begin{aligned} x &= i\cos\alpha \{\psi(u-a_1) - \psi(u-a_2) + \psi(u-a_3) - \psi(u-a_4)\}, \\ y &= i\sin\alpha \{\psi(u-a_1) - \psi(u-a_2) - \psi(u-a_3) + \psi(u-a_4)\}, \\ z &= \psi(u-a_1) + \psi(u-a_2) - \psi(u-a_3) - \psi(u-a_4), \end{aligned}$$

oder zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} x &= i\cos\alpha \{\psi(u-a_1) + f(u)\} \\ &= i\cos\alpha \{\psi(u-a_3) + f_1(u)\}, \\ y &= i\sin\alpha \{\psi(u-a_1) + \varphi(u)\} \\ &= -i\sin\alpha \{\psi(u-a_3) + \varphi_1(u)\}, \\ z &= \psi(u-a_1) + \chi(u) \\ &= -\{\psi(u-a_3) + \chi_1(u)\}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für x, y, z sind für reelle Werthe von u reell. Für $u = a_1$ verschwinden die geraden Ableitungen von $f(u)$, $\varphi(u)$, $\chi(u)$, für $u = a_3$ diejenigen von $f_1(u)$, $\varphi_1(u)$, $\chi_1(u)$.

Wir stellen jetzt die Entwickelungen von x für die Umgebung der Stellen a_1 und a_3 auf.

Es wird:

$$\begin{aligned} x = i\cos\alpha \Big[& \frac{-(2\nu)!}{(u-a_1)^{2\nu+1}} + \frac{-\lambda(2\nu-2)!}{(u-a_1)^{2\nu-1}} + \cdots + \frac{-\lambda_{\nu-2}.2}{(u-a_1)^3} + \frac{-\lambda_{\nu-1}}{u-a_1} \\ & + f(a_1) + f'(a_1)(u-a_1) + f^{(3)}(a_1)\frac{(u-a_1)^3}{3!} + \cdots + f^{(2\nu-1)}(a_1)\frac{(u-a_1)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \cdots \\ & + \{c_1^{(2\nu-1)} + \lambda . c_1^{(2\nu-3)} + \cdots + \lambda_{\nu-2} c_1'\}(u-a_1) \\ & + \{c_3^{(2\nu-1)} + \lambda c_3^{(2\nu-3)} + \cdots + \lambda_{\nu-2} c_3' + \lambda_{\nu-1} c_3^{-1}\}(u-a_1)^3 + \cdots \Big]. \end{aligned}$$

Ebenso:

$$x = i\cos\alpha\Big[\frac{-(2\nu)!}{(u-a_3)^{2\nu+1}}+\frac{-\lambda(2\nu-2)!}{(u-a_3)^{2\nu-1}}+\cdots+\frac{-\lambda_{\nu-2}.2}{(u-a_3)^3}+\frac{-\lambda_{\nu-1}}{u-a_3}$$
$$+f_1(a_3)+f_1'(a_3)(u-a_3)+\cdots+f_1^{(2\nu-1)}(a_3)\frac{(u-a_3)^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}+\cdots$$
$$+\{c_1^{(2\nu-1)}+\lambda c_1^{(2\nu-3)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}c_1'\}(u-a_3)$$
$$+\{c_3^{(2\nu-1)}+\lambda c_3^{(2\nu-3)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}c_3'+\lambda_{\nu-1}c_3^{-1}\}(u-a_3)^3+\cdots\Big].$$

Hier ist

$$\wp^{(2\mu-1)}(u) = \frac{-(2\mu)!}{u^{2\mu+1}}+c_1^{(2\mu-1)}u+c_3^{(2\mu-1)}u^3+\cdots$$

gesetzt. Aehnliche Entwickelungen erhält man für y und z. Man hat nun:

$$f(a_1) = \quad f_1(a_3) = 0,$$
$$\varphi(a_1) = -\varphi_1(a_3) = -2\lambda_{\nu-1}\eta',$$
$$\chi(a_1) = -\chi_1(a_3) = 2\lambda_{\nu-1}\eta.$$

Setzt man daher: $x=x_1$, $y+2i\lambda_{\nu-1}\sin\alpha.\eta' = y_1$, $z-2\lambda_{\nu-1}\eta = z_1$, so kommt in den Entwickelungen von x_1, y_1, z_1 kein constantes Glied mehr vor. Bezeichnet μ eine ganze positive ungerade Zahl, so ist ferner:

$$f^{(\mu)}(a_1) = f_1^{(\mu)}(a_3);\quad \varphi^{(\mu)}(a_1) = \varphi_1^{(\mu)}(a_3);\quad \chi^{(\mu)}(a_1) = \chi_1^{(\mu)}(a_3).$$

Hieraus folgt, dass die Coefficienten in der Entwickelung von x_1 nach Potenzen von $(u-a_1)$ dieselben sind, wie die Coefficienten der Entwickelung von x_1 nach Potenzen von $(u-a_3)$, dass aber die Coefficienten der entsprechenden Entwickelungen von y_1 und z_1 entgegengesetzt sind. Diese Coefficienten sind in den Entwickelungen von x_1 und y_1 rein imaginär, in denen von z_1 reell. Daraus ergiebt sich, dass die Coefficienten der Entwickelungen von x_1^2, y_1^2, z_1^2 für die Umgebungen jeder der vier Unendlichkeitsstellen dieselben sind. Das Gleiche gilt von den Entwickelungen der Ausdrücke $\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2$, $\left(\frac{dy_1}{du}\right)^2$, $\left(\frac{dz_1}{du}\right)^2$.

Wir setzen jetzt:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = r^2,$$

sowie

$$\cos^2\alpha f^{(\mu)}(a_1)+\sin^2\alpha.\varphi^{(\mu)}(a_1)-\chi^{(\mu)}(a_1) = \Sigma\cos^2\alpha f^{(\mu)}(a_1).$$

Man hat dann in der Umgebung von a_1:

$$r^2 = 2\frac{(2\nu)!\,\Sigma\cos^2\alpha f'(a_1)}{(u-a_1)^{2\nu}} + 2\frac{\frac{(2\nu)!}{3!}\Sigma\cos^2\alpha f'''(a_1)+(2\nu-2)!\,\lambda\Sigma\cos^2\alpha f'(a_1)}{(u-a_1)^{2\nu-2}}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+2\frac{2\nu.\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu-1)}(a_1)+(2\nu-2)\lambda\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu-3)}(a_1)+\cdots+2\lambda_{\nu-2}\Sigma\cos^2\alpha f'(a_1)}{(u-a_1)^2}+\cdots$$

Nimmt man nun:

$$\begin{aligned}\Sigma\cos^2\alpha f'(a_1) &= 0,\\ \Sigma\cos^2\alpha f'''(a_1) &= 0,\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot &\cdot \cdot\\ \Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu-1)}(a_1) &= 0,\end{aligned}$$

so erhält man ν Gleichungen, welche die Grössen λ, λ_1, ... $\lambda_{\nu-1}$ linear enthalten. Es lassen sich daher diese Grössen stets so bestimmen, dass r^2 keine Unendlichkeitsstellen mehr besitzt und folglich constant ist.

Multiplicirt man die letzten Gleichungen mit -1 und setzt:

$$\wp^{(k)}\omega'-\wp^{(k)}(\omega+\omega')-\sin^2\alpha(\wp^{(k)}\omega-\wp^{(k)}(\omega+\omega')) = \pi^{(k)},$$

so nehmen sie die übersichtlichere Form an:

$$\begin{aligned}\pi^{(2\nu)}+\lambda\pi^{(2\nu-2)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi''+\lambda_{\nu-1}\pi &= 0,\\ \pi^{(2\nu+2)}+\lambda\pi^{(2\nu)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi^{(4)}+\lambda_{\nu-1}\pi'' &= 0,\\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot &\cdot \cdot\\ \pi^{(4\nu-2)}+\lambda\pi^{(4\nu-4)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi^{(2\nu)}+\lambda_{\nu-1}\pi^{(2\nu-2)} &= 0.\end{aligned}$$

Um den Radius der Kugel zu berechnen, auf der die betrachtete Curve liegt, hat man $u=0$ in x_1, y_1, z_1 zu setzen. Man erhält:

$$(x_1)_{u=0} = 0,$$

$$(y_1)_{u=0} = 2i\sin\alpha\Big\{\wp^{(2\nu-1)}\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)-\wp^{(2\nu-1)}\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)$$

$$+\lambda\Big(\wp^{(2\nu-3)}\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)-\wp^{(2\nu-3)}\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)\Big)+\cdots+\lambda_{\nu-2}\Big(\wp'\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)-\wp'\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)\Big)$$

$$-\lambda_{\nu-1}\Big(\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)-\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)-\eta'\Big)\Big\} = i\sin\alpha.P,$$

$$(z_1)_{u=0} = -2\Big\{\wp^{(2\nu-1)}\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)+\wp^{(2\nu-1)}\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)$$

$$+\lambda\Big(\wp^{(2\nu-3)}\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)+\wp^{(2\nu-3)}\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)\Big)+\cdots+\lambda_{\nu-2}\Big(\wp'\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)+\wp'\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)\Big)$$

$$-\lambda_{\nu-1}\Big(\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{\omega+\omega'}{2}\Big)+\frac{\sigma'}{\sigma}\Big(\frac{\omega-\omega'}{2}\Big)-\eta\Big)\Big\} = Q.$$

Es wird daher:

$$r^2 = Q^2-\sin^2\alpha.P^2.$$

§ 2.

Die zweite Schaar sphärischer Curven.

Wir setzen wie oben:

$$a_1 = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}, \quad a_2 = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2},$$

$$a_3 = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}, \quad a_4 = -\frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}.$$

Es sei ferner:

$$\wp^{(2\nu)}(u-a_\alpha) + \lambda \wp^{(2\nu-2)}(u-a_\alpha) + \cdots + \lambda_{\nu-2}\wp''(u-a_\alpha) + \lambda_{\nu-1}\wp(u-a_\alpha) = \psi(u-a_\alpha),$$

sowie:

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)+\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},\\ y &= \sin\alpha\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4)\},\\ z &= i\,\{\psi(u-a_1)-\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\}, \end{aligned}$$

so dass x, y, z für reelle Werthe von u reell sind.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha\,(\psi(u-a_1)+f(u))\\ &= \cos\alpha\,(\psi(u-a_3)+f_1(u)),\\ y &= \sin\alpha\,(\psi(u-a_1)+\varphi(u))\\ &= -\sin\alpha\,(\psi(u-a_3)+\varphi_1(u)),\\ z &= i(\psi(u-a_1)+\chi(u))\\ &= -i(\psi(u-a_3)+\chi_1(u)). \end{aligned}$$

Hier verschwinden für $u = a_1$ die ungeraden Ableitungen von f, φ, χ, für $u = a_3$ diejenigen von f_1, φ_1, χ_1.

Wir nehmen, indem wir unter a eine einstweilen beliebige Constante verstehen,

$$x - a\cos\alpha = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

Man hat dann für die Umgebung von a_1:

$$\begin{aligned} x_1 = \cos\alpha\Big[&\frac{(2\nu+1)!}{(u-a_1)^{2\nu+2}} + \frac{\lambda.(2\nu-1)!}{(u-a_1)^{2\nu}} + \cdots + \frac{\lambda_{\nu-2}.3!}{(u-a_1)^4} + \frac{\lambda_{\nu-1}}{(u-a_1)^2}\\ &+ f(a_1) - a + f''(a_1)\frac{(u-a_1)^2}{2} + \cdots + f^{(2\nu)}(a_1)\frac{(u-a_1)^{2\nu}}{(2\nu)!} + \cdots\\ &\cdots + c_0^{(2\nu)} + \lambda c_0^{(2\nu-2)} + \cdots + \lambda_{\nu-2} c_0''\\ &+ (c_2^{(2\nu)} + \lambda c_2^{(2\nu-2)} + \cdots + \lambda_{\nu-2} c_2'' + \lambda_{\nu-2} c_2)(u-a_1)^2 + \cdots\Big], \end{aligned}$$

sowie für die Umgebung von a_3:

$$x_1 = \cos\alpha\Big[\frac{(2\nu+1)!}{(u-a_3)^{2\nu+2}}+\frac{\lambda.(2\nu-1)!}{(u-a_3)^{2\nu}}+\cdots+\frac{\lambda_{\nu-2}.3!}{(u-a_3)^4}+\frac{\lambda_{\nu-1}}{(u-a_3)^2}$$
$$+f_1(a_3)-a+f_1''(a_3)\frac{(u-a_3)^2}{2}+\cdots+f_1^{(2\nu)}(a_3)\frac{(u-a_3)^{2\nu}}{(2\nu)!}+\cdots$$
$$\cdots+c_0^{(2\nu)}+\lambda c_0^{(2\nu-2)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}c_0''$$
$$+(c_2^{(2\nu)}+\lambda c_2^{(2\nu-2)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}c_2''+\lambda_{\nu-1}c_2)(u-a_3)^2+\cdots\Big].$$

Hier ist:

$$\wp^{(2\mu)}u = \frac{(2\mu+1)!}{u^{2\mu+2}}+c_0^{(2\mu)}+c_2^{(2\mu)}u^2+\cdots$$

gesetzt. Aehnliche Entwickelungen erhält man für y_1 und z_1.

Bezeichnet man mit k eine gerade, positive Zahl, einschliesslich der Null, so ist:

$$f^{(k)}(a_1) = f_1^{(k)}(a_3),\quad \varphi^{(k)}(a_1) = \varphi_1^{(k)}(a_3),\quad \chi^{(k)}(a_1) = \chi_1^{(k)}(a_3).$$

Hieraus folgt, dass die Coefficienten der Entwickelung von x_1 nach Potenzen von $(u-a_1)$ dieselben sind, wie diejenigen in der Entwickelung von x_1 nach Potenzen von $(u-a_3)$, dass aber die Coefficienten in den entsprechenden Entwickelungen von y_1, z_1 entgegengesetzt sind. Diese Coefficienten sind in den Reihen für x_1 und y_1 reell, in den Reihen für z_1 rein imaginär; daher sind die Coefficienten der Entwickelungen von x_1^2, y_1^2, z_1^2 für die Umgebung jeder der vier Unendlichkeitsstellen dieselben; das Gleiche gilt von den Entwickelungen der Ausdrücke $\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2$, $\left(\frac{dy_1}{du}\right)^2$, $\left(\frac{dz_1}{du}\right)^2$.

Wir nehmen jetzt:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = r^2,$$

sowie

$$\cos^2\alpha f^{(\mu)}(a_1)+\sin^2\alpha\,\varphi^{(\mu)}(a_1)-\chi^{(\mu)}(a_1) = \Sigma\cos^2\alpha f^{(\mu)}(a_1).$$

Dann wird in der Umgebung von a_1:

$$r^2 = 2\{\Sigma\cos^2\alpha f(a_1)-a\cos^2\alpha\}\left\{\frac{(2\nu+1)!}{(u-a_1)^{2\nu+2}}+\cdots+\frac{\lambda_{\nu-1}}{(u-a_1)^2}\right\}$$
$$+2\,\frac{\frac{(2\nu+1)!}{2}\Sigma\cos^2\alpha f''(a_1)+(2\nu-1)!\,\lambda\{\Sigma\cos^2\alpha f(a_1)-a\cos^2\alpha\}}{(u-a_1)^{2\nu}}$$
$$+\;\cdot$$
$$+2\,\frac{(2\nu+1)\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu)}(a_1)+\lambda(2\nu-1)\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu-2)}(a_1)+\cdots+\lambda_{\nu-1}\{\Sigma\cos^2\alpha f(a_1)-a\cos^2\alpha\}}{(u-a_1)^2}+\cdots.$$

Setzt man daher:

$$(1.)\quad \Sigma\cos^2\alpha f(a_1)-a\cos^2\alpha = 0,$$
$$(2.)\quad \Sigma\cos^2\alpha f''(a_1) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\nu+1.)\quad \Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu)}(a_1) = 0,$$

so geht r^2 in eine Constante über.

Aus der Gleichung (1.) erhält man den Werth von a, die Gleichungen (2.), ... (ν+1.) enthalten die ν Grössen $\lambda, \ldots \lambda_{\nu-1}$ linear und sind stets durch reelle Werthe dieser zu befriedigen.

Es wird:

$$a = 2\frac{\psi(\omega+\omega')+\psi(\omega')-\sin^2\alpha(\psi(\omega+\omega')+\psi(\omega))}{\cos^2\alpha},$$

$$r^2 = 4\cos^2\alpha\left\{\psi\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)+\psi\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)-\frac{\psi(\omega+\omega')+\psi(\omega')-\sin^2\alpha(\psi(\omega+\omega')+\psi(\omega))}{\cos^2\alpha}\right\}^2.$$

Setzt man noch:

$$\wp^{(k)}(\omega+\omega')+\wp^{(k)}\omega'-\sin^2\alpha(\wp^{(k)}(\omega+\omega')+\wp^{(k)}\omega) = \pi^{(k)},$$

so nehmen die Gleichungen (2.), ... (ν+1.) die übersichtlichere Form an:

$$\pi^{(2\nu+2)}+\lambda\pi^{(2\nu)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi^{(4)}+\lambda_{\nu-1}\pi'' = 0,$$
$$\pi^{(2\nu+4)}+\lambda\pi^{(2\nu+2)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi^{(6)}+\lambda_{\nu-1}\pi^{(4)} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi^{(4\nu)}+\lambda\pi^{(4\nu-2)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi^{(2\nu+2)}+\lambda_{\nu-1}\pi^{(2\nu)} = 0.$$

§ 3.

Die Bogenlänge der betrachteten Curven.

Wir betrachten zuerst das Bogenelement bei der ersten Schaar. Es sei:

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{du}\right)^2 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2.$$

Man erhält dann als Entwickelung für die Umgebung von a_1:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{-2.(2\nu+1)\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu+1)}(a_1)}{(u-a_1)^2}+\cdots.$$

Da, wie oben bemerkt, die Coefficienten der Entwickelungen von $\left(\frac{ds}{du}\right)^2$ nach Potenzen von $(u-a_1)$, $(u-a_2)$, $(u-a_3)$, $(u-a_4)$ dieselben sind, so erhält man, wenn:

$$-2.(2\nu+1)\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu+1)}(a_1) = C$$

gesetzt wird,

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = C\{\wp(u-a_1)+\wp(u-a_2)+\wp(u-a_3)+\wp(u-a_4)\}+\text{const.}$$

Für $u=0$ wird:

$$\frac{dx_1}{du} = 2i\cos\alpha\{\psi'(a_1)-\psi'(a_2)\},\quad \frac{dy_1}{du}=0,\quad \frac{dz_1}{du}=0,$$

$$\wp(a_1)+\wp(a_2)+\wp(a_3)+\wp(a_4) = 2\left(\wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)+\wp\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\right) = 4e_2.$$

Daher

$$\text{const.} = -4\cos^2\alpha\{\psi'(a_1)-\psi'(a_2)\}^2-4Ce_2.$$

Es ist aber:

$$\left\{\wp\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-4e_2\right\}_{2\omega,2\omega'}$$

$$= \left\{(e_2-e_1)(e_2-e_3)\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)}\right\}_{\omega,\omega'},$$

wo die angehängten 2ω, $2\omega'$ und ω, ω' die primitiven Perioden des betreffenden Klammerausdrucks sind. Wir können demnach schreiben:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = C.\left\{(e_2-e_1)(e_2-e_3)\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)}\right\}_{\omega,\omega'}-4\cos^2\alpha\{\psi'(a_1)-\psi'(a_2)\}^2.$$

Die Grösse C kann hierbei nicht verschwinden. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
C &= 4(2\nu+1)[\pi^{(4\nu)}+\lambda\pi^{(4\nu-2)}+\cdots+\lambda_{\nu-2}\pi^{(2\nu+2)}+\lambda_{\nu-1}\pi^{(2\nu)}]\\
&= 4(2\nu+1)[\wp^{(4\nu)}\omega'-\wp^{(4\nu)}(\omega+\omega')+\lambda(\wp^{(4\nu-2)}\omega'-\wp^{(4\nu-2)}(\omega+\omega'))+\cdots\\
&\qquad\cdots+\lambda_{\nu-1}(\wp^{(2\nu)}\omega'-\wp^{(2\nu)}(\omega+\omega'))\\
&\quad-\sin^2\alpha\{\wp^{(4\nu)}\omega-\wp^{(4\nu)}(\omega+\omega')+\lambda(\wp^{(4\nu-2)}\omega-\wp^{(4\nu-2)}(\omega+\omega'))+\cdots\\
&\qquad\cdots+\lambda_{\nu-1}(\wp^{(2\nu)}\omega-\wp^{(2\nu)}(\omega+\omega'))\}].
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke $\wp^{(k)}\omega'-\wp^{(k)}(\omega+\omega')$ und $\wp^{(k)}\omega-\wp^{(k)}(\omega+\omega')$ haben aber unter der über 2ω und $2\omega'$ gemachten Voraussetzung stets entgegengesetzte Vorzeichen. Man würde daher, wenn $C=0$, für $\sin^2\alpha$ einen negativen Werth erhalten, somit kann C nicht verschwinden.

Wir machen die entsprechenden Entwickelungen für die zweite Schaar. Es sei wieder:

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{du}\right)^2 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2.$$

Es wird dann in der Umgebung von a_1:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \frac{-2(2\nu+2)\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu+2)}(a_1)}{(u-a_1)^2}+\cdots,$$

und wenn wir:

$$-2(2\nu+2)\Sigma\cos^2\alpha f^{(2\nu+2)}(a_1) = C$$

setzen:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = C(\wp(u-a_1)+\wp(u-a_2)+\wp(u-a_3)+\wp(u-a_4))+\text{Const.}$$

Für $u=0$ wird:

$$\frac{dx_1}{du} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{du} = -2\sin\alpha\left\{\psi'\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)+\psi'\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\right\},$$

$$\frac{dz_1}{du} = 2i\left\{\psi'\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)-\psi'\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)\right\}.$$

Wir erhalten daher:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = C\left\{(e_2-e_1)(e_2-e_3)\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)}\right\}_{\omega,\omega'}+4\sin^2\alpha\left\{\psi'\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)+\psi'\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\right\}^2 -4\left\{\psi'\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)-\psi'\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)\right\}^2.$$

Bei dieser Schaar lässt sich $\sin^2\alpha$ als Function des Moduls $\varkappa$ so bestimmen, dass C Null wird, und man s als ein elliptisches Integral erster Art erhält. Dabei muss $\varkappa$ zwischen zwei bestimmten Grenzen liegen. Wählt man den Modul so, dass $\sin^2\alpha = 1$ wird, so erhält man die Schaar der *Serret*schen ebenen Curven, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist.

Lässt man $\sin^2\alpha$ unbestimmt, so kann man für beide Schaaren der sphärischen Curven, da:

$$\frac{\sigma^2(u)}{\sigma_2^2(u)} = \frac{1}{\wp u-e_2},$$

schreiben:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = c\cdot\frac{\wp u-a}{\wp u-e_2},$$

wo $\wp u$ die primitiven Perioden ω und ω' hat, und a eine von e_1, e_2, e_3 verschiedene Grösse ist.

Daher wird:

$$s = \sqrt{c}.\int\frac{\sqrt{\wp u-a}}{\sqrt{\wp u-e_2}}\cdot du+\text{const.}$$

Setzt man:

$$\wp u = t-\frac{e_2-a}{3}, \quad T = 4(t-\varepsilon_1)(t-\varepsilon_2)(t-\varepsilon_3),$$

$$\frac{4e_2-a}{3} = t_0, \qquad T_0 = 4(t_0-\varepsilon_1)(t_0-\varepsilon_2)(t_0-\varepsilon_3),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2e_1-a-e_3}{3}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2e_3-a-e_1}{3}, \quad \varepsilon_3 = \frac{e_2+2a}{3},$$

so wird:

$$s = \sqrt{c}.u + \frac{\sqrt{c}}{2}\cdot\frac{t_0-e_3}{\sqrt{T_0}}\left\{\int\frac{\sqrt{T}+\sqrt{T_0}}{t-t_0}\,du - \int\frac{\sqrt{T}-\sqrt{T_0}}{t-t_0}\,du\right\} + \text{const.},$$

d. h. s ist ein elliptisches Integral erster Art, vermehrt um die Differenz zweier elliptischen Integrale dritter Art.

§ 4.

Integrirt man die Functionen, welche die Coordinaten unserer sphärischen Curven darstellen, so erhält man zwei Schaaren transcendenter Curven, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist. Der Modul k ist dabei völlig beliebig und kann alle Werthe von Null bis Eins annehmen.

Die Integrale $\int y_1\,du$ und $\int z_1\,du$ stellen bei der zweiten Schaar elliptische Functionen dar, während in $\int x_1\,du$ ausser einer solchen noch ein elliptisches Integral erster und zweiter Art auftritt. Die Integralcurven der zweiten Schaar liegen daher auf algebraischen Cylindern, deren Erzeugende parallel der x-Achse ist.

Die Integralcurven beider Schaaren enthalten den willkürlichen Parameter α. Betrachtet man daher die Ausdrücke für die Coordinaten als Functionen der beiden unbeschränkt Veränderlichen α und u, so stellen sie eine transcendente Fläche dar. Es bedeutet dann u die Bogenlänge der Curven $\alpha = \text{const.}$ Die Curven $u = \text{const.}$ sind algebraisch und liegen im Fall $\nu = 0$ in Ebenen parallel der xy-Ebene.

Es sollen an dieser Stelle die beiden ersten Curven der sphärischen Schaaren, sowie die erste Integralcurve der zweiten Schaar aufgestellt werden.

Setzt man in den Ausdrücken für die Coordinaten der ersten Schaar $\nu = 0$, so wird:

$$\begin{aligned}
x &= i\cos\alpha\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)\right\},\\
y &= i\sin\alpha\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-2\eta'\right\},\\
z &= \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\\
&\qquad-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+2\eta.
\end{aligned}$$

Transformirt man zu den primitiven Perioden ω und ω', so wird:

$$x = \cos\alpha\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}\cdot\frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)} = \cos\alpha\,\frac{\sqrt{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}}{\sqrt{\wp u-e_2}},$$

$$y = \sin\alpha\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma_3(u)}{\sigma_2(u)} = \sin\alpha\sqrt{e_1-e_2}\cdot\frac{\sqrt{\wp u-e_3}}{\sqrt{\wp u-e_2}},$$

$$z = \sqrt{e_2-e_3}\,\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)} = \sqrt{e_2-e_3}\,\frac{\sqrt{\wp u-e_1}}{\sqrt{\wp u-e_2}}.$$

Die Curve ist der Durchschnitt der Kugel:

$$x^2+y^2+z^2 = e_2-e_3-\sin^2\alpha(e_2-e_1)$$

mit den drei Cylindern zweiten Grades:

$$\frac{y^2}{\sin^2\alpha(e_1-e_2)}-\frac{x^2}{\cos^2\alpha(e_1-e_2)} = 1,\quad \frac{y^2}{\sin^2\alpha(e_1-e_2)}+\frac{z^2}{e_1-e_3} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha(e_2-e_3)}+\frac{z^2}{e_2-e_3} = 1.$$

Setzt man in den Ausdrücken, welche die Coordinaten der Curven der zweiten Schaar darstellen, $\nu = 0$, so wird:

$$x = \cos\alpha\left\{\wp\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)\right\},$$

$$y = \sin\alpha\left\{\wp\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\wp\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\wp\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)\right\},$$

$$z = \quad i\left\{\wp\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-\wp\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\wp\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\wp\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)\right\}.$$

Transformirt man zu den Perioden ω und ω', so wird:

$$x = \cos\alpha\left\{(e_2-e_1)(e_2-e_3)\frac{\sigma^2u}{\sigma_2^2u}+e_2\right\} = \frac{\cos\alpha(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\wp u-e_2}+e_2\cos\alpha,$$

$$y = \sin\alpha(e_1-e_2)\sqrt{e_2-e_3}\,\frac{\sigma_3u\sigma u}{\sigma_2^2u} = \sin\alpha(e_1-e_2)\sqrt{e_2-e_3}\cdot\frac{\sqrt{\wp u-e_3}}{\wp u-e_2},$$

$$z = i(e_2-e_3)\sqrt{e_2-e_1}\,\frac{\sigma_1u\sigma u}{\sigma_2^2u} = (e_2-e_3)\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sqrt{\wp u-e_1}}{\wp u-e_2}.$$

Behält man die ursprünglichen Perioden bei, so ist die Curve der Durchschnitt der Kugel:

$$\left(x-2\,\frac{e_3\sin^2\alpha-e_1}{\cos\alpha}\right)^2+y^2+z^2 = 4\,\frac{(e_2-e_3+(e_1-e_2)\sin^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$$

mit den beiden Cylindern zweiten Grades:

$$\frac{(x+2e_3\cos\alpha)^2}{4\cos^2\alpha(e_1-e_2)^2}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha(e_1-e_2)^2} = 1,\quad \frac{(x+2e_1\cos\alpha)^2}{4\cos^2\alpha(e_2-e_3)^2}+\frac{z^2}{4(e_2-e_3)^2} = 1.$$

Beide Cylinder berühren die Kugel von innen.

Setzt man $\sin\alpha = \frac{k}{1-k} = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_2}$, so ist die Bogenlänge der Curve ein elliptisches Integral erster Art. Dabei liegt k zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$.

Die Ausdrücke:

$$x = -\cos\alpha\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-2\,\frac{e_1-e_3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\,u+\text{const.}\right\},$$
$$y = -\sin\alpha\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)+2\eta\right\},$$
$$z = -\quad i\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)-\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega'}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)-2\eta'\right\}$$

stellen eine transcendente Curve dar, deren Bogenlänge für jeden Werth von α und für jeden Werth des Moduls ein elliptisches Integral erster Art ist. Sie liegt auf dem elliptischen Cylinder:

$$\frac{y^2}{4\sin^2\alpha(e_1-e_3)}+\frac{z^2}{4(e_1-e_3)} = 1.$$

Dies ist die einfachste transcendente Curve mit genannter Eigenschaft, während die vorher erwähnte von *W. Roberts* gefundene die einfachste algebraische Curve mit jener Eigenschaft ist.

§ 5.

Sieht man die aufgestellten Integralcurven als Asymptotenlinien von Minimalflächen an, so sind letztere durch elliptische und trigonometrische Integrale darstellbar. Auf ein besonders einfaches Resultat führen hierbei die Curven der zweiten Schaar, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist.

Es mögen nämlich die analytischen Functionen x, y, z die Coordinaten einer Curve im Raume, X, Y, Z die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche eine bestimmte ihrer Normalen mit den Coordinaten-Achsen einschliesst. Stellt man dann die Ausdrücke her:

$$\xi = x-i\int\{Y\,dz-Z\,dy\},\qquad \eta = y-i\int\{Z\,dx-X\,dz\},\qquad \zeta = z-i\int\{X\,dy-Y\,dx\},$$

so repräsentiren die Gleichungen:

$$x' = \Re(\xi), \quad y' = \Re(\eta), \quad z' = \Re(\zeta),$$

worin das vorgesetzte $\Re$ bedeutet, dass der reelle Theil der nachfolgenden für ein complexes Argument entstehenden, complexen Grösse genommen werden soll — eine Minimalfläche, welche durch die Curve (xyz) hindurchgeht, und deren Normale längs derselben die Richtungscosinus X, Y, Z hat. (Siehe *H. A. Schwarz*, Miscellen aus dem Gebiet der Minimalflächen, dieses Journal, Bd. 80, pag. 280.)

Sind nun x, y, z drei reelle Functionen einer Grösse u, welche den Gleichungen:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = c, \quad \left(\frac{d^2x}{du^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{du^2}\right)^2 = c_1$$

genügen, wo c und c_1 Constante sind, und versteht man unter X, Y, Z die Richtungscosinus der Binormale der Curve (xyz), so erhält man unter Vernachlässigung von Integrationsconstanten:

$$\xi = x-i\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{dx}{du}, \quad \eta = y-i\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{dy}{du}, \quad \zeta = z-i\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{dz}{du}.$$

Es stellen dann die Gleichungen $x' = \Re(\xi)$, $y' = \Re(\eta)$, $z' = \Re(\zeta)$ eine Minimalfläche dar, deren Asymptotenlinie die Curve (xyz) ist.

Denjenigen Curven der zweiten Schaar, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Art ist, entsprechen offenbar Integralcurven, deren Coordinaten den obigen beiden Gleichungen genügen. In den Ausdrücken für ξ, η, ζ stellen dann y, z, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dz}{du}$ elliptische Functionen dar, x dagegen enthält ausser einer elliptischen Function noch ein elliptisches Integral erster und zweiter Art, jedes mit einem reellen Coefficienten multiplicirt. Es gehören daher diese Minimalflächen zu jenen, auf welchen eine Schaar algebraischer Curven liegt. (Siehe *H. A. Schwarz*, Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten, dieses Journal, Bd. 87, pag. 146.)

Man kann noch auf einem anderen Wege von den aufgestellten Ausdrücken aus zu Minimalflächen gelangen. Man setze nämlich in den Ausdrücken für die Coordinaten der sphärischen Curven $\omega+\omega'$ statt ω', so lässt sich $\sin\alpha$ als Function von k so ausdrücken, dass

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2 = 0$$

wird. Es stellen dann die reellen Theile der Grössen $\int x_1\,du$, $\int y_1\,du$, $\int z_1\,du$

für $u = p + qi$ ebenfalls eine Minimalfläche dar, auf welcher eine Schaar algebraischer Curven liegt, wenn x_1, y_1, z_1 aus den die zweite Schaar darstellenden Functionen entstanden sind.

In den beiden einfachsten Fällen wird $\sin^2\alpha = k = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$.

Verbindet man dieses Resultat mit dem des § 4, so erhält man folgenden Satz: Die Integrale der Ausdrücke, welche die Coordinaten der beiden Schaaren sphärischer Curven darstellen, repräsentiren eine Raumcurve, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Art ist, wenn man ω reell, ω' rein imaginär nimmt. Wählt man dagegen ω reell, ω' complex und setzt $u = p + qi$, so stellen die reellen Theile jener Integrale eine Minimalfläche dar, wenn der noch willkürliche Parameter α entsprechend bestimmt wird.

Berlin, im Februar 1882.

On the Parallel Surface to the Ellipsoid.

(By *Thomas Craig*, Johns Hopkins University Baltimore.)

The only paper on this subject that I know of, is by Prof. *Cayley* in the *Annali di Matematica* vol. III 1860. To this paper however I have unfortunately no access. Prof. *Cayley* has however given me many valuable suggestions concerning what has been done and what has not been done on this subject — so that I have been enabled to dispense with reference to this original memoir. The general theory of parallel surfaces has been worked upon by *Roberts* and I think also by *Clebsch* — though I am not certain that the latter wrote anything that had more than an indirect bearing on these surfaces. There are two or three brief references to the parallel to the ellipsoid in *Salmon*'s Geometry of three dimensions — I take the method of obtaining the single equation representing the surface from that treatise. I have not worked out this equation as it does not seem to be worth while; it contains nearly one hundred terms and is thus nearly useless for practical purposes. As in the case of the centro-surface and many other surfaces of high degrees, it is much more convenient to have the surface given by three equations — viz. the three equations which serve to express the rectangular coordinates of any point of the surface in terms of two independent parameters. The surface may be considered as generated by a given point on a straight line which moves so as to be always normal to the ellipsoid in a second given point. In fact every point on a straight line moving so that it is constantly normal to a given surface at a given point of the line describes a parallel surface. The parallel surface may also be conceived as the envelop of a sphere of constant radius which moves in such a manner that its centre is always on the surface of the ellipsoid — or as the locus of the centre of a sphere which is tangent to the ellipsoid and rolls over its entire surface. The surface thus generated has of course two sheets, one lying wholly without

the ellipsoid under all circumstances — while the second may lie either within or without the ellipsoid according to the size of the generating sphere. If the parallel be generated by a sphere tangent to the ellipsoid, its equation may be arrived at in the following manner. Let the ellipsoid be given by the equation:

$$U \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

and the sphere by

$$V \equiv (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - k^2 = 0$$

where k is the constant radius of the sphere — or the modulus of the parallel surface. The biquadratic determining λ so that $\lambda U + V$ shall be a cone, is obtained by making the discriminant of $\lambda U + V$ equal zero — or is

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta' = 0,$$

where

$$\Delta = \frac{-1}{a^2 b^2 c^2}, \quad \Delta' = -k^2,$$

$$\Theta = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - k^2 - (a^2 + b^2 + c^2)],$$

$$\Theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 - k^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right),$$

$$\Phi = \frac{1}{b^2 c^2} (\beta^2 + \gamma^2 - k^2) + \frac{1}{c^2 a^2} (\gamma^2 + \alpha^2 - k^2) + \frac{1}{a^2 b^2} (\alpha^2 + \beta^2 - k^2) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

This biquadratic equation may also be written

$$\frac{\alpha^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2 + \lambda} = 1 + \frac{k^2}{\lambda}.$$

The condition that the two quadrics should touch, is now found by equating to zero the discriminant of this biquadratic. The equation thus obtained is of the sixth degree in k^2 — giving thus the lengths of the six normals which may be drawn to the ellipsoid from any point of the parallel surface. In terms of the coefficients of the above biquadratic the equation of the parallel surface is

$$4(12\Delta\Delta' - 3\Theta\Theta' + \Phi^2)^3 - (72\Delta\Phi\Delta' + 9\Theta\Phi\Theta' - 27\Delta\Theta'^2 - 27\Delta'\Theta^2 - 2\Phi^3)^2 = 0$$

or, say, in the ordinary notation

$$I^3 - 27\mathfrak{J}^2 = 0.$$

The surface is of the twelfth degree, I is of the fourth and $\mathfrak{J}$ of the sixth

degree. The cuspidal line on the surface is given as the complete intersection of a quartic and sextic surface, viz.

$$I = 0, \quad \mathfrak{J} = 0;$$

the cuspidal line is thus of the twenty-fourth degree.

On expanding the above equation, the quantities α, β, γ become the current coordinates of points on the parallel surface, — replace them by (x, y, z) and call the coordinates of a point on the ellipsoid (ξ, η, ζ). The coordinates (x, y, z) are to be expressed as functions of (ξ, η, ζ); or, denoting by u, v the independent parameters determining the lines of curvature on the ellipsoid, we have to express x, y, z in terms of these quantities. We thus obtain the three equations spoken of above for the representation of the surface. Before doing this however we may obtain the differential equation of the surface. Consider the parallel as generated by the motion of a sphere whose centre is always on the surface of the ellipsoid — the equation of the ellipsoid may be written

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}-1 = 0$$

(using hereafter a, b, c instead of a^2, b^2, c^2); the sphere is

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-k^2 = 0.$$

Writing as usual

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

we have

$$(x-\xi)+p(z-\zeta) = 0,$$
$$(y-\eta)+q(z-\zeta) = 0.$$

These equations combined with that of the sphere give at once for x, y, z the values:

$$x = \xi-\frac{pk}{L}, \quad y = \eta-\frac{qk}{L}, \quad z = \zeta+\frac{k}{L},$$

where

$$L = \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

The differential equation of the surface is at once seen to be

$$\frac{(xL+pk)^2}{a}+\frac{(yL+qk)^2}{b}+\frac{(zL-k)^2}{c} = 1.$$

Since $\frac{p}{L}$, $\frac{q}{L}$, $\frac{-1}{L}$ are the direction cosines of the normal to the ellipsoid

at the point (ξ, η, ζ), they are respectively equal to

$$\frac{-P\xi}{a}, \quad \frac{-P\eta}{b}, \quad \frac{-P\zeta}{c},$$

where

$$P = \left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

is the central perpendicular on the tangent plane at the point (ξ, η, ζ). We have now

$$x = \xi+\frac{kP\xi}{a}, \quad y = \eta+\frac{kP\eta}{b}, \quad z = \zeta+\frac{kP\zeta}{c}.$$

Suppose a quantity u lying between $-a$ and $-b$; also v lying between $-b$ and $-c$, then

$$\frac{\xi^2}{a+u}+\frac{\eta^2}{b+u}+\frac{\zeta^2}{c+u} = 1, \quad \frac{\xi^2}{a+v}+\frac{\eta^2}{b+v}+\frac{\zeta^2}{c+v} = 1$$

are respectively the equations of the two-sheeted and one-sheeted hyperboloids which are confocal to the given ellipsoid. Writing for brevity

$$\alpha = b-c, \quad \beta = c-a, \quad \gamma = a-b,$$

we have for ξ, η, ζ the known values

$$\xi^2 = \frac{a(a+u)(a+v)}{-\beta\gamma}, \quad \eta^2 = \frac{b(b+u)(b+v)}{-\gamma\alpha}, \quad \zeta^2 = \frac{c(c+u)(c+v)}{-\alpha\beta}.$$

Considering u as constant, the locus of (ξ, η, ζ) is the intersection of the ellipsoid with the confocal two-sheeted hyperboloid

$$\frac{\xi^2}{a+u}+\frac{\eta^2}{b+u}+\frac{\zeta^2}{c+u} = 1,$$

i. e. this is one of the curves of curvature on the ellipsoid; and so if v is constant, the locus of (ξ, η, ζ) is the intersection of the ellipsoid with the confocal one-sheeted hyperboloid

$$\frac{\xi^2}{a+v}+\frac{\eta^2}{b+v}+\frac{\zeta^2}{c+v} = 1,$$

viz. this is one of the second system of lines of curvature. The element of length of a curve on the ellipsoid is

$$d\sigma^2 = E\,du^2+G\,dv^2,$$

where

$$E = \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2, \quad G = \left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2.$$

The values of E and G are readily found and in fact are known to be

$$E=\tfrac{1}{4}\frac{u(u-v)}{a+u.b+u.c+u},\quad G=\tfrac{1}{4}\frac{v(v-u)}{a+v.b+v.c+v},$$

or, denoting by P_1 and P_2 the central perpendiculars on the tangent planes to the two hyperboloids at the point (ξ,η,ζ), viz.

$$P_1=\left[\frac{\xi^2}{(a+u)^2}+\frac{\eta^2}{(b+u)^2}+\frac{\zeta^2}{(c+u)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},\ P_2=\left[\frac{\xi^2}{(a+v)^2}+\frac{\eta^2}{(b+v)^2}+\frac{\zeta^2}{(c+v)^2}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

we have

$$E=\frac{1}{4P_1^2},\quad G=\frac{1}{4P_2^2}.$$

The element of length on the parallel surface may be written

$$ds^2=\mathfrak{E}du^2+\mathfrak{G}dv^2+2\mathfrak{F}du\,dv,$$

where

$$\mathfrak{E}=\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2,\ \text{ etc.}$$

The values of x, y, z expressed as functions of ξ, η, ζ are readily found to be given by the equations:

$$x=\sqrt{\frac{a.a+u.a+v}{-\beta\gamma}}\left(1+\frac{k}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right),$$

$$y=\sqrt{\frac{b.b+u.b+v}{-\gamma\alpha}}\left(1+\frac{k}{b}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right),$$

$$z=\sqrt{\frac{c.c+u.c+v}{-\alpha\beta}}\left(1+\frac{k}{c}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right).$$

The differential coefficients of x, y, z with respect to u, v are simple enough in form, but it is not necessary to do more than indicate them as follows:

$$\frac{dx}{du}=\frac{d\xi}{du}\left[1+\frac{kP}{a}\right]+\frac{\xi k}{a}\frac{dP}{du},\quad \frac{dx}{dv}=\frac{d\xi}{dv}\left[1+\frac{kP}{a}\right]+\frac{\xi k}{a}\frac{dP}{dv},\ \text{ etc.}$$

The lines of curvature on the parallel surface correspond to the lines of curvature on the ellipsoid. For the surfaces of normals along the lines of curvature form with the parallel surface a set of orthogonal surfaces and obviously intersect the latter in its lines of curvature. This may of course be announced as a general theorem — viz. that the lines of curvature on a surface parallel to a given surface correspond to the lines of curvature on the given surface. We must of course have now $\mathfrak{F}=0$; it is easy however and instructive to show that $\mathfrak{F}$ actually does vanish. We have:

at the point (ξ, η, ζ), they are respectively equal to

$$\frac{-P\xi}{a},\quad \frac{-P\eta}{b},\quad \frac{-P\zeta}{c};$$

where

$$\ldots + \frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{dv} = 0,$$

$$P = \Big(\frac{\xi^2}{\ldots}$$

is the central perpendicular ... We have now

$$\ldots \frac{d\eta}{du}\frac{d\eta}{dv} + \frac{1}{c}\frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{dv}\Big]$$

$$x = \ldots + \frac{1}{b^2}\frac{d\eta}{du}\frac{d\eta}{dv} + \frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{du}\frac{d\zeta}{dv}\Big] - \frac{k^2}{P^2}\frac{dP}{du}\frac{dP}{dv}.$$

Suppose a qu... $-b$ and $-$ ... of this is:

$$\frac{-k^2}{P^2}\frac{dP}{du}\frac{dP}{dv} = \frac{k^2}{4}\frac{1}{uv} = \frac{k^2P^2}{4abc}.$$

... reduces by a known formula (*Salmon*'s Geom. of three Dimensions, page 126); viz. since

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{2\sqrt{-\beta\gamma}}\sqrt{\frac{a.a+u}{a+v}} = \frac{1}{2}\frac{\xi}{a+u},\quad \text{etc.}$$

we have by substitution of the first form of these values in the first term of $\mathfrak{F}$ the quantity

$$-\tfrac{2}{4}kP\Big[\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\Big] = 0.$$

Using the second form of the values of $\frac{d\xi}{du}$ etc. we must have

$$\frac{d\xi^2}{a.a+u.a+v}+\frac{d\eta^2}{b.b+u.b+v}+\frac{\zeta^2}{c.c+u.c+v} = 0,$$

the formula just referred to. The second term in $\mathfrak{F}$ gives

$$\frac{k^2P^2}{4}\Big[\frac{bc\alpha+ca\beta+ab\gamma}{abc.\alpha\beta\gamma}\Big] = \frac{k^2P^2}{4abc}.$$

This taken with the third term gives as it should $\mathfrak{F} = 0$. This second term in $\mathfrak{F}$ gives rise to a simple formula which I don't remember to have seen anywhere, viz.

$$\frac{\xi^2}{a^2(a+u)(a+v)}+\frac{\eta^2}{b^2(b+u)(b+v)}+\frac{\zeta^2}{c^2(c+u)(c+v)} = \frac{1}{abc}.$$

Of course the vanishing of $\mathfrak{F}$ is not a sufficient condition in order that the lines corresponding on the parallel surface to the lines $u =$ const. and $v =$ const. on the ellipsoid should be lines of curvature; the remaining condition however will be given presently. The values of $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{G}$ are

given by the equations:

$$\mathfrak{E} = E+2kP\left[\frac{1}{a}\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2\right]$$
$$+k^2P^2\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2\right],$$
$$\mathfrak{G} = G+2kP\left[\frac{1}{a}\left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2\right]$$
$$+k^2P^2\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\xi}{dv}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2\right].$$

ituting for $\frac{d\xi}{du}$ etc. the values $\frac{1}{2}\frac{\xi}{a+u}$ etc. and employing a known formula of reduction, we find

$$\left\{\frac{1}{a}\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{d\eta}{du}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2\right\} = -\frac{1}{4uP_1^2}.$$

For the reduction of the third term in the expression giving $\mathfrak{E}$ proceed as follows. This term is equal to

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\xi^2}{a^2(a+u)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(b+u)^2}+\frac{\zeta^2}{c^2(c+u)^2}\right\}.$$

Now

$$\frac{1}{P^2} = \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2},\quad \frac{1}{P_1^2} = \frac{\xi^2}{(a+u)^2}+\frac{\eta^2}{(b+u)^2}+\frac{\zeta^2}{(c+u)^2};$$

adding these together and reducing gives

$$\frac{\xi^2}{a^2(a+u)^2}(2a^2+2au)+\frac{\xi^2u^2}{a^2(a+u)^2}+(\text{terms in } \eta \text{ and } \zeta).$$

The first of these terms is

$$= \frac{2a\xi^2(a+u)}{a^2(a+u)^2} = \frac{2\xi^2}{a(a+u)}.$$

Since

$$\frac{\xi^2}{a(a+u)}+\frac{\eta^2}{b(b+u)}+\frac{\zeta^2}{c(c+u)} = 0,$$

we have as the result of the above addition

$$\frac{\xi^2}{a^2(a+u)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(b+u)^2}+\frac{\zeta^2}{c^2(c+u)^2} = \frac{1}{u^2}\left(\frac{P^2+P_1^2}{P^2P_1^2}\right),$$

and similarly

$$\frac{\xi^2}{a^2(a+v)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(b+v)^2}+\frac{\zeta^2}{c^2(c+v)^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{P^2+P_1^2}{P^2P_1^2}\right).$$

These formulas I think are new — at all events they are not contained in the list of similar formulas given by *Jacobi*. We have finally for the

fourth terms in $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{G}$

$$\frac{k^2}{P^2}\left(\frac{dP}{du}\right)^2 = \frac{k^2}{4u^2}, \quad \frac{k^2}{P^2}\left(\frac{dP}{dv}\right)^2 = \frac{k^2}{4v^2}.$$

Making all these substitutions in the equations for $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{G}$, and they become

$$\mathfrak{E} = E + \frac{1}{4P_1^2}\left[\frac{-2kP}{u} + \frac{k^2P^2}{u^2}\right], \quad \mathfrak{G} = G + \frac{1}{4P_2^2}\left[\frac{-2kP}{v} + \frac{k^2P^2}{v^2}\right],$$

or, since

$$E = \frac{1}{4P_1^2}, \quad G = \frac{1}{4P_2^2},$$

these become:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4P_1^2}\left(1 - \frac{kP}{u}\right)^2, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{4P_2^2}\left(1 - \frac{kP}{v}\right)^2.$$

The element of length of a curve on the parallel surface is then

$$ds^2 = \left(1 - \frac{kP}{u}\right)^2 \frac{du^2}{4P_1^2} + \left(1 - \frac{kP}{v}\right)^2 \frac{dv^2}{4P_2^2}.$$

It will be convenient to write

$$abc = \Delta^2, \quad a+u.b+u.c+u = \Delta_1^2, \quad a+v.b+v.c+v = \Delta_2^2.$$

The element of area of the ellipsoid is given by

$$d\Sigma = \frac{1}{4}\cdot\frac{(u-v)\sqrt{uv}}{\sqrt{-\Delta_1^2\Delta_2^2}}\,du\,dv.$$

If dS is the corresponding element of area on the parallel surface, we have the relation

$$\frac{dS}{d\Sigma} = -\begin{vmatrix} \lambda, & \frac{dx}{d\xi}, & \frac{dx}{d\eta}, & \frac{dx}{d\zeta} \\ \mu, & \frac{dy}{d\xi}, & \frac{dy}{d\eta}, & \frac{dy}{d\zeta} \\ \nu, & \frac{dz}{d\xi}, & \frac{dz}{d\eta}, & \frac{dz}{d\zeta} \\ & \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix},$$

where λ, μ, ν are the direction-cosines of the normal to each surface, and are given by the equations:

$$\lambda = \cos\theta_1 = \frac{P\xi}{a}, \quad \mu = \cos\theta_2 = \frac{P\eta}{b}, \quad \nu = \cos\theta_3 = \frac{P\zeta}{c}.$$

Now

$$\frac{dx}{d\xi} = 1 + \frac{kP}{a} - \frac{kP}{a}\cdot\frac{\xi^2P^2}{a^2}, \quad \frac{dx}{d\eta} = -\frac{kP}{b}\cdot\frac{\xi\eta P^2}{ab}, \quad \frac{dx}{d\zeta} = -\frac{kP}{c}\cdot\frac{\zeta\xi P^2}{ca},$$

or

$$\frac{dx}{d\xi} = 1+\frac{kP}{a}-\frac{kP}{a}\cos^2\theta_1, \quad \frac{dx}{d\eta} = -\frac{kP}{b}\cos\theta_1\cos\theta_2, \quad \frac{dx}{d\zeta} = -\frac{kP}{c}\cos\theta_3\cos\theta_1.$$

The above determinant becomes now

$$\begin{vmatrix} \cos\theta_1, & 1+\frac{kP}{a}-\frac{kP}{a}\cos^2\theta_1, & \frac{-kP}{b}\cos\theta_1\cos\theta_2, & \frac{-kP}{c}\cos\theta_1\cos\theta_3 \\ \cos\theta_2, & \frac{-kP}{a}\cos\theta_1\cos\theta_2, & 1+\frac{kP}{b}-\frac{kP}{b}\cos^2\theta_2, & \frac{-kP}{c}\cos\theta_2\cos\theta_3 \\ \cos\theta_3, & \frac{-kP}{a}\cos\theta_1\cos\theta_3, & \frac{-kP}{b}\cos\theta_2\cos\theta_3, & 1+\frac{kP}{c}-\frac{kP}{c}\cos^2\theta_3 \\ & \cos\theta_1, & \cos\theta_2, & \cos\theta_3 \end{vmatrix}.$$

Multiply the first row by $\cos\theta_1$, the second by $\cos\theta_2$, the third by $\cos\theta_3$, and subtract the sum from the last row; in the result the last row will be -1, 0, 0, 0. Again multiply the first row of the new determinant by $\cos\theta_1$, the second by $\cos\theta_2$ and the third by $\cos\theta_3$, and add to the third row — we have then:

$$\frac{-1}{\cos\theta_3}\begin{vmatrix} 1+\frac{kP}{a}-\frac{kP}{a}\cos^2\theta_1, & \frac{-kP}{b}\cos\theta_1\cos\theta_2, & \frac{-kP}{c}\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ \frac{-kP}{a}\cos\theta_1\cos\theta_2, & 1+\frac{kP}{b}-\frac{kP}{b}\cos^2\theta_2, & \frac{-kP}{c}\cos\theta_2\cos\theta_2 \\ \cos\theta_1, & \cos\theta_2, & \cos\theta_3 \end{vmatrix}.$$

Multiply the first row by $\cos\theta_2$ and the second by $\cos\theta_1$, and subtract the last result from the first; expanding and reducing the resulting determinant, and we have

$$-\left\{1+kP\left[\frac{\sin^2\theta_1}{a}+\frac{\sin^2\theta_2}{b}+\frac{\sin^2\theta_3}{c}\right]+k^2P^2\left[\frac{\cos^2\theta_1}{bc}+\frac{\cos^2\theta_2}{ca}+\frac{\cos^2\theta_3}{ab}\right]\right\}.$$

Now

$$\frac{\cos^2\theta_1}{bc}+\frac{\cos^2\theta_2}{ca}+\frac{\cos^2\theta_3}{ab} = \frac{P^2}{\Delta^2}\left[\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}\right] = \frac{P^2}{\Delta^2} = \frac{1}{uv};$$

and

$$\frac{\sin^2\theta_1}{a}+\frac{\sin^2\theta_2}{b}+\frac{\sin^2\theta_3}{c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-P^2\left[\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right];$$

but

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} = \frac{1}{P^2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{u+v}{uv}\right].$$

So this last becomes simply

$$-\frac{u+v}{uv}.$$

Collecting the terms we have

$$-\left\{1-kP\frac{u+v}{uv}+\frac{k^2P^2}{uv}\right\} = -\left\{1-\frac{k\Delta(u+v)}{uv\sqrt{uv}}+\frac{k^2\Delta^2}{u^2v^2}\right\},$$

consequently

$$\frac{dS}{d\Sigma} = \left\{1-\frac{k\Delta(u+v)}{uv\sqrt{uv}}+\frac{k^2\Delta^2}{u^2v^2}\right\},$$

or, after easy reductions,

$$dS = d\Sigma-\tfrac{1}{4}\left[\frac{k\Delta(u^2-v^2)}{uv\sqrt{-\Delta_1^2\Delta_2^2}}+\frac{k^2\Delta^2(u-v)}{uv\sqrt{uv}\sqrt{-\Delta_1^2\Delta_2^2}}\right]du\,dv.$$

Denote for the moment by a', b', c' the derivatives of ξ, η, ζ with respect to u, and by a'', b'', c'' the derivatives of the same quantities with respect to v; also let α', β', γ' and α'', β'', γ'' denote the corresponding second derivatives with respect to u and to v; now compute the determinants

$$E' = \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad G' = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Write

$$A = b'c''-b''c', \quad B = c'a''-c''a', \quad C = a'b''-a''b'.$$

Now we have

$$a' = \tfrac{1}{2}\frac{\xi}{a+u}, \quad b' = \tfrac{1}{2}\frac{\eta}{b+u}, \quad c' = \tfrac{1}{2}\frac{\zeta}{c+u},$$

$$a'' = \tfrac{1}{2}\frac{\xi}{a+v}, \quad b'' = \tfrac{1}{2}\frac{\eta}{b+v}, \quad c'' = \tfrac{1}{2}\frac{\zeta}{c+v},$$

$$\alpha' = -\tfrac{1}{4}\frac{\xi}{(a+u)^2}, \quad \beta' = -\tfrac{1}{4}\frac{\eta}{(b+u)^2}, \quad \gamma' = -\tfrac{1}{4}\frac{\zeta}{(c+u)^2},$$

$$\alpha'' = -\tfrac{1}{4}\frac{\xi}{(a+v)^2}, \quad \beta'' = -\tfrac{1}{4}\frac{\eta}{(b+v)^2}, \quad \gamma'' = -\tfrac{1}{4}\frac{\zeta}{(c+v)^2},$$

also, α, β, γ having their original meanings:

$$A = \frac{\xi(u-v)}{\alpha\beta\gamma.\xi\eta\zeta}, \quad B = \frac{\eta(u-v)}{\alpha\beta\gamma.\xi\eta\zeta}, \quad C = \frac{\zeta(u-v)}{\alpha\beta\gamma.\xi\eta\zeta}.$$

Now

$$A^2+B^2+C^2 = EG;$$

substituting for ξ, η, ζ their values we have

$$EG = \frac{1}{16}\cdot\frac{-uv(u-v)^2}{\Delta_1^2\Delta_2^2},$$

and

$$E\sqrt{EG} = \frac{1}{16}\cdot\frac{u\sqrt{-uv}(u-v)^2}{\varDelta_1^2\varDelta_2^2}, \quad G\sqrt{EG} = \frac{1}{16}\cdot\frac{v\sqrt{-uv}(u-v)^2}{\varDelta_1^2\varDelta_2^2}.$$

We also find readily

$$E' = -\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(u-v)\sqrt{-\alpha^2\beta^2\gamma^2}}{\alpha\beta\gamma\varDelta\varDelta_1\varDelta_2}\cdot\frac{1}{P_1^2}, \quad G' = -\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(u-v)\sqrt{-\alpha^2\beta^2\gamma^2}}{\alpha\beta\gamma\varDelta\varDelta_1\varDelta_2}\cdot\frac{1}{P_2^2}.$$

Now denoting by r' and r'' the principal radii of curvature of the ellipsoid at the point (ξ, η, ζ) we have

$$\frac{1}{r'} = \frac{E'}{E\sqrt{EG}}, \quad \frac{1}{r''} = \frac{G'}{G\sqrt{EG}}.$$

Making the necessary substitutions these become

$$\frac{1}{r'} = \frac{-4\varDelta_1\varDelta_2}{\varDelta u(u-v)\sqrt{uv}}\cdot\frac{1}{P_1^2}, \quad \frac{1}{r''} = \frac{-4\varDelta_1\varDelta_2}{\varDelta v(u-v)\sqrt{uv}}\cdot\frac{1}{P_2^2},$$

and for the measure of curvature of the ellipsoid at this point we have

$$K = \frac{1}{r'r''} = \frac{E'G'}{E^2G^2} = \frac{16\varDelta_1^2\varDelta_2^2}{\varDelta^2u^2v^2(u-v)^2}\cdot\frac{1}{P_1^2}\cdot\frac{1}{P_2^2},$$

or since

$$P^2 = \frac{\varDelta^2}{uv}, \quad u^2v^2 = \frac{\varDelta^4}{P^4},$$

this becomes

$$K = \frac{16P^4}{\varDelta^4}\cdot\frac{1}{(u-v)^2}\cdot\frac{\varDelta_1^2}{P_1^2}\cdot\frac{\varDelta_2^2}{P_2^2}.$$

For a given point on the ellipsoid we have then that the measure of curvature varies as the fourth power of the central perpendicular upon the tangent plane at the point.

We have now to apply the same kind of process to the parallel surface. The quantities which for the parallel surface correspond to

$$E, \ G, \ A, \ B, \ C, \ E', \ G'$$

on the ellipsoid, may be denoted by

$$\mathfrak{E}, \ \mathfrak{G}, \ \mathfrak{A}, \ \mathfrak{B}, \ \mathfrak{C}, \ \mathfrak{E}', \ \mathfrak{G}'.$$

We know that $F = F' = 0$, and we have proved that $\mathfrak{F} = 0$; in order to complete the algebraical proof that the lines of curvature on the parallel surface correspond to the lines of curvature on the ellipsoid, it is only necessary to show that $\mathfrak{F}' = 0$, i. e.

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv} & \frac{d^2y}{du\,dv} & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

For $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ we have the values

$$\mathfrak{A} = \frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}, \quad \mathfrak{B} = \frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}, \quad \mathfrak{C} = \frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.$$

Writing a', b', c' for

$$\left(1+\frac{kP}{a}\right), \quad \left(1+\frac{kP}{b}\right), \quad \left(1+\frac{kP}{c}\right),$$

it is not difficult to see that $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ are given by the equations

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} b'c', & \frac{-k\eta c'}{b}, & \frac{-k\zeta b'}{c} \\ \frac{dP}{du}, & \frac{d\eta}{du}, & \frac{d\zeta}{du} \\ \frac{dP}{dv}, & \frac{d\eta}{dv}, & \frac{d\zeta}{dv} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} c'a', & \frac{-k\zeta a'}{c}, & \frac{-k\xi c'}{a} \\ \frac{dP}{du}, & \frac{d\zeta}{du}, & \frac{d\xi}{du} \\ \frac{dP}{dv}, & \frac{d\zeta}{dv}, & \frac{d\xi}{dv} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} a'b', & \frac{-k\xi b'}{a}, & \frac{-k\eta a'}{b} \\ \frac{dP}{du}, & \frac{d\xi}{du}, & \frac{d\eta}{du} \\ \frac{dP}{dv}, & \frac{d\xi}{dv}, & \frac{d\eta}{dv} \end{vmatrix}.$$

In order to find the radii and measure of curvature, it is necessary to compute the values of

$$\mathfrak{E}' = \frac{d^2x}{du^2}\mathfrak{A} + \frac{d^2y}{du^2}\mathfrak{B} + \frac{d^2z}{du^2}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{G}' = \frac{d^2x}{dv^2}\mathfrak{A} + \frac{d^2y}{dv^2}\mathfrak{B} + \frac{d^2z}{dv^2}\mathfrak{C}.$$

After some easy but rather tedious reductions the following values are found for these quantities:

$$\mathfrak{E}' = \begin{vmatrix} a'b'c', & \frac{-\xi kb'c'}{a}, & \frac{-\eta kc'a'}{b}, & \frac{-\zeta ka'b'}{c} \\ \frac{d^2P}{du^2}, & \frac{d^2\xi}{du^2}, & \frac{d^2\eta}{du^2}, & \frac{d^2\zeta}{du^2} \\ \frac{dP}{du}, & \frac{d\xi}{du}, & \frac{d\eta}{du}, & \frac{d\zeta}{du} \\ \frac{dP}{dv}, & \frac{d\xi}{dv}, & \frac{d\eta}{dv}, & \frac{d\zeta}{dv} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{G}' = \begin{vmatrix} a'b'c', & \dfrac{-\xi k b'c'}{a}, & \dfrac{-\eta k c'a'}{b}, & \dfrac{-\zeta k a'b'}{c} \\ \dfrac{d^2P}{dv^2}, & \dfrac{d^2\xi}{dv^2}, & \dfrac{d^2\eta}{dv^2}, & \dfrac{d^2\zeta}{dv^2} \\ \dfrac{dP}{du}, & \dfrac{d\xi}{du}, & \dfrac{d\eta}{du}, & \dfrac{d\zeta}{du} \\ \dfrac{dP}{dv}, & \dfrac{d\xi}{dv}, & \dfrac{d\eta}{dv}, & \dfrac{d\zeta}{dv} \end{vmatrix}.$$

To these may be added

$$\mathfrak{F}' = \begin{vmatrix} a'b'c', & \dfrac{-\xi k b'c'}{a}, & \dfrac{-\eta k c'a'}{b}, & \dfrac{-\zeta k a'b'}{c} \\ \dfrac{d^2P}{du\,dv}, & \dfrac{d^2\xi}{du\,dv}, & \dfrac{d^2\eta}{du\,dv}, & \dfrac{d^2\zeta}{du\,dv} \\ \dfrac{dP}{du}, & \dfrac{d\xi}{du}, & \dfrac{d\eta}{du}, & \dfrac{d\zeta}{du} \\ \dfrac{dP}{dv}, & \dfrac{d\xi}{dv}, & \dfrac{d\eta}{dv}, & \dfrac{d\zeta}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

It is obvious that each quantity of the series $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{G}'$ is equal to the corresponding quantity in the series

$$A,\ \ B,\ \ C,\ \ E,\ \ G,\ \ E',\ \ G'$$

increased by certain quantities depending upon P for their values. The reductions that are necessary in order to find the values of the principal radii of curvature, say $\mathfrak{R}'$ and $\mathfrak{R}''$, and the measure of curvature $\mathfrak{K}$, are not difficult, but as I have not been able to reduce any of these quantities to a simple form, I forbear giving any of the work; the formulas are of course:

$$\mathfrak{R}' = \frac{\mathfrak{E}'}{\mathfrak{E}\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}},\quad \mathfrak{R}'' = \frac{\mathfrak{G}'}{\mathfrak{G}\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}},\quad \mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{E}'\mathfrak{G}'}{(\mathfrak{E}\mathfrak{G})^2}.$$

The equation of the lines of curvature on the parallel surface is

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C} \\ d\mathfrak{A}, & d\mathfrak{B}, & d\mathfrak{C} \end{vmatrix} = 0;$$

as has been already mentioned, these lines are the lines on the parallel corresponding to the lines of curvature on the ellipsoid. The equation of the lines of curvature on any surface may be written in the form

$$\begin{vmatrix} du^2, & -du\,dv, & dv^2 \\ E, & F, & G \\ E', & F', & G' \end{vmatrix} = 0,$$

where u and v no longer refer to the lines of curvature themselves; so in this case the equation of the lines of curvature may be written

$$\begin{vmatrix} du^2, & -du\,dv, & dv^2 \\ \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{E}', & \mathfrak{F}', & \mathfrak{G}' \end{vmatrix} = 0,$$

with the above values of $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, ... $\mathfrak{G}'$, and where $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}'$ are no longer equal to zero.

In the following pages I have written instead of a, b, c the ordinary values a^2, b^2, c^2 as they are a little more convenient to work with for some reasons and the formulas are all simple.

Principal sections of the surface. These consist in part of the parallels to the principal sections of the ellipsoid and in part of other curves constructed as follows. Since the surface is found by drawing normals to the ellipsoid at every point and on these normals laying off equal distances, it is evident that the principal sections will, in addition to the parallels to the principal ellipses, consist of curves corresponding to those curves in the ellipsoid along which the normals of length R have their extremities in the planes xy, yz, zx *). Take first the principal section in the plane xy. The parallel to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

is found by forming the discriminant of

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t} = 1+\frac{R^2}{t}$$

with respect to t (vide *Salmon*'s Conic Sections, 6th edition, pages 337 and 338). This curve is known to be a curve of the eighth degree and is easily constructed. To find the remaining part of this principal section, proceed as follows. The equations of the normal at any point (ξ, η, ζ) of the ellipsoid are

$$x = \xi\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right), \quad y = \eta\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right), \quad z = \zeta\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right),$$

(x, y, z) being any point on the normal, and λ an indeterminate quantity. In order that this point shall lie in xy, we place $z = 0$, which gives

*) I am indebted to Prof. *Cayley* for this remark.

$\lambda = -c^2$. The length of the intercept between the point (ξ, η, ζ) and the plane xy is now found to be $= \frac{c^2}{P}$, and this, by the conditions of the problem, is to be $= R$, which gives $P = \frac{c^2}{R}$. We have now

$$x = \xi\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right), \quad y = \eta\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right),$$

giving

$$\frac{x}{a^2-c^2} = \frac{\xi}{a^2}, \quad \frac{y}{b^2-c^2} = \frac{\eta}{b^2}.$$

Now

$$\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4} = \frac{1}{P^2} = \frac{R^2}{c^4},$$

from which

$$\frac{\zeta}{c^2} = \sqrt{\frac{R^2}{c^4}-\frac{\xi^2}{a^4}-\frac{\eta^2}{b^4}}.$$

Substituting the above values of $\frac{\xi}{a^2}$, $\frac{\eta}{b^2}$, this becomes

$$\frac{\zeta}{c^2} = \sqrt{\frac{R^2}{c^4}-\frac{x^2}{(a^2-c^2)^2}-\frac{y^2}{(b^2-c^2)^2}}.$$

Substituting these values of ξ, η, ζ in the equation of the ellipsoid

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

we have at once

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2} = 1-\frac{R^2}{c^2} \text{*)}$$

or

$$\frac{x^2}{\frac{(a^2-c^2)(c^2-R^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{(b^2-c^2)(c^2-R^2)}{c^2}} = 1.$$

For $R < c$ this is a real ellipse, and for $R > c$ an imaginary ellipse. This line is generated twice — once for the half of the ellipsoid above the plane xy and once of the half below xy — and is consequently a double line on the surface. Consider now the section in the plane zx. This is the parallel to the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

---

*) It is easy to show that this is the locus of the centre of a sphere of radius R lying wholly within the ellipsoid and having double contact with it.

formed as above indicated, and another conic formed by the extremities of the normals of length R which terminate in the plane zx. In the equations of the normal we must have $y=0$ and consequently $\lambda=-b^2$. This gives

$$\xi=\frac{a^2x}{a^2-b^2},\quad \zeta=\frac{c^2z}{c^2-b^2},\quad \eta=b^2\sqrt{\frac{R^2}{b^4}-\frac{\xi^2}{a^4}-\frac{\zeta^2}{c^4}}$$

or

$$\eta = b^2\sqrt{\frac{R^2}{b^4}-\frac{x^2}{(a^2-b^2)^2}-\frac{z^2}{(c^2-b^2)^2}}.$$

Substituting these in

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

we have

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2-b^2} = 1-\frac{R^2}{b^2}$$

or

$$\frac{x^2}{\frac{(a^2-b^2)(b^2-R^2)}{b^2}}+\frac{z^2}{\frac{(c^2-b^2)(b^2-R^2)}{b^2}} = 1.$$

This is a real hyperbola both for $R<b$ and for $R>b$. Similarly the section in the plane yz is found to consist of the parallel to the ellipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

and the conic

$$\frac{y^2}{\frac{(b^2-a^2)(a^2-R^2)}{a^2}}+\frac{z^2}{\frac{(c^2-a^2)(a^2-R^2)}{a^2}} = 1.$$

This is an imaginary ellipse for $R<a$ and a real ellipse for $R>a$.

Aside then from the parallels to the principal sections of the ellipsoid, the principal sections of the parallel surface consist of a real hyperbola in the plane zx, with a real ellipse in xy and an imaginary ellipse in yz or an imaginary ellipse in xy and an imaginary ellipse in yz, if $a>R>c$, or an imaginary ellipse in xy and a real ellipse in yz, if $R>a$ *).

These conics are all double lines on the surface either one real and two imaginary or two real and one imaginary; further they each touch the parallel to the corresponding principal ellipse in four points (*Salmon* page 437).

---

*) It is easy to see that the ellipse in yz is the locus of the centre of a sphere of radius R lying wholly without the ellipsoid and having double contact with it.

For $R = 0$ these nodal conics become the focal conics of the ellipsoid and for other values of R they are confocal with the focal conics. The cases of special interest to examine are when R is equal to a principal radius of curvature at the extremity of an axis of the ellipsoid, i. e.

$$R = \frac{c^2}{a}, \quad \frac{c^2}{b}, \quad \frac{b^2}{c}, \quad \frac{b^2}{a}, \quad \frac{a^2}{c}, \quad \frac{a^2}{b}.$$

It will be desirable to arrange these first in order of magnitude; as it is of course impossible to do this in general, I will choose an arrangement and determine the necessary conditions that it may be the arrangement desired. Suppose then that

$$\frac{c^2}{a}, \quad \frac{c^2}{b}, \quad \frac{b^2}{a}, \quad \frac{b^2}{c}, \quad \frac{a^2}{b}, \quad \frac{a^2}{c}$$

are in descending order of magnitude; it is easily seen that the only necessary condition for this is $b^3 > ac^2$.

Take first then the case of $R = \frac{c^2}{a}$; the principal section in the plane of xy consists of the parallel to

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

and the ellipse

$$\frac{x^2}{\frac{(a^2-c^2)^2}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}{a^2}} = 1.$$

The parallels to the principal sections of the ellipsoid may for convenience be called the principal parallels — then the principal section of the parallel surface consists of a principal parallel and a nodal conic. The nodal conic for $R = \frac{c^2}{a}$ has just been written; the principal parallel is a curve in shape very like an ellipse and having triple points at the extremities of its longer axis — that of x. (It will be convenient to say nothing about the outside sheet of the parallel surface as it possesses no singularities; so when the description of a principal parallel is given, it will be understood to apply only to the inner branch of the curve.) The nodal conic touches the principal parallel at these triple points. The coordinates of the triple points are

$$y = z = 0, \quad x = \pm\left(a - \frac{c^2}{a}\right);$$

these points are therefore each to count as five on this principal section. The principal parallels in xz and yz are similar to ellipses, and the same remarks apply to them as to the principal parallel in xy. The nodal conic

in yz is imaginary and in zx is the hyperbola

$$\frac{x^2}{\frac{(a^2-b^2)(b^4-c^4)}{a^2b^2}} - \frac{z^2}{\frac{(b^2-c^2)(b^4-c^4)}{a^2b^2}} = 1.$$

In order to obtain a clear idea of this hyperbola and how it has been obtained, conceive it drawn, and at any point of it as a centre construct a sphere of radius R; let this sphere move keeping its centre upon the hyperbola, it will then generate a tubular surface, which will cut the ellipsoid in general in two disconnected curves lying one on each side of the plane xy and each equally divided by the plane xz. The normals to the ellipsoid at each point of these curves trace out the nodal hyperbola in the plane zx. It is clear that since in general no point of the curves on the ellipsoid lies in xy, no real point of the nodal hyperbola can belong to the axis of x — so the real part of the nodal hyperbola consists of two finite and disconnected portions of the curve which are symmetrically situated with reference to the axis of x.

In order to show that the tubular surface in general cuts the ellipsoid in two distinct curves, it will first be desirable to find how far the vertex of the hyperbola may move from the origin as R increases from zero up to b. It is obviously not necessary to increase R beyond this value, as then the hyperbola simply interchanges its principal axes — the major axis lying along z and the minor along x. In the first place, for $R = 0$ the tubular surface becomes simply the focal hyperbola in the plane of xz, viz.

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1.$$

Assume now $R = \frac{b^2}{a}$ — then the semi-major axis of the hyperbola is

$$(a^2-b^2)\left(1-\frac{R^2}{b^2}\right) = (a^2-b^2)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right),$$

and this is $=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)^2$.

So the vertex axis of the hyperbola is at a distance from the centre $= a - \frac{b^2}{a}$, and consequently the tubular surface touches the ellipsoid at the point

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

the curve on the ellipsoid is now like the figure 8, the node being at the end of the axis of x. Now to show that the tubular surface can advance no further in this direction, take the modulus R, $= \frac{b^2}{a} + \alpha$ where α is

either positive or negative. Now calling for the moment a' the semi-major axis of the nodal hyperbola, we must have $a' < a - R$ or $a'^2 < (a-R)^2$, this is

$$(a^2-b^2)\left[1-\frac{\left(\frac{b^2}{a}+\alpha\right)^2}{b^2}\right] < \left[a-\left(\frac{b^2}{a}+\alpha\right)\right]^2,$$

or making

$$T = \left[a-\frac{b^2}{a}-\alpha\right]^2,$$

this is

$$T-\alpha^2\frac{a^2}{b^2} < T,$$

which obviously holds for all values of α whether positive or negative. The tubular surface then always cuts the ellipsoid in two disconnected curves, except when $R=\frac{b^2}{a}$, when it is tangent to the ellipsoid at the end of the a-axis, and so cuts out a figure 8. It is only in this last case obviously that the nodal hyperbola belonging to real sheets of the parallel surface has a point on the axis of x. We can now resume the consideration of the principal sections of the surface for the values of R given above. We have already examined the case of $R=\frac{c^2}{a}\cdot$ Take now $R=\frac{c^2}{b}\cdot$ The principal parallels in the planes xy and yz are again curves similar in form to ellipses — while the principal parallel in yz is a curve with four cusps and two crunodes. The coordinates of the points on the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

that correspond to the crunodes on the axis of x, are readily found to be

$$x=\pm\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}, \quad z=\pm\frac{c^2}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\cdot$$

The distances of the crunodes from the centre are

$$x=\mp\frac{1}{b}\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \quad =\mp\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}.$$

The nodal conic in xy is the ellipse

$$\frac{x^2}{\frac{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}{b^2}}+\frac{y^2}{\frac{(b^2-c^2)(b^2-c^2)}{b^2}} = 1;$$

the semi-major axis of this is

$$=\frac{1}{b}\sqrt{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}.$$

This ellipse therefore passes through the two crunodes. Of course the principal parallels in xy and xz meet in the points

$$x = \pm\left(a-\frac{c^2}{b}\right).$$

The principal parallels in yz and zx cross at

$$z = \pm\left(c-\frac{c^2}{b}\right),$$

those in xy and yz at

$$y = \pm\left(b-\frac{c^2}{b}\right).$$

The case of $R=\frac{b^2}{a}$ has already been sufficiently discussed, so I may just remark that here the principal parallel in xy resembles an ellipse, those in yz and zx appear with four cusps, each the double points being evanescent; the nodal ellipse is imaginary in xy and yz, and the focal hyperbola in zx has its vertex at the double point of this principal parallel viz. at the point $x=a-\frac{b^2}{a}$; the equation of this hyperbola is

$$\frac{x^2}{\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2}}-\frac{z^2}{\frac{(b^2-c^2)(a^2-b^2)}{a^2}} = 1.$$

The complete nodal curve of the parallel surface has been shown, I think by *Clebsch,* to be of the twenty-sixth degree and to consist of the three conics above described, the section of the quadric by the plane infinity — in this case imaginary — the circle at infinity and sixteen straight lines touching the circle at infinity.

I hope soon to resume the study of this surface particularly with reference to the geodesics traced upon it. I may just mention here though a general theorem of which I have not as yet obtained an analytical proof, viz. that to a geodesic on the given surface will correspond a geodesic on the parallel if the curvatures of the given geodesic can be expressed linearly one in terms of the other. This may be an old theorem, but I do not happen to have seen it. In conclusion I may say that a good drawing of the principal sections of the surface showing all of its real singularities seems to be best obtained by making the modulus about equal to three fourths of the semi-axis c.

Baltimore, April 18th 1882.

Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*).

(Von Herrn *M. Noether* in Erlangen.)

Einleitung.

Als wichtigste Aufgabe in der ***Theorie der algebraischen Raumcurven*** erschien dem Verfasser, ***eine durchaus strenge Grundlegung der allgemeinen Theorie*** zu geben. Nach dem Vorgange neuerer Untersuchungen über ebene Curven konnte dieselbe wesentlich nur in der Theorie der algebraischen Functionen gesucht werden, und demgemäss hat sich hier der Verfasser die Frage ***nach denjenigen grundlegenden Ergebnissen gestellt, welche aus der Theorie der algebraischen Functionen hervorgehen.*** Dieselben beziehen sich auf die Erzeugung der Raumcurven durch specielle oder allgemeine Flächenschnitte, auf ihre Constantenzahl etc.

Es sei zunächst ein Blick auf die bisherige erwähnenswerthe Literatur geworfen, soweit sie entweder die vorliegenden Fragen behandelt hat oder in dieser Arbeit in Bezug auf die algebraischen Grundlagen citirt wird:

(*C.*) **), ***Cayley,*** Considérations générales sur les courbes en espace. Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., t. 54, 58 (1862, 1864).

(*H.*), ***Halphen,*** Mémoire sur les courbes gauches algébriques. Ibid., t. 70 (1870). Dazu einige spätere Noten in t. 2 des Bull. de la Soc. Math. de France.

---

*) Auszug aus der von der Kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin 1882 mit dem *Steiner*schen Preise gekrönten Abhandlung gleichen Titels. Diese Abhandlung wird in den „Abhandlungen" der Akademie erscheinen, während der vorliegende Auszug in ausführlicher Weise die Methoden und wesentlichsten Resultate derselben enthält. Die nachträglich hinzugefügten kurzen Anmerkungen sind in eckige Klammern eingeschlossen.

**) Die vorgesetzten Zeichen sind diejenigen, unter welchen die betreffenden Arbeiten in dem vorliegenden Aufsatze citirt werden.

(*B, N.*), *Brill* und *Noether,* Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Mathem. Annalen VII (1873).

(*W.*), *Ed. Weyr,* Ueber algebraische Raumcurven. Inauguraldissertation Göttingen 1873. Ferner C. R. t. 76.

(*N.*), *Noether,* Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Zweiter Aufsatz. Mathem. Annalen VIII (1874).

(*S.*), *Sturm,* Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Dieses Journal, Bd. 88 (1879)*).

(*V.*), *Valentiner,* Bidrag til Rumcurvernes Theori. Inauguraldissertation Kopenhagen 1881.

In diesen Arbeiten lassen sich zweierlei Gedankengänge erkennen. Der eine, von *Cayley* eingeschlagen, beruht auf der Darstellung der Raumcurven mittelst Kegel und „Monoid" (§ 1, 4 dieses Aufsatzes). Vermöge dieser Methode behandelt (*C.*) die Curven vierter und fünfter, (*W.*) die sechster Ordnung, und (*V.*) benutzt dieselbe, unter Anwendung von Sätzen aus der Theorie der algebraischen Functionen, zur Ableitung allgemeiner Sätze, analog den hier in §§ 3, 6 entwickelten**). Der zweite Gedankengang sucht die Theorie der algebraischen Functionen direct auf die Punktgruppen einer Raumcurve anzuwenden; hierfür ist nur die bei (*W.*) versuchte Anwendung des hier in § 1 als III' bezeichneten Satzes zu erwähnen.

Ferner hat (*H.*) in seiner ersten Note Sätze von allgemeinem Charakter, analog den hier in §§ 6, 10 entwickelten, ausgesprochen, aber ohne Andeutung der Methode und der Beweise. Endlich werden bei (*B., N.*) und (*N.*) die algebraischen Functionen für speciellere Fragen verwerthet (vgl. § 2 u. § 1 VII).

Der Verfasser benutzt nun beide Gedankengänge unter ausschliesslicher Anwendung fest begründeter, immer gültiger algebraisch-functionentheoretischer Sätze. Dabei führt ihn der erstere wohl zu allgemeinen Sätzen (Abschnitt I), erscheint aber zur Begründung der ganzen Theorie nicht als hinreichend. Der II. Abschnitt geht in § 10 über die Sätze von (*H.*) hinaus (vgl. § 10, Anmerkung); er führt in § 9 zu ganz neuen Methoden.

---

*) [(*S'.*) *Sturm,* On some new theorems on curves of double curvature. Report of the Brit. Assoc., 1881.]

**) Da diese in dänischer Sprache geschriebene Arbeit (*V.*) erst während der Ausarbeitung der Abhandlung, deren Auszug hier vorliegt, erschienen ist, konnte sie nur zu einem möglichst genauen Vergleich der *Resultate* benutzt werden. [Die an (*C.*) anschliessende Methode hat auch (*S'.*); vgl. § 3 dieses Auszugs.]

Die zweite derselben bietet viel mehr als der Satz § 1, III'.; sie löst für Curven *beliebiger* Ordnung das Problem, Grenzen für das Geschlecht anzugeben, über welche hinaus die Curven nothwendig auf Flächen niedrigerer, als *irgend* einer gegebenen Ordnung liegen müssen; Grenzen, die viel kleiner sind, als die durch § 6 gegebenen. Während die erstere Methode des § 9 nur mit Hülfe von Irreducibilitätsuntersuchungen Resultate, aber genaue, liefert, reducirt die zweite Methode das Problem ohne diese Untersuchungen; und wie weit und leicht diese Reduction stattfindet, davon mag das ganz willkürlich gewählte Beispiel des § 17, 2 zeugen.

Zu diesem Haupttheil des zweiten Abschnitts wurden in §§ 11, 12 noch solche Untersuchungen über die Constantenzahl der Raumcurven von gegebener Ordnung und gegebenem Geschlecht hinzugefügt, welche mit der Erzeugung der Curven durch allgemeine Flächenschnitte zusammenhängen. Diese Untersuchungen führen, nach Einführung eines neuen Elements in die Flächentheorie, zu einer neuen Ungleichung (§ 11), welche in allen bisher durchführbaren Fällen mit grösster Annäherung die Constantenzahl liefert. Wenn auch der Verfasser selbst diese Untersuchungen nicht für abgeschlossen halten kann, so wollte er dieselben doch nicht unterdrücken, da sie auf die bisher so dunkle Frage Licht zu werfen geeignet scheinen.

Was die Anwendungen betrifft, so sind solche des ersten Abschnittes in § 4, solche des zweiten Abschnittes im dritten enthalten, die letzteren ausführlicher in der Abhandlung selbst. Eine letzte Anwendung, in § 18, bezieht sich auf die Geometrie specieller Flächen.

Zu bemerken ist endlich noch, dass die Raumcurven hier überall ohne mehrfache Punkte vorausgesetzt werden; und dass auch bei ihrer Erzeugung durch allgemeine Flächenschnitte angenommen wird, dass die Flächen ohne vielfache Punkte seien und sich nicht längs Curven berühren.

I. Abschnitt.

Untersuchung der Raumcurven mittelst specieller Flächenschnitte.

§ 1.

Definitionen und Hülfssätze.

Es mögen in diesem ersten Paragraphen diejenigen Definitionen und Sätze zusammengestellt werden, welche unseren Entwicklungen zu Grunde

gelegt sind. Dabei konnten die Sätze I.—IV. aus der in der Einleitung citirten Abhandlung (*B., N.*), die Sätze V.—VII. aus (*N.*) einfach entnommen werden, da dieselben in den genannten Arbeiten in einer für alle, auch die speciellsten Fälle gültigen Weise algebraisch bewiesen sind.

1. ***Definitionen und Sätze bei ebenen Curven.***

Für eine zu Grunde gelegte ebene algebraische Curve f_m^p, $f=0$, von der Ordnung m und dem Geschlecht p, werden diejenigen Curven, welche jeden i-fachen Punkt von f_m^p zum $(i-1)$-fachen Punkt haben, ***zu*** f_m^p ***adjungirte Curven*** genannt. Theilt man den weiteren Schnitt von f_m^p mit einer zu ihr adjungirten Curve in zwei Gruppen, G_Q und G_R, von Q, bez. R Punkten, so werden die beiden Gruppen auf f_m^p ***zu einander residual***, oder die eine der ***Rest*** der andern genannt. Zwei Gruppen G_R und $G_{R'}$, die zu ein und derselben Gruppe G_Q residual sind, werden als ***corresidual*** bezeichnet; dabei kann $R' \gtreqless R$ sein. ∞^λ-***Schaar*** bedeute eine λ-***fach unendliche lineare Schaar.***

Man hat die Sätze:

I. ***Restsatz:*** Sind G_R und $G_{R'}$ Reste von G_Q, ferner G_R Rest von $G_{Q'}$, so ist auch $G_{R'}$ Rest von $G_{Q'}$.

Also specieller: Eine lineare Schaar g_R von Punktgruppen von je R Punkten, deren Gruppen alle zu einer Gruppe G_R corresidual sind, kann sowohl von adjungirten Curven C, die durch G gehen, als von den adjungirten Curven C' durch $G_{Q'}$ ausgeschnitten werden, wenn sowohl G_Q als $G_{Q'}$ residual zu der einen Gruppe G_R sind. Die Mannigfaltigkeit der Schaar g_R ist die der Schaar von Curven C durch G_Q und die der Schaar C' durch $G_{Q'}$.

II. ***Specialgruppensatz:*** Die zu einer irreduciblen Curve f_m^p adjungirten Curven φ_{m-3}, von der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, bilden genau eine ∞^{p-1}-Schaar. Während im Allgemeinen bei einer Punktgruppe $G_Q^{(q)}$ — d. h. bei einer Gruppe von Q Punkten auf f_m^p, die zu einer linearen ∞^q-Schaar, $g_Q^{(q)}$, von Gruppen von je Q Punkten gehört —, sobald die Schaar selbst bekannt ist, $Q-q=p$ Punkte durch die übrigen q Punkte der Gruppe mitbestimmt sind, wird dies ***immer*** dann und ***nur*** dann anders, wenn die Schaar $g_Q^{(q)}$ zugleich durch eine Schaar zu f_m^p adjungirter Curven φ_{m-3} aus f_m^p ausgeschnitten werden kann; alsdann wird $p > Q-q$, und es sind innerhalb der Schaar ***weniger*** als p Punkte durch die übrigen q bestimmt. Solche Schaaren $g_Q^{(q)}$ von Punktgruppen $G_Q^{(q)}$, welche

durch Curven φ_{m-3}, die zu f_m^p adjungirt und von der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung sind, aus f_m^p ausgeschnitten werden können, sollen *Specialschaaren* oder Schaaren von *Specialgruppen* genannt werden.

III. *Riemann-Rochscher Satz* (Präcisirung des Satzes II.): Ist

$$q = Q - p + 1 + r, \quad 0 \leqq r < p - 1,$$

und hat man auf der irreduciblen Curve f_m^p eine lineare ∞^q-Schaar $g_Q^{(q)}$ von Gruppen $G_Q^{(q)}$ von je Q Punkten, so geht durch eine solche Gruppe $G_Q^{(q)}$ noch eine lineare ∞^r-Schaar von Curven φ_{m-3}, die zu f_m^p adjungirt und von der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Sobald die Schaar $g_Q^{(q)}$ gegeben ist, bestimmen q Punkte *eine* Gruppe der Schaar, also die übrigen $Q-q=p-r-1$ Punkte der Gruppe eindeutig.

Dieser Satz sagt also für $q>0$ aus: dass die Q Punkte einer solchen Gruppe $G_Q^{(q)}$ nicht mehr willkürlich sind; dass es vielmehr, da durch $G_Q^{(q)}$ genau ∞^r Curven φ_{m-3} gehen, für die Q Punkte von $G_Q^{(q)}$ nur $p-1-r=Q-q$ Bedingungen ausmacht, wenn eine Curve φ_{m-3} durch $G_Q^{(q)}$ gehen soll. Von den Q Punkten einer solchen Gruppe $G_Q^{(q)}$ haben daher, wenn die Schaar $g_Q^{(q)}$ *nicht* gegeben ist, auf f_m^p *höchstens* $Q-q$ derselben eine willkürliche Lage, während die übrigen q dadurch bestimmt sind, aber im Allgemeinen mehrdeutig. — Die Umkehrung dieses Schlusses spricht sich so aus:

III'. Hat man auf der irreduciblen Curve f_m^p eine lineare ∞^q-Schaar $(q>0)$ von Gruppen von je Q Punkten, und sind in *einer* dieser Gruppen mehr als $Q-q$ Punkte willkürlich, so kann die Bedingung $p \gtreqqless Q-q+1$ des Satzes III. nicht erfüllt sein, und man hat nothwendig

$$p < Q - q + 1.$$

Die Existenz der Schaar $g_Q^{(q)}$ in III. ist oft schon unmöglich, auch wenn nur $Q-q$ oder weniger Punkte *einer* Gruppe willkürlich sind, wenn man Specialfälle, wie den, dass einige der Q Punkte für alle Gruppen dieselben sind, ausschliesst. Wir führen nur den folgenden Satz an:

III''. Schliesst man den *hyperelliptischen* Fall von f_m^p — d. h. den Fall, wo alle zu f_m^p adjungirten Curven φ_{m-3}, welche durch irgend einen Punkt von f_m^p gelegt werden, noch durch einen weiteren durch den ersteren bestimmten Punkt gehen — aus, und hat man auf

der irreduciblen f_m^p eine Schaar $g_Q^{(q)}$ $(q > 0)$, bei der *eine* Gruppe $Q-q$ willkürlich zu wählende Punkte hat, so muss sein

$$p \leqq Q-q+1.$$

IV. *Invarianz-Satz:* Bei beliebiger rational-eindeutiger Transformation der irreduciblen Curve f_m^p in eine solche Curve $f_{m'}^{p'}$ bleibt das Geschlecht erhalten, $p'=p$, und eine lineare Schaar $g_Q^{(q)}$ von Punktgruppen auf f_m^p geht in eine ebensolche, $g'^{(q)}_Q$, auf $f_{m'}^p$ über. Insbesondere gehen die von den zu f_m^p adjungirten Curven φ_{m-3} ausgeschnittenen *Specialschaaren* in die von den zu $f_{m'}^p$ adjungirten Curven $\varphi_{m'-3}$ ausgeschnittenen Specialschaaren von $f_{m'}^p$ über.

2. *Definitionen und Sätze bei Flächen und Raumcurven.*

Bei Flächen gebrauchen wir analoge Definitionen. Eine *Fläche* μ^{ter} Ordnung, von der wir in dieser Abhandlung annehmen, dass sie keine vielfachen Punkte enthalte, werde mit F_μ bezeichnet. Eine *Raumcurve* werde mit $R, R', \ldots$ bezeichnet. Zwei auf F_μ gelegene Curven R, R', welche zusammen den *vollständigen* Schnitt von F_μ mit einer zweiten Fläche bilden, sollen *zu einander residual*, oder die eine der *Rest* der andern genannt werden. Zwei Curven R, R_1, die zur selben Curve R' residual sind, sollen *corresidual* heissen. Man hat die Sätze:

V. *Restsatz bei Flächen:* Sind auf F_μ zwei Curven R, R_1 zu R' residual, ferner R residual zu R_1', so ist auch R_1 residual zu R_1'.

Specieller: Die lineare Schaar von Curven auf F_μ, welche mit R von gleicher Ordnung und zu R corresidual sind, kann sowohl durch Flächen, welche R', als durch Flächen, welche R_1' als Basiscurve haben, ausgeschnitten werden, wenn sowohl R' als R_1' residual zu R sind. Beide Flächenschaaren sind von gleicher Mannigfaltigkeit.

VI. *Restsatz bei Raumcurven:* Wenn eine Raumcurve R als Schnitt zweier Flächen F und Φ gegeben ist, und R' ist bei diesem Schnitt der Rest von R, so sind die *zu R adjungirten Flächen* diejenigen Flächen, welche R' enthalten. Dieselben schneiden auf R die *allgemeinsten* linearen Schaaren von Punktgruppen aus, welche zu einer gegebenen Gruppe corresidual sind; also bei rationaler Transformation von R in eine ebene Curve f entsprechend den Gesammtschaaren von Punktgruppen auf f, welche von zu f adjungirten Curven ausgeschnitten werden können. Aendert man

Diese bekannten Formeln, aus welchen sich bei gegebenen μ und ν durch zwei weitere der Grössen, etwa m und p, die übrigen ausdrücken, könnte man, wenigstens für $p > 1$ und $p' > 1$, aus dem Satze VII. ableiten.

4. ***Erzeugung der Raumcurve R_m^p durch Kegel und Monoid.***

Seien im Raume homogene (Tetraeder-) Coordinaten mit $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ bezeichnet. Man projicire die irreducible Raumcurve R_m^p von dem, gegen R_m^p nicht speciell gelegenen, Punkte O ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) aus auf eine beliebige, nicht durch O gehende Ebene ε, in der die homogenen (Dreiecks-) Coordinaten $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ so gewählt seien, dass einem Punkte $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ im Raume bei dieser Projection ein Punkt $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ in ε entspricht, für den

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 \;=\; x_1 : x_2 : x_3$$

wird.

Die Projection der Raumcurve R_m^p auf die Ebene ε, eine ebene Curve f_m^p m^{ter} Ordnung, erhalte die Gleichung

$$(1.) \qquad f_m(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad \text{oder} \quad f_m(\xi) = 0,$$

und für die Coordinaten der Punkte der Curve R_m^p selbst ergeben sich Beziehungen der Art:

$$(2.) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \;=\; \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \frac{\psi_n(\xi)}{\psi_{n-1}(\xi)},$$

wo $\psi_n(\xi)$, $\psi_{n-1}(\xi)$ rationale ganze homogene Functionen von ξ_1, ξ_2, ξ_3, bez. von den Ordnungen n, $n-1$ vorstellen. Diese eindeutige Transformation zwischen der Raumcurve R_m^p und der ebenen Projectionscurve f_m^p sagt auch aus, dass sich R_m^p als Schnitt der beiden Flächen

$$(3.) \qquad f_m(x) = 0, \quad x_4\psi_{n-1}(x) - \psi_n(x) = 0,$$

wo f_m, ψ_{n-1}, ψ_n hier homogene Functionen in x_1, x_2, x_3 sind, darstellen lässt. Die erste Fläche in (3.) stellt den *Kegel* dar, der seine Spitze in O hat und über R_m^p steht; die zweite Fläche eine Fläche n^{ter} Ordnung, welche O zum $(n-1)$-fachen Punkte hat und R_m^p enthält. — Eine solche Fläche n^{ter} Ordnung, welche einen $(n-1)$-fachen Punkt besitzt, sei mit *Cayley*, (*C.*), eine Monoidfläche oder ein *Monoid* genannt. Wir betrachten hier nur solche Monoide, deren vielfacher Punkt in O und nicht speciell gegen die Raumcurve R_m^p gelegen ist, und bezeichnen die Fläche mit M_n, wenn dieselbe von der Ordnung n ist.

In unserem Falle hat f_m^p wegen der nicht speciellen Lage von O keine höheren vielfachen Punkte, als Doppelpunkte, und zwar h Doppelpunkte. —

Dem Schnitt der Curve R^p_m mit allen Ebenen des Raumes

$$(4.)\qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

entspricht in ε der bewegliche Schnitt der Curve f^p_m mit der Curvenschaar

$$(5.)\qquad (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)\,\psi_{n-1}(\xi) + \alpha_4 \psi_n(\xi) = 0,$$

bestehend aus ∞^3 Gruppen von je m Punkten. Die Curvenschaar (5.) trifft also f^p_m ausserdem in $m(n-1)$ festen, allen Curven der Schaar gemeinsamen Schnittpunkten. Davon fallen $2h$ in die h Doppelpunkte von f^p_m; denn durch diese geht sowohl $\psi_{n-1}(\xi)$ als $\psi_n(\xi)$, weil für jeden dieser h Punkte die Verhältnisse der vier Grössen x zwei verschiedene Werthsysteme annehmen, die Ausdrücke in (2.) also unbestimmt werden müssen. Für die $m(n-1)-2h$ übrigen festen Punkte müssen ebenfalls $\psi_{n-1}(\xi)$ und $\psi_n(\xi)$ verschwinden; diese Punkte sind also gerade die $m(n-1)-2h$ ausserhalb der h Doppelpunkte fallenden Schnittpunkte von $\psi_{n-1}(\xi)$ mit f^p_m.

Für die Erzeugung (3.) der Curve R^p_m sagt dies aus: dass sich Kegel und Monoid ausser R^p_m nur in Geraden durch O treffen; dass die Geraden des Monoids alle Geraden sind, in welchen der Kegel $\psi_n(x)$ den Kegel $\psi_{n-1}(x)$ trifft; und dass von diesen Geraden h in den h von O ausgehenden Sehnen der Curve R^p_m liegen, während von den übrigen noch der ganze Schnitt der Kegel $\psi_{n-1}(x)$ und $f_m(x)$ auf $\psi_n(x)$ liegt.

Aus diesen Schnitten ergeben sich einige Ungleichungen*): aus dem von $\psi_{n-1}(x)$ und $f_m(x)$:

$$m(n-1)-2h \geqq 0,$$

aus dem von $\psi_{n-1}(x)$ und $\psi_n(x)$:

$$n(n-1) \geqq h + [m(n-1)-2h],$$

also

$$(6.)\qquad (m-n)(n-1) \overline{\overline{<}} h \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2} m(n-1),$$

und hieraus, für $n > 1$ — d. h. vorausgesetzt, dass R^p_m keine ebene Curve ist —:

$$(7.)\qquad n \geqq \tfrac{1}{2} m.$$

§ 2.

Erzeugung der Raumcurve durch eindeutige Transformation.

Die allgemeinste Methode, alle Raumcurven zu erzeugen, besteht darin, dieselben durch eindeutige Transformation aus den ebenen Curven

*) (*H.*), Bull. II., p. 42.

abzuleiten. Kennt man auf einer ebenen irreduciblen Curve f^p vom Geschlecht p,

$$(1.)\quad f(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = 0,$$

eine lineare ∞^3-Schaar von Gruppen von je m Punkten, ausgeschnitten von einer zu f^p adjungirten Curvenschaar (und zwar nicht derartig speciell, dass schon alle Curven der Schaar, welche durch einen beliebigen beweglichen Punkt auf f^p gelegt werden, hiermit noch durch weitere durch den ersten bestimmte Punkte von f^p gingen):

$$(2.)\quad \alpha_1\psi_{(1)}+\alpha_2\psi_{(2)}+\alpha_3\psi_{(3)}+\alpha_4\psi_{(4)} = 0,$$

so liefert die Transformation

$$(3.)\quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_{(1)} : \psi_{(2)} : \psi_{(3)} : \psi_{(4)}$$

eine Raumcurve R_m^p. Um alle existirenden Raumcurven zu erhalten, hätte man hiernach erstens für jede Klasse algebraischer Curven — unter einer „Klasse" die Gesammtheit solcher Curven verstanden, welche durch eindeutige Transformation aus irgend einer von ihnen ableitbar sind — einen ebenen Repräsentanten f^p; zweitens auf einer solchen Curve f^p alle linearen ∞^3-Schaaren von Gruppen G_m zu kennen.

Dabei genügte es hier, das erste Problem nur für den Fall zu lösen, dass das zweite überhaupt eine Lösung hat; aber hierdurch ist die Frage nur auf die Aufstellung aller *Normalcurven* für diesen Fall, d. h. eben aller Raumcurven, zurückgeführt. Indem man sich so doch auf die directe Untersuchung der Raumcurven hingewiesen sieht, bleibt nur die Frage, ob sich aus der Erzeugung durch Transformation allgemeine *Sätze* für die Raumcurven ergeben.

Die Gleichungen (3.), ohne (1.), stellen im Allgemeinen eine sehr specielle Fläche vor, auf welcher R_m^p liegt; vermöge (1.) ergeben sich dann weitere specielle Flächen durch R_m^p. Im Gegensatze hierzu wird eine speciellere Transformation zu einer Erzeugung der R_m^p aus allgemeineren Flächen führen; so diejenige specielle Transformation, welche in § 1, 4 angegeben ist, zur Erzeugung aus Kegel und Monoid. Dem entsprechend gelangen wir, von den nicht specialisirten Formeln (1.), (2.), (3.) ausgehend, auch nur zu *einem* allgemeinen Satze, während die specielle Transformation § 1, 4 im nächsten Paragraphen eine Reihe solcher liefern wird.

Die Frage nach der *Constantenzahl der Gesammtheit der Raumcurven* R_m^p, bei gegebenen m und p, ist auf diesem Wege bereits erledigt worden,

wenn p eine gewisse von m abhängige Grenze nicht übersteigt (*B., N.* pag. 307). Ich theile kurz diese Betrachtung mit, um die eigentliche Schwierigkeit der Frage hervortreten zu lassen und eine Bemerkung anzuknüpfen.

Für $m > p+2$ gehört eine auf einer irreduciblen f^p gelegene Gruppe G_m, deren m Punkte ganz willkürlich gewählt sein sollen, immer (§ 1, II.) einer linearen ∞^{m-p}-Schaar an, und solcher Schaaren giebt es also auf f^p immer ∞^p; da nun in jeder linearen ∞^q-Schaar $\infty^{4(q-3)}$ lineare ∞^3-Schaaren enthalten sind, giebt es auf f^p $\infty^{4(m-p-3)+p} = \infty^{4m-3(p+4)}$ lineare ∞^3-Schaaren.

Für $m \leqq p+2$ ist eine lineare ∞^3-Schaar von Gruppen G_m eine Specialschaar (§ 1, II.). Auf einer Curve f^p liegen, so lange deren Moduln nicht speciellen Bedingungen genügen, ebenfalls $\infty^{4m-3(p+4)}$ lineare Schaaren $g_m^{(3)}$; wobei also nur die Bedingung $4m \geqq 3(p+4)$ herrscht. Die Aufsuchung einer solchen Schaar auf der gegebenen f^p erfordert hier die Auflösung eines Systems höherer Gleichungen (*B., N.* §§ 9, 12).

Führt man nun durch lineare Transformation noch funfzehn weitere Constanten ein, so erhält man, unter Benutzung der ∞^3-Schaar zur Transformation mittelst (3.), die Gesammtheit aller Raumcurven R_m^p, welche aus einer Curve f^p, mit gegebenen Moduln, ableitbar sind. Da aber die Klasse für $p > 1$ von $3p-3$ Moduln abhängt, so folgt:

dass für $m \geqq \frac{3}{4}(p+4)$ die Constantenzahl der Gesammtheit der R_m^p

$$4m-3(p+4)+15+(3p-3) = 4m$$

beträgt.

Dasselbe ergiebt sich auch für $p=0$ und 1, indem man beachtet, dass zwar dann die Modulzahl um 3, bez. 1, grösser wird, als $3p-3$, dass aber die Curve R_m^0 durch ∞^3, die Curve R_m^1 durch ∞^1 rationale Transformationen in sich übergeht*).

Zu diesem Schlusse fügen wir hinzu, dass für $m < \frac{3}{4}(p+4)$ zwar die Bedingungsgleichungen für die Schaar $g_m^{(3)}$ an *Zahl* dieselben bleiben, aber von einander abhängig werden können, indem sie sich zum Theil auf eine Gruppe von m Punkten, welche der Schaar angehört und sie bestimmt, werfen, zum anderen Theil auf die Moduln von f^p selbst. Daher

---

*) Für $p > 1$ dagegen existirt keine Curve, welche unendlich viele rationale Transformationen in sich zulässt. Vgl. *Schwarz* in d. J., Bd. 87 [und neuerdings des Verf. Noten in Math. Ann., Bd. 20 und 21].

kann hier die Anzahl der unabhängigen Bedingungen nur gleich oder kleiner werden, als im vorhergehenden Falle:

für $m < \frac{3}{4}(p+4)$ wird die Constantenzahl der Gesammtheit der $R_m^p \geqq 4m$.

Die hier gefundenen Zahlen beziehen sich auf die allgemeinsten irreduciblen Raumcurven, welche keiner anderen Bedingung genügen, als von der Ordnung m und dem Geschlecht p zu sein. Die weitere Frage wäre nun die, ob die Gesammtheit der R_m^p sich in einzelne ganz getrennte Familien zerlegen lässt; also: ob die, insbesondere im letzten Falle, auftretende höhere Gleichung, welche die Schaar $g_m^{(3)}$ bestimmt, ohne Adjunction von willkürlichen Parametern *reducibel* wird. Auch diese mit der Modulfrage zusammenhängende Frage wird später nur an einzelnen Beispielen ihre Beantwortung finden können.

Man kann indess die allgemeine Theorie zum Studium einiger specieller Fälle benutzen, von denen einer hier erwähnt werden soll. Für $2p-2 \geqq m > p+2$, also jedenfalls für $p \geqq 5$, kann man verlangen, dass die lineare ∞^3-Schaar von Gruppen G_m, welche aus den Schnitten der Raumcurve mit den Ebenen des Raumes entsteht, eine *Specialschaar* sei (§ 1, II.). Da eine solche Gruppe G_m einer ∞^{m-p+1}-Schaar angehört, von denen ∞^{2p-2-m} auf f^p existiren, folgt hier, dass die Constantenzahl dieser speciellen Curven R_m^p

$$(2p-2-m)+4(m-p-2)+(3p-3)+15 \;=\; 3m+p+2$$

beträgt.

§ 3.

Sätze über die ebene Projectionscurve einer Raumcurve.

Benutzt man aus der ∞^3-Schaar, (3.) des § 2, nur eine lineare ∞^2-Schaar zur Transformation von f^p, so erhält man eine ebene Curve m^{ter} Ordnung, welche die Projection der Raumcurve R_m^p ist. Dieselbe sei mit f_m^p bezeichnet.

Der Uebergang von der Curve f_m^p zur Curve R_m^p ist der in § 1, 4 angegebene. Unter der linearen ∞^3-Schaar $g_m^{(3)}$ von Gruppen G_m auf f_m^p findet sich als Theil eine lineare ∞^2-Schaar, $\gamma_m^{(2)}$, von Gruppen Γ_m, welche von den *Geraden* aus f_m^p ausgeschnitten werden.

Nach dem Restsatze, § 1, I., wird die Schaar $g_m^{(3)}$ auf f_m^p erhalten, indem man durch irgend eine Gruppe aus $g_m^{(3)}$ eine beliebige zu f_m^p adjungirte

Curve n^{ter} Ordnung legt; die durch die weiteren Schnittpunkte dieser Curve mit f_m^p gehenden adjungirten Curven n^{ter} Ordnung schneiden die Schaar aus. Wir nehmen insbesondere eine Gruppe Γ_m aus $g_m^{(3)}$ und legen durch dieselbe die Gerade, verbunden mit irgend einer zu f_m^p adjungirten Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, ψ_{n-1}, wobei n für $p=0$ nur gleich $m-1$, für $p>0$ höchstens gleich $m-2$ angenommen zu werden braucht; durch die Schnittgruppe G_k, wo $k=(n-1)m-2h$, von ψ_{n-1} mit f_m^p wird die Schaar § 1, 4., (5.) von Curven n^{ter} Ordnung gelegt, welche $g_m^{(3)}$ ausschneidet.

Für $p<m-2$ hat nun die irreducible Curve f_m^p keiner weiteren Bedingung zu genügen, um die Projection einer Raumcurve R_m^p zu sein; denn die von den Geraden ausgeschnittene Schaar $\gamma_m^{(2)}$ bildet dann immer, wie schon im § 2 benutzt wurde, einen Theil einer linearen ∞^3-Schaar, die f_m^p in eine R_m^p überführt.

Für $p\geqq m-2$ wird die Schaar $g_m^{(3)}$ eine Specialschaar, so dass man $n=m-3$ setzen kann (§ 1, II.). Die h Doppelpunkte von f_m^p müssen also jetzt auf einer Curve $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\psi_{n-1}\equiv\psi_{m-4}$, liegen. Aber man kann weiter schliessen: Nach dem *R.-R.*schen Satze (§ 1, III.) hat die Schaar $g_m^{(3)}$ auf f_m^p eine Restschaar $g_R'^{(r)}$, wo

$$R=m(m-4)-2h,\quad r=\tfrac{1}{2}(m-2)(m-3)-h;$$

und diese Schaar kann aus f_m^p ausgeschnitten werden von der in einer Gruppe von $\gamma_m^{(2)}$ treffenden Geraden, verbunden mit den zu f_m^p adjungirten Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, d. h. von den letzteren allein. Diese Curven bilden noch eine ∞^r-Schaar, haben also noch *eine* Constante mehr, als wenn die h Punkte eine willkürliche Lage hätten. Umgekehrt folgt aus dem *R.-R.*schen Satze, dass, wenn die zu f_m^p adjungirten Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung eine lineare ∞^r-Schaar bilden, dann auf f_m^p als Restschaar eine Schaar $g_m^{(3)}$ liegt, in welcher die Schaar $\gamma_m^{(2)}$ enthalten ist. Man hat also den Satz:

I. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass eine irreducible ebene Curve f_m^p die Projection einer R_m^p, von einem beliebigen Punkte des Raumes aus, sei, ist für $p\geqq m-2$ die, dass die h Doppelpunkte der f_m^p für die adjungirten Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung nur $h-1$ Bedingungen darstellen*). Für $p<m-2$ herrscht keine Bedingung.

Stellt man nach (*B., N.*), § 9, das Gleichungssystem auf, welches

*) Vgl. auch (*V.*), p. 32.

aussagt, dass die durch $h-1$ der Doppelpunkte von f_m^p gehenden Curven $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung auch durch den h^{ten} hindurchgehen, so erhält man ein System von $p-m+3$ Gleichungen zwischen den Parametern der h Doppelpunkte. Da nun die Bedingungen der h Doppelpunkte und dieses System im Ganzen $h+(p-m+3)$ oder weniger von einander unabhängige Bedingungsgleichungen vorstellen, so folgt nur, dass für $p \geqq m-2$ im Ganzen wenigstens $\infty^{\frac{1}{2}m(m+3)-h-(p-m+3)} = \infty^{4m-4}$ ebene Projectionscurven f_m^p existiren. Geht man alsdann zu der Raumcurve R_m^p über, so ist durch das willkürliche Projectionscentrum O und durch f_m^p der Kegel über f_m^p bestimmt; für das Monoid ist zwar $\psi_{n-1} \equiv \psi_{m-4}$ noch auf ∞^r verschiedene Arten wählbar, aber die Schaar $g_m^{(3)}$ bleibt hierdurch unverändert. Dagegen kann dann an Stelle der Curve ψ_n (§ 1, 4.) noch irgend eine Curve der Schaar (5.) § 1, 4, gesetzt werden, so dass die Transformation von f_m^p in R_m^p noch vier neue Constanten einführt. So folgt:

> dass für $p \geqq m-2$ die Constantenzahl der Gesammtheit der R_m^p wenigstens $4m$ beträgt;

ein Resultat, das weniger allgemein ist, als das im vorigen Paragraphen abgeleitete.

Aus dem Satze I. folgen von selbst auch Sätze für die adjungirten Curven C_{m-5}, C_{m-6} etc. Man lege nämlich durch irgend $\frac{1}{2}i(i+1)-1$ der h Doppelpunkte von f_m^p eine Curve C_{i-1} der $(i-1)^{\text{ten}}$ Ordnung; sei P ein weiterer Doppelpunkt. Kann man nun durch die $h-\frac{1}{2}i(i+1)$ übrigen Doppelpunkte eine Curve der Ordnung $m-i-3$, C_{m-i-3}, legen, so hat man in $C_{i-1}+C_{m-i-3}$ eine C_{m-4}, welche durch $h-1$ der h Doppelpunkte geht, also auch durch P. Nimmt man aber P unter den Doppelpunkten beliebig an, so sieht man, dass diejenige der beiden Curven, welche durch P geht, auch durch alle h Punkte gehen muss. Ist nun $i \overline{\gtrless} \frac{1}{2}m-2$, so ist dies nach § 1, 4. (7.) für die Curve C_i unmöglich, tritt also für C_{m-i-3} ein. Dies sagt aus:

II. Kann man durch $h-\frac{1}{2}i(i+1)$ der h Doppelpunkte der Projectionscurve f_m^p eine adjungirte Curve der Ordnung $m-i-3$ legen, wo $m-i-3 \geqq \frac{1}{2}m-1$, so geht dieselbe auch durch die übrigen $\frac{1}{2}i(i+1)$ Doppelpunkte *).

Die h Doppelpunkte stellen für die adjungirten Curven C_{m-i-3} also höchstens $h-\frac{1}{2}i(i+1)$ Bedingungen dar.

---

*) [Vgl. ausser (*V.*) noch (*S'.*), No. 2.]

Man kann nun aber auch Beziehungen zwischen diesen Bedingungszahlen und zwischen den Ordnungszahlen der Flächen aufstellen, auf welchen die Raumcurve R_m^p, deren Projection f_m^p ist, liegt.

Die Raumcurve R_m^p sei derart, dass ∞^{k-1} Flächen i^{ter} Ordnung, F_i, durch sie hindurchgehen, aber nicht mehr. Die Gesammtheit der Flächen i^{ter} Ordnung trifft dann F_i in einer linearen ∞^q-Schaar von Gruppen von je mi Punkten, wo $q=\frac{1}{6}(i+1)(i+2)(i+3)-1-k$, der eine eben solche Schaar g_{mi} auf f_m^p entspricht. Sei nun $p>mi-q$, so wird g_{mi} eine Specialschaar und hat, nach § 1, III., eine Restschaar $g_R'^r$, wo

$$R=m(m-i-3)-2h,\quad r=q+\tfrac{1}{2}m(m-2i-3)-h$$
$$=\tfrac{1}{2}(m-i-3)(m-i)-[h-\tfrac{1}{6}i(i+1)(i+2)+k]$$

wird. Legt man, um diese Schaar $g_R'^r$ auszuschneiden, die Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine solche Gruppe von g_{mi}, welche aus dem Schnitt von i Geraden besteht, so sieht man, dass $g_R'^r$ durch adjungirte Curven $(m-i-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden kann. Hieraus folgt:

III. Sei $p>mi-\frac{1}{6}(i+1)(i+2)(i+3)+1+k$, wo $k=0,1,2,\ldots$, $i=1,2,\ldots$ sein kann. Wenn dann die h Doppelpunkte von f_m^p für die zu f_m^p adjungirten Curven $(m-i-3)^{\text{ter}}$ Ordnung mehr als $h-\frac{1}{6}i(i+1)(i+2)+k$ lineare Bedingungen darstellen, so muss R_m^p nothwendig auf wenigstens ∞^k Flächen i^{ter} Ordnung liegen.

§ 4.

Anwendung auf die vollständige Schnittcurve zweier Flächen und die Schnittcurve, deren Rest eine ebene Curve ist.

Sei die Raumcurve R_m^π als Schnitt zweier Flächen F_μ, F_ν, von den bez. Ordnungen μ, ν für $\mu\leqq\nu$, gegeben, und der Rest eine *ebene* Schnittcurve von einer Ordnung $m'<\mu$. Hierbei wird

$$h=\tfrac{1}{2}(2m-\mu\nu)(\mu-1)(\nu-1).$$

Betrachtet man hier nach § 1, VII. die zu R_m^π adjungirten Flächen $(\mu+\nu-4)^{\text{ter}}$ Ordnung und insbesondere den Theil, welcher aus der Ebene durch die Restcurve, verbunden mit $\mu+\nu-5$ Ebenen durch den Projectionspunkt O besteht, so erkennt man, dass auf der Projectionscurve f_m^π diejenigen Punktgruppen, welche aus je $m(\mu+\nu-5)$ auf $\mu+\nu-5$ Geraden liegenden Punkten bestehen, durch zu f_m^π adjungirte Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden können. Dies sagt aus:

dass die niedrigste Curve, welche durch alle Doppelpunkte der Projectionscurve f_m^n hindurchgelegt werden kann, für $m' > 0$ von der Ordnung $m-\mu-\nu+2$; für $m'=0$, d. h. wenn R_m^n eine vollständige Schnittcurve ist, von der Ordnung $m-\mu-\nu+1=(\mu-1)(\nu-1)$ ist*).

Wie am Schlusse des § 3 ergeben sich hier die weiteren Sätze:

Sei $i \leqq \mu+\nu-5$ und $i<\mu$; dann giebt es immer zu f_m^n adjungirte Curven $(m-i-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, und für diese stellen die h Doppelpunkte von f_m^n nur

$$h-\tfrac{1}{6}i(i+1)(i+2)$$

lineare Bedingungen dar.

Für alle $i \leqq \mu+\nu-5$ giebt es zu f_m^n adjungirte Curven $(m-i-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, und für diese stellen die h Doppelpunkte von f_m^n nur

$$h-\tfrac{1}{6}i(i+1)(i+2)+\tfrac{1}{6}(i-\mu+1)(i-\mu+2)(i-\mu+3),$$

bez.

$$h-\tfrac{1}{6}i(i+1)(i+2)+\tfrac{1}{6}(i-\mu+1)(i-\mu+2)(i-\mu+3) \\ +\tfrac{1}{6}(i-\nu+1)(i-\nu+2)(i-\nu+3)$$

lineare Bedingungen dar, je nachdem $\mu \leqq i < \nu$, bez. $i \geqq \nu \geqq \mu$ ist.

Für $\mu'=0$ kann i bis zur Grenze $\mu+\nu-4$ gehen **).

II. Abschnitt.

Untersuchung der Raumcurven mittelst Schnitte allgemeiner Flächen.

§ 5.

Ein Hülfssatz über ebene Curven.

Für den folgenden Paragraphen, sowie weiterhin, wird ein Hülfssatz gebraucht, der sich auf *ebene Curven ohne vielfache Punkte* bezieht und der hier entwickelt werden soll.

---

*) [Hiernach ist der Satz von (*S'*.), No. 6, unzutreffend.]

**) Dieser Satz für $\mu'=0$, nämlich, dass die durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehenden Sehnen der vollständigen Schnittcurve zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung auf einem Kegel der Ordnung $(\mu-1)(\nu-1)$ liegen, ist auch bei (*V*.), p. 65, gegeben; ist aber nicht, wie dort bemerkt, als bekannt, sondern als neu zu betrachten, da der bekannte Satz sich auf eine Fläche, nicht Kegel, der Ordnung $(\mu-1)(\nu-1)$ bezieht.

Die Aufgabe ist, auf einer solchen Curve f_μ, von der μ^{ten} Ordnung, die Gruppen von je Q Punkten, $G_Q^{(q)}$, anzugeben, welche einer linearen Schaar von ***grösstmöglicher Mannigfaltigkeit*** q angehören; und der Satz sagt zunächst aus:

> dass dieses q gleich ist der Mannigfaltigkeit q' einer solchen Schaar $\gamma_Q^{(q')}$ von je Q Punkten, für die ein Rest von auf ***einer Geraden*** liegenden Punkten existirt.

Sei $Q = \alpha\mu - \beta$, wo $0 \leqq \beta < \mu$ ist, so wird q' die Mannigfaltigkeit der Schaar $\gamma_Q^{(q')}$ von Curven α^{ter} Ordnung, welche durch β auf einer Geraden liegende Punkte gehen, unter Berücksichtigung von $f_\mu = 0$; d. h. es wird:

(1.) $q' = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3) - \beta$, für $\mu > \alpha \geqq \beta - 1$;

(2.) $q' = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3) - (\alpha+1) = \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha+2)$, für $\alpha < \beta - 1$;

(3.) $q' = Q - \frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2)$, für $\mu \leqq \alpha$.

Der Fall (3.) liefert kein anderes q' als das q einer beliebigen Schaar $g_Q^{(q)}$; im Falle (1.) hat man dasselbe q', als wenn die Q Punkte überhaupt nur auf einer Curve α^{ter} Ordnung liegen; im Falle (2.) zerfällt jede Gruppe aus $\gamma_Q^{(q')}$ in $\mu - \beta$ auf einer Geraden liegende, für alle Gruppen *feste* Punkte und in $(\alpha-1)\mu$ bewegliche Punkte, welche von den Curven $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. Nimmt man in diesem Falle (2.) die $\mu - \beta$ festen Punkte statt auf einer Geraden ganz beliebig auf f_μ an, so erhält man noch immer dasselbe q'; und dieselbe Schaar existirt auch für $\alpha = \beta - 1$.

Wir beweisen nun:

> dass die Schaaren $g_Q^{(q)}$ mit der Maximalzahl q überhaupt keine anderen sind als die letztgenannten; d. h. also für $Q \leqq \mu(\mu-3)$ und (1.) $\alpha \geqq \beta - 1$ Schaaren von Gruppen G_Q, deren Punkte auf einer Curve α^{ter} Ordnung liegen; (2.) $\alpha \leqq \beta - 1$ Schaaren von Gruppen G_Q, welche aus $\mu - \beta$ festen, im Uebrigen beliebigen Punkten und aus $(\alpha-1)\mu$ beweglichen auf einer Curve $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegenden Punkten bestehen.

Zum Beweise beachte man, dass man nur den Fall (1.) zu behandeln braucht; denn im Falle (2.) tritt der Fall (1.) für die Restschaar auf. Sei also $\alpha \geqq \beta - 1$, $q' = \frac{1}{2}\alpha(\alpha+3) - \beta$, und $G_Q^{(q)}$ eine Gruppe aus einer Schaar, für die $q \geqq q'$.

Für die Restschaar $g_R^{(r)}$ wird $r \geqq \frac{1}{2}(\mu-\alpha-3)(\mu-\alpha)$. Die dieselbe ausschneidenden Curven $(\mu-3)^{\text{ter}}$ Ordnung können alle zerfallen; und sie

mögen alle in eine feste Curve i^{ter} Ordnung C_i, $i \leqq \alpha$, und in Curven $(\mu - i - 3)^{\text{ter}}$ Ordnung $C_{\mu-i-3}$, die nicht alle reducibel sein werden, zerfallen. C_i möge durch $\mu i - \gamma$, $C_{\mu-i-3}$ durch die $(\alpha - i)\mu - \beta + \gamma$ übrigen Punkte von $G_Q^{(q)}$ gehen.

Auf einer solchen irreduciblen Curve $C_{\mu-i-3}$ erhält man durch den Schnitt mit den übrigen Curven $C_{\mu-i-3}$ noch eine ∞^{r-1}-Schaar von Gruppen von je

$$S = (\mu - i - 3)(\mu - \alpha - 3) - [(\alpha - i)(i+3) - \beta + \gamma]$$

Punkten. Hierbei wird für $\alpha \geqq i+2$ das zweite Glied von S

$$(\alpha - i)(i+3) - \beta + \gamma \geqq i + 3 \geqq 3,$$

wie man sieht, indem man für β den grössten Werth $\alpha + 1$ setzt; also

$$S \leqq (\mu - i - 3)(\mu - \alpha - 3) - 3.$$

Nun kann man den für f_μ zu beweisenden Satz für die irreducible $C_{\mu-i-3}$ als bewiesen ansehen; von den betrachteten Gruppen auf $C_{\mu-i-3}$ kann es dann höchstens eine $\infty^{\frac{1}{2}(\mu-\alpha-3)(\mu-\alpha)-3}$-Schaar geben. Da es aber wenigstens eine $\infty^{r-1} = \infty^{\frac{1}{2}(\mu-\alpha-3)(\mu-\alpha)-1}$-Schaar geben müsste, folgt: dass $i > \alpha - 2$ sein muss.

Da somit die Gruppe $G_Q^{(q)}$ für $q \geqq q'$ entweder auf einer C_α liegt, oder $(\alpha - 1)\mu - \gamma$ der Q Punkte auf einer $C_{\alpha-1}$ liegen, während die übrigen $\mu - \beta + \gamma$ Punkte der Gruppe für die durch sie gehenden $C_{\mu-\alpha-2}$ nicht mehr als $\mu - \alpha - 1$ Bedingungen ausmachen, so folgt leicht, dass für $\alpha \geqq \beta - 1$ nur die im Satze angegebenen Schaaren existiren.

Spricht man die Aufgabe so aus: Gruppen anzugeben, durch welche die Maximalzahl von Curven ν^{ter} Ordnung hindurchgeht, so leitet man, indem man das Vorstehende auf die Restschaar anwendet, den Satz ab:

> Soll auf f_μ die Gruppe G_Q, wo Q beliebig und $= \alpha\mu - \beta$, $0 \leqq \beta < \mu$, derart sein, dass, unter Berücksichtigung von $f_\mu = 0$, möglichst viele Curven von jeder beliebigen Ordnung $\nu \geqq \alpha$ hindurchgehen, so ist nothwendig und genügend, dass G_Q eine auf einer Geraden liegende Gruppe von β Punkten zum Rest hat.

§ 6.

Die Curven vom Maximalgeschlecht auf einer Fläche von gegebener Ordnung.

Es soll in diesem Paragraphen mit Hülfe des vorhergehenden Paragraphen ein dem letzten Satze desselben ganz analoger Satz, der sich aber auf Flächen, statt auf ebene Curven, bezieht, nachgewiesen werden:

dass die Curven R_m, von gegebener Ordnung m, welche auf einer irreduciblen Fläche F_μ, von der Ordnung μ, liegen sollen und das grösstmögliche Geschlecht haben, diejenigen Curven R_m sind, welche eine ebene Restcurve auf F_μ besitzen *).

Sei

$$m = \alpha\mu - \beta \quad (0 \leqq \beta < \mu);$$

R_β eine ebene Curve β^{ter} Ordnung auf F_μ, R_m^π der weitere Schnitt von F_μ mit einer durch R_β gehenden Fläche F_α, α^{ter} Ordnung; so dass (§ 1, 3.)

$$\begin{aligned} \pi &= \tfrac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2)+\tfrac{1}{2}(\alpha\mu-2\beta)(\mu+\alpha-4), \\ h &= \tfrac{1}{2}(\alpha\mu-2\beta)(\mu-1)(\alpha-1), \\ s &= \beta(\mu+\alpha-\beta-1). \end{aligned}$$

Die zu untersuchende Curve sei R_m^p. Um nun zunächst den Beweis zu führen, ***dass** p **immer** $\leqq \pi$ **wird***, suchen wir eine obere Grenze τ für die Mannigfaltigkeit aller Flächen ν^{ter} Ordnung, welche überhaupt durch eine R_m von *irgend* einem Geschlecht p gehen können. Nimmt man aber das willkürliche ν genügend gross an, so ist bekannt (und wir werden es in § 7 wiederfinden), dass es nicht mehr als $\nu m+1-p$ lineare Bedingungen für F_ν ausmacht, wenn F_ν durch R_m^p gehen soll. Man hat dann also

$$\tfrac{1}{6}(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)-1-(\nu m+1-p) \leqq \tau,$$

und damit eine obere Grenze für p.

Um die Zahl τ zu finden, betrachten wir den in einer Ebene ε liegenden ebenen Schnitt f_μ von F_μ und auf demselben die Punktgruppen, welche von den durch R_m^p gehenden Flächen F_ν ausgeschnitten werden. Hiermit vergleichen wir die analogen auf R_m^π bezüglichen Zahlen.

Die f_μ wird von der Curve R_m^p in einer Gruppe G_m von m Punkten getroffen, durch welche alle betrachteten Flächen F_ν gehen; die auf f_μ ausgeschnittenen beweglichen Gruppen bestehen also aus Gruppen $G_{\nu\mu-m}$ von je $\nu\mu-m = (\nu-\alpha)\mu+\beta$ Punkten.

Wenn man nun sämmtliche Flächen F_ν sucht, welche durch R_m^p gehen, so hat man dieselben aus verschiedenartigen Flächen zusammenzusetzen, und zwar

*) Vgl. für den *Satz* auch (*V.*), p. 64.

(1.) aus allen Flächen $F_{\nu-\mu}$, verbunden mit F_μ;

(2.) aus allen F_ν durch R^p_m, welche auch vermöge $F_\mu = 0$ nicht in die Ebene ε und Flächen $F_{\nu-1}$ durch R^p_m zerfallen;

. . . .

$(i+2.)$ aus ε^i, verbunden mit allen $F_{\nu-i}$ durch R^p_m, welche auch vermöge $F_\mu = 0$ nicht in ε, verbunden mit Flächen $F_{\nu-i-1}$ durch R^p_m zerfallen;

. . . .

Diese Flächenarten sind der Definition nach linear von einander unabhängig; und es mögen in (1.), (2.), ..., $(i+2.)$, ... der Reihe nach

$$k,\quad k_0,\quad k_1,\quad \ldots,\quad k_i,\quad \ldots$$

linear von einander unabhängige Flächen existiren. Dieselben Zahlen in Betreff der Raumcurve R^π_m seien bez.

$$l,\quad l_0,\quad l_1,\quad \ldots,\quad l_i,\quad \ldots,$$

wobei $k = l$ wird. Um die Zahl l_i auszuwerthen, kann man nach dem Restsatz statt R^π_m irgend eine dazu corresiduale Curve gleicher Ordnung setzen, insbesondere eine Curve $R_{(\alpha-1)\mu}$, die vollständiger Schnitt von F_μ mit einer Fläche $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $F_{\alpha-1}$, ist, in Verbindung mit einer ebenen Curve $R_{\mu-\beta}$. Die durch diese R^π_m gehenden ∞^{l_i-1} Flächen $F_{\nu-i}$ zerfallen dann vermöge $F_\mu = 0$ in die Fläche $F_{\alpha-1}$, verbunden mit den durch die ebene Curve $R_{\mu-\beta}$ gehenden Flächen $F_{\nu-i-\alpha+1}$, welche nicht ε zum Factor haben. Man beweist aber leicht allgemein, dass solche durch eine ebene Curve $R_{\mu-\beta}$ gehenden Flächen $F_{\nu-i-\alpha+1}$ vermöge $F_\mu = 0$ und $\varepsilon = 0$ genau dieselbe Mannigfaltigkeit bilden, als vermöge einer ebenen Curve $f_\mu = 0$ die ebenen Curven $C_{\nu-i-\alpha+1}$, welche durch $\mu-\beta$ auf einer Geraden liegende Punkte von f_μ gehen. Hieraus folgt also nach § 5: *dass die Mannigfaltigkeit l_i-1 genau übereinstimmt mit der Maximalzahl der Mannigfaltigkeit einer Schaar von Gruppen $G_{\mu(\nu-\alpha-i)+\beta}$ auf f_μ, wo $i = 0, 1, \ldots, \nu-\alpha$ sein kann.*

Da nun die durch R^p_m gehenden Flächen $F_{\nu-i}$ die Curve f_μ in einer ∞^{k_i-1}-Schaar von Gruppen $G_{\mu(\nu-\alpha-i)+\beta}$ treffen, so hat man nothwendig:

$$k_i \leqq l_i \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-\alpha).$$

Daher wird die Gesammtmannigfaltigkeit der durch die Raumcurve R^p_m gehenden Flächen ν^{ter} Ordnung

$$\overline{\gtrless}\ \tau = l + l_0 + l_1 + \cdots + l_{\nu-\alpha} - 1,$$

und nach dem oben Gesagten hat man hiermit zugleich *eine obere Grenze für p, welche aber nach der Definition der Curve R^π_m mit π übereinstimmt.*

Sucht man jetzt die allgemeinste Curve R_m^p auf F_μ, deren Geschlecht $p = \pi$ ist, so muss für eine solche Curve

$$k_0 + k_1 + \cdots + k_{\nu-\alpha} = l_0 + l_1 + \cdots + l_{\nu-\alpha}$$

werden, also, da alle Zahlen k und l positiv oder 0 sind und $k_i \gtreqless l_i$:

$$k_i = l_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu-\alpha).$$

Da insbesondere $l_{\nu-\alpha} > 0$ ist, so folgt auch

$$k_{\nu-\alpha} > 0,$$

d. h. ***durch eine solche R_m^p, für die $p = \pi$ ist, muss eine Fläche α^{ter} Ordnung hindurchgehen.*** Da nun ein Restschnitt, von einer Ordnung $< \mu$, sein Maximalgeschlecht nur dann erhält, wenn er ein *ebener* Schnitt ist, so ist der Beweis des Hauptsatzes dieses Paragraphen vollständig erbracht.

An diesen Satz lassen sich einige für die Theorie der Raumcurven wichtige Bemerkungen und Folgerungen knüpfen.

Die Fläche F_μ war (wegen des Schnittes f_μ) in dem Satze als *irreducibel* vorausgesetzt; die Raumcurve R_m^π dagegen, welche das Maximum π des Geschlechts hat, kann irreducibel oder reducibel sein, und das letztere wird dann jedenfalls eintreten, wenn $\alpha < \beta$ ist.

Weiss man nur, dass R_m^p überhaupt auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung, F_μ, liegt und ist $p > \pi$, so muss also F_μ reducibel sein. Ist zu gleicher Zeit R_m^p irreducibel, so folgt, dass R_m^p auf einer Fläche von niedrigerer, als μ^{ter} Ordnung, liegt. — Aber man kann unter Umständen noch weiter schliessen.

Für $\alpha \geqq \beta$ kann man die F_α, welche R_m^π aus F_μ ausschneidet, ebenfalls irreducibel annehmen, daher folgt:

> Für $\alpha \geqq \beta$ hat man für das Geschlecht der Raumcurve $R_{\alpha\mu-\beta}$ die gleiche obere Grenze $\pi_\alpha = \pi$ auf F_α und F_μ.

Für $\alpha < \beta$ wird die F_α, die durch R_β geht, reducibel, und man hat dann den Satz:

> Für $\alpha < \beta$ hat eine irreducible Fläche F_α eine andere obere Grenze π_α des Geschlechts der $R_{\alpha\mu-\beta}$, als π, und zwar ist $\pi_\alpha < \pi$.

Denn man kann dann für die $R_m^{\pi_\alpha}$ auf einer solchen F_α auch eine irreducible F_μ angeben, welche $R_m^{\pi_\alpha}$ enthält, ohne dass der Restschnitt, von einer Ordnung $> \alpha$, von F_α und F_μ eben wird.

> Ebenso haben alle irreduciblen Flächen F_ν, für welche $\mu > \nu > \alpha$ ist, für die Curven $R_{\alpha\mu-\beta}$ eine obere Grenze π_ν des Geschlechts, für welche $$\pi_\nu \leqq \pi.$$

Sei nämlich

$$m = (\alpha+i)\mu_i - \beta_i, \qquad (i=0, 1, \ldots, k),$$

wo

$$0 \leqq \beta_i < \alpha + i,$$

also

$$\mu \geqq \mu_0 > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_k \geqq \alpha + k$$

werden sollen. Für die irreduciblen Flächen $F_{\alpha+i}$ und F_{μ_i} hat man bei R_m dasselbe Maximalgeschlecht $\pi_{\alpha+i} = \pi_{\mu_i}$, wobei diese R_m selbst irreducibel genommen werden kann. Diese R_m liegt dann zugleich auf einer irreduciblen Fläche $F_{\mu_{i-1}}$, woraus für das Maximalgeschlecht $\pi_{\mu_{i-1}}$ der R_m auf $F_{\mu_{i-1}}$ folgt, dass $\pi_{\mu_{i-1}} \geqq \pi_{\alpha+i}$ wird. Es wird sogar $\pi_{\mu_{i-1}} > \pi_{\alpha+i}$, weil R_m, durch die niedrigstens die Fläche $(\alpha+i)^{\text{ter}}$ Ordnung, $F_{\alpha+i}$, geht, auf $F_{\mu_{i-1}}$ keinen ebenen Rest haben kann. — Für die Flächen F_ν, deren ν zwischen zwei Zahlen μ_i und μ_{i-1} fällt, sieht man analog mit Hülfe des vorhergehenden Satzes, dass $\pi_{\mu_i} \leqq \pi_\nu < \pi_{\mu_{i-1}}$ wird.

> Daher bilden, wenn die Flächenordnung von α auf $\alpha+k$ steigt ($\alpha+k \leqq \mu_k$), die Maxima von π_ν für die Curven $R_m^{\pi_\nu}$ auf den irreduciblen Flächen F_α, $F_{\alpha+1}$, ... $F_{\alpha+k}$ eine absteigende Reihe
>
> $$\pi_\alpha, \quad \pi_{\alpha+1}, \quad \ldots \quad \pi_{\alpha+k};$$
>
> und wenn die Flächenordnung von μ_k ($\geqq \alpha+k$) weiter auf μ_0 steigt, wieder eine aufsteigende Reihe, welche der vorhergehenden gerade entgegengesetzt ist:
>
> $$\pi_{\mu_k} = \pi_{\alpha+k}, \quad \pi_{\mu_{k-1}} = \pi_{\alpha+k-1}, \quad \ldots \quad \pi_{\mu_0} = \pi_\alpha;$$
>
> während die π_ν für irreducible Flächen F_ν, deren ν sich zwischen zwei Zahlen μ_i und μ_{i-1} einordnet, sich ebenfalls zwischen die betreffenden π_{μ_i} und $\pi_{\mu_{i-1}}$ einordnet oder mit π_{μ_i} zusammenfällt.

Hieraus folgt weiter:

> Sei $p > \pi$, wo π das Maximalgeschlecht für die Curven R_m auf der irreduciblen Fläche F_μ ist; dann wird auch $p > \pi > \pi_\alpha > \pi_{\alpha+1} > \cdots$. Weiss man nun, dass diese irreducible R_m^p auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung liegen muss, so muss dieselbe auch nothwendig auf einer Fläche $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Die Betrachtung über die Reihe der π_α, $\pi_{\alpha+1}$, ... liefert sogleich noch einen wichtigen Satz. Sucht man den absolut grössten Werth von

p für die Raumcurven m^{ter} Ordnung, so ergiebt sich, dass man α möglichst niedrig nehmen muss. Dies heisst aber:

Die nicht ebenen Curven m^{ter} Ordnung vom Maximalgeschlecht müssen auf Flächen zweiter Ordnung liegen; sie werden auf den F_2 erhalten, indem man als Rest auf F_2 einen ebenen Schnitt nimmt, also: indem man die F_2 durch Flächen der Ordnung $\frac{m}{2}$, bez. durch Flächen der Ordnung $\frac{m+1}{2}$, welche durch eine Gerade von F_2 gehen, schneidet. Dieses Maximalgeschlecht wird daher $\frac{(m-2)^2}{4}$, bez. $\frac{(m-1)(m-3)}{4}$ *).

§ 7.

Die Bedingungen, dass eine Fläche F_μ durch eine gegebene Raumcurve R_m^p hindurchgehe.

Die Raumcurve R_m^p nehmen wir als *irreducibel* an. — Wir setzen

$$N_\mu = \tfrac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)-1.$$

Es giebt, wie man leicht zeigt, immer irreducible Flächen F_{m-1}, $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch R_m^p gehen; auch irreducible F_{m-2} durch R_m^p, ausgenommen, wenn R_m^p auf einer F_2 liegt und $p=0$ ist.

Wir behandeln allgemeiner die Bedingungen, unter welchen überhaupt eine Fläche μ^{ter} Ordnung, F_μ, durch eine irreducible R_m^p geht.

Sei zunächst

$$(1.)\quad \mu m > 2p-2,$$

$$(2.)\quad p \geqq \mu m - N_\mu + 1;$$

da die ∞^{N_μ} Flächen μ^{ter} Ordnung die Curve R_m^p in Gruppen $G_{\mu m}$ treffen, von denen wegen (1.) nur $\infty^{\mu m-p}$ auf R_m^p existiren können (§ 1, II.), so folgt:

Unter den Bedingungen (1.) und (2.) muss wenigstens eine lineare $\infty^{N_\mu-\mu m+p-1}$-Schaar von Flächen F_μ durch R_m^p gehen.

Dieses Resultat lässt sich aber erweitern. Nimmt man an, dass bereits $\infty^{\lambda-1}$ Flächen F_μ durch R_m^p gehen, so erhielte man auf R_m^p durch den Schnitt mit allen F_μ noch $\infty^{N_\mu-\lambda}$ Gruppen $G_{\mu m}$ von je μm Punkten. Sind

---

*) Dieser absolut grösste Werth von p oder der entsprechende absolut kleinste Werth von h wird von (*H.*), Bull. II, p. 42, direct erhalten, indem in § 1, 4, (5.) zwei verschiedene Curvenschaaren, welche dieselbe ∞^3-Schaar von Punktgruppen $g_m^{(3)}$ aus f_m^p ausschneiden, nach dem Restsatze mit einander verglichen werden.

nun $\mu m-(N_\mu-\lambda)+1$ Punkte *einer* solchen Gruppe ganz willkürlich wählbar, d. h. ist

$$\mu m-(N_\mu-\lambda)+1 \leqq N_\mu-\lambda$$

oder

$$(3.)\quad \mu m < 2(N_\mu-\lambda),$$

und ist ferner

$$(4.)\quad p > \mu m-(N_\mu-\lambda),$$

so muss nach Satz III'. des § 1 noch wenigstens eine weitere Fläche F_μ durch R_m^p gehen. Da nun die Bedingung für die Annahme, dass $\infty^{\lambda-1}$ Flächen F_μ durch R_m^p gehen, durch (3.), (4.) von selbst erfüllt ist, so folgt:

Wird der grösste Werth der ganzen Zahl λ, welcher den Ungleichungen (3.), (4.) Genüge leistet, nicht negativ, so hat man die hinreichende Bedingung, dass durch R_m^p eine lineare ∞^λ-Schaar von Flächen F_μ, und im Allgemeinen auch keine weitere F_μ, hindurchgehe. Insbesondere (für $\lambda=0$) stellen

$$(3'.)\quad \mu m < 2N_\mu,$$
$$(2.)\quad p \geqq \mu m-N_\mu+1$$

die hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass durch die R_m^p überhaupt eine F_μ gehe.

Der oben aus (1.), (2.) geschlossene Satz ist ein specieller Fall dieses Satzes. Ein Fall, der über die Grenzen (3.), (4.) hinausgeht, lässt sich mit Hülfe des Satzes III''. des § 1 analog erledigen:

Für

$$(3''.)\quad \begin{cases} \mu m \leqq 2N_\mu, \\ p > \mu m-N_\mu+1 \end{cases}$$

muss ebenfalls eine F_μ durch R_m^p gehen.

Zu diesen Sätzen, welche für eine *specielle* Curve R_m^p nur eine *obere Grenze* für die Zahl der F_μ aufzulegenden Bedingungen geben, damit F_μ durch R_m^p gehe, tritt noch ein weiterer Satz, welcher diese Zahl in gewissen Fällen *genau* angiebt.

Die Zahl der Bedingungen war für eine F_μ, für welche $\mu m > 2p-2$, höchstens $\mu m+1-p$. Für $\mu m \leqq 2p-2$ konnte diese Zahl auch $> \mu m+1-p$ werden. Für $\mu m > 2p-2$ kann der Fall, dass die Bedingungszahl $< \mu m+1-p$ ist, dann eintreten, wenn R_m^p keine allgemeine Curve ist. Nun ergiebt aber der Satz VII. des § 1, dass, wenn R_m^p der Schnitt zweier Flächen F_ν, F_{ν_1} und die Restcurve $R_{m'}^{p'}$ irreducibel ist, dann vermöge $F_\nu=0$ und $F_{\nu_1}=0$

genau $\infty^{p'-1}$ Flächen $F_{\nu+\nu_1-4}$ durch R_m^p gehen, d. h. dass für diese $F_{\nu+\nu_1-4}$ die Curve R_m^p genau $m(\nu+\nu_1-4)+1-p$ Bedingungen ausmacht. Für jede Fläche F_μ, wo $\mu \geqq \nu+\nu_1-4$, kann also R_m^p auch nicht weniger als $m\mu+1-p$ Bedingungen darstellen; also:

Für alle Flächen F_μ, deren Ordnung μ eine gewisse Grenze übersteigt, stellt eine R_m^p, wie speciell diese Curve auch sei, genau $m\mu+1-p$ Bedingungen dar. Eine Grenze kann dadurch gefunden werden, dass man, wenn man durch R_m^p zwei Flächen der Ordnungen ν und ν_1 legen kann, die sich weiter in einer irreduciblen Restcurve schneiden, $\mu \geqq \nu+\nu_1-4$ nimmt.

Man kann noch den Satz hinzufügen:

Wird die Curve R_m^p durch den Schnitt zweier Flächen F_ν, F_{ν_1} erzeugt und kann man durch die Restcurve eine Fläche der Ordnung $\nu+\nu_1-\mu-4$ legen, welche nicht in der Form $AF_\nu+BF_{\nu_1}$ darstellbar ist, während die Restcurve im Uebrigen ganz beliebig, z. B. reducibel sein kann, so kann eine Fläche F_μ, um durch R_m^p zu gehen, *mehr als* $m\mu+1-p$ Bedingungen zu erfüllen haben.

Denn die Flächen F_μ schneiden R_m^p unter den angegebenen Umständen in einer Specialschaar.

§ 8.

Die Bedingungen, dass eine Fläche F_ν durch eine auf einer Fläche F_μ gegebene Raumcurve R_m^p hindurchgehe.

Für die *irreducible* Raumcurve R_m^p nehmen wir jetzt an, dass bereits eine irreducible Fläche μ^{ter} Ordnung, F_μ, auf welcher R_m^p liegt — etwa die Fläche niedrigster Ordnung, die überhaupt R_m^p enthält — bekannt sei.

Wir behandeln hier die Bedingungen, unter welchen eine Fläche ν^{ter} Ordnung, F_ν, durch R_m^p hindurchgehe, ohne dass die F_ν die F_μ zum Factor enthalte. Dabei sei

$$\nu \geqq \mu-3,$$
$$W_{\nu,\mu} = N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1, \quad (\S\ 7.)$$
$$= \tfrac{1}{6}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)+\tfrac{1}{2}\mu\nu(\nu-\mu+4).$$

$W_{\nu,\mu}$ stellt die Mannigfaltigkeit aller Schnittcurven $\mu.\nu^{\text{ter}}$ Ordnung dar, in welchen F_μ von sämmtlichen Flächen ν^{ter} Ordnung geschnitten wird. Wie in § 7 hat man zunächst:

Unter den Bedingungen

$$(1.)\quad \nu m > 2p-2,$$
$$(2.)\quad p \geqq \nu m - W_{\nu,\mu}+1$$

muss wenigstens eine lineare $\infty^{W_{\nu,\mu}-\nu m+p-1}$-Schaar von Flächen F_ν, von denen keine F_μ zum Factor hat, durch R_m^p gehen.

Allgemeiner folgt, genau wie in § 7:

Dass die Ungleichungen

$$(3.)\quad \nu m < 2(W_{\nu,\mu}-\lambda),$$
$$(4.)\quad p > \nu m - W_{\nu,\mu}+\lambda$$

eine nicht negative grösste Lösung für die ganze Zahl λ zulassen, ist die hinreichende Bedingung dafür, dass durch die auf der F_μ gelegene irreducible Curve R_m^p noch eine lineare ∞^λ-Schaar von Flächen ν^{ter} Ordnung, die F_μ nicht zum Factor haben — und im Allgemeinen auch keine weitere F_ν — hindurchgehe. Insbesondere stellen

$$(3'.)\quad \nu m < 2W_{\nu,\mu},$$
$$(2.)\quad p \geqq \nu m - W_{\nu,\mu}+1$$

die hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass durch diese R_m^p überhaupt eine von F_μ verschiedene Fläche ν^{ter} Ordnung (die nämlich F_μ nicht zum Factor hat) hindurchgehe.

Wenn (2.) nicht erfüllt ist, so wird es eine specielle, die R_m^p charakterisirende Eigenschaft sein, wenn R_m^p trotzdem auf einer von F_μ verschiedenen Fläche F_ν liegt; ob nun (3'.) erfüllt ist oder nicht. Ist ferner (2.) erfüllt, nicht aber (3'.), so geht entweder eine von F_μ verschiedene F_ν durch R_m^p, oder die von den F_ν auf R_m^p ausgeschnittenen Punktgruppen bilden eine Specialschaar (§ 1, II.). Die für diesen Fall gültige Relation

$$(4.)\quad \nu m \geqq 2W_{\nu,\mu}$$

schreibt sich auch, wenn man

$$\nu\mu = m+m'$$

setzt:

$$(4'.)\quad \nu.\{\mu(\mu-4)-m'\} \geqq \tfrac{1}{3}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3),$$

setzt also nothwendig

$$(5.)\quad m' < \mu(\mu-4)$$

voraus. Sie liefert, wenn m und μ gegeben sind, in (4.) eine *obere* Grenze für ν, während

$$(6.) \qquad \nu\mu \geqq m$$

eine *untere* Grenze von ν liefert.

§ 9.

Fortsetzung. 1. Restmethode. 2. Methode des ebenen Schnittes.

1. Auch im letzten Falle des § 8, wobei (2.) und (4.) erfüllt sind, existirt eine auf dem Restsatze V. des § 1 beruhende Methode, welche in einem sehr allgemeinen Falle nachweist, ob sich durch R_m^p eine von F_μ verschiedene Fläche F_ν legen lässt. Wir bezeichnen diese Methode als *Restmethode.*

Sei wieder $\nu\mu = m+m'$. Durch R_m^p möge eine von F_μ verschiedene Fläche $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehen, welche F_μ in einer Restcurve $R'_{m'+\mu}$ treffe. Durch diese Curve $R'_{m'+\mu}$ lege man wieder rückwärts eine Fläche der Ordnung ν_1+1, welche F_μ weiter in einer Curve $R_{m_1}^{p_1}$ treffe. Diese Curve $R_{m_1}^{p_1}$ wird der gegebenen Curve R_m^p corresidual sein. *Kann man daher nachweisen, dass durch $R_{m_1}^{p_1}$ zugleich eine Fläche ν_1^{ter} Ordnung geht, die verschieden ist von F_μ, so ergiebt der Restsatz* V., § 1, *dass auch durch R_m^p eine von F_μ verschiedene Fläche ν^{ter} Ordnung gehen muss.*

Wendet man aber auf diesen Nachweis den Hauptsatz des § 8 an, so folgt:

> Wenn (2.), (4.) des § 8 erfüllt sind, während R_m^p auf einer von F_μ verschiedenen Fläche $F_{\nu+1}$ liegt, und wenn sich durch den Rest des Schnittes von F_μ mit der $F_{\nu+1}$ eine Fläche F_{ν_1+1} $(\nu_1 \geqq \mu-3)$ legen lässt, welche F_μ weiter in einer irreduciblen Curve schneidet und für welche die Ungleichung
>
> $$\nu_1 \{\mu(\mu-4)-m'\} < \tfrac{1}{3}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3),$$
>
> für
>
> $$\mu\nu = m+m',$$
>
> erfüllt ist, so muss R_m^p nothwendig auch auf einer von F_μ verschiedenen Fläche F_ν liegen.

Die Anwendbarkeit des Princips dieser Methode ist mit dem angegebenen Hauptfalle noch nicht erschöpft. Man möge nämlich durch die Restcurve $R'_{m'+\mu}$ auch eine Fläche ν^{ter} Ordnung legen können; alsdann

braucht man nur die Annahme zu machen, dass alle Curven auf F_μ von niedrigerer als m^{ter} Ordnung, irreducible und reducible, schon behandelt sind, um jene Frage für die R_m^p als erledigt betrachten zu können. Denn die Restcurve der $R'_{m'+\mu}$ wird jetzt von niedrigerer als m^{ter} Ordnung. Die Frage aber, ob durch $R'_{m'+\mu}$ eine von F_μ verschiedene Fläche ν^{ter} Ordnung gehe, beantwortet sich nach dem Hauptsatze des § 8 (und Formel (5.) des § 8) jedenfalls dann direct, wenn $m-\mu \geqq \mu(\mu-4)$, d. h. $m \geqq \mu(\mu-3)$ und $R'_{m'+\mu}$ irreducibel ist; oder auch, nach der eben gemachten Annahme, dann, wenn $m'+\mu < m$ wird.

2. Neben die Restmethode stellt sich noch eine zweite, dieselbe in allen Fällen ergänzende Methode, um zu erkennen, ob durch eine auf einer F_μ gelegene Curve R_m^p eine von F_μ verschiedene Fläche F_ν gehe. Diese *Methode des ebenen Schnittes* beruht, wie die Untersuchung des § 6, auf der Betrachtung der Punktgruppen, in welchen ein irreducibler ebener Schnitt f_μ von F_μ von den durch R_m^p gehenden Flächen getroffen wird.

Es möge bereits nach irgend einer Methode, etwa nach der allgemeinen des vorigen Paragraphen, nachgewiesen sein, dass durch die Curve R_m^p noch ∞^λ Flächen $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $F_{\nu+1}$, die alle F_μ nicht zum Factor haben, gehen. Die Zahl λ wird dann eine Function von p sein, und eine Grenze für λ wird zugleich eine solche für p.

Wenn nun keine dieser Flächen $F_{\nu+1}$ in die Ebene durch den Schnitt f_μ und in eine durch R_m^p gehende Fläche F_ν zerfällt, erhält man auf f_μ durch den Schnitt mit den $F_{\nu+1}$ noch eine lineare ∞^λ-Schaar von Gruppen von je $(\nu+1)\mu-m$ Punkten. *Sobald also λ, d. h. p, so gross ist, dass die Maximalzahl der Mannigfaltigkeit für eine Schaar von Gruppen von je $(\nu+1)\mu-m$ Punkten der ebenen Curve f_μ überschritten ist, muss R_m^p auf einer von F_μ verschiedenen Fläche ν^{ter} Ordnung liegen.* Diese Maximalzahl ist aber bei der Curve f_μ nach § 5, (1.), (2.), (3.), einfach bestimmt.

Ueberschreitet die Zahl λ die genannte Maximalzahl um λ_1+1, so muss R_m^p auf ∞^{λ_1} Flächen ν^{ter} Ordnung liegen, die von F_μ verschieden sind.

Genau so, wie man von den Flächen $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch R_m^p auf die Flächen ν^{ter} Ordnung durch R_m^p geschlossen hat, kann man nun von diesen auf die Flächen $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch R_m^p schliessen; etc. Man kommt auf diese Weise zuletzt auf die obere Grenze π von p für alle auf F_μ liegenden Curven R_m, ebenso wie es in § 6 gegeben ist.

In Bezug auf Anwendungen dieser Methode vergl. den § 17.

§ 10.

Die Gesammtheit der Raumcurven R_m^p.

Um auf einer irreduciblen Fläche F_μ sämmtliche auf ihr liegende Raumcurven R_m^p zu erhalten, wird man einen Schnitt R_m^p von F_μ mit einer F_ν nicht mehr zu behandeln brauchen, wenn nachgewiesen ist, dass diese Curve schon durch eine Fläche $F_{\nu-1}$ aus F_μ ausgeschnitten werden kann. Demgemäss ergeben die Formeln der §§ 8 und 9 Grenzen für diesen Fall, wenn man dort $\nu-1$ statt ν setzt. Da sich die Ungleichungen

$$p > (\nu-1)m - W_{\nu-1,\mu}$$
$$(\nu-1)m < 2W_{\nu-1,\mu},$$

wenn man

$$(1.)\quad \begin{cases} m+m' = \mu\nu, \\ \quad p' = p-\tfrac{1}{2}(m-m')(\mu+\nu-4) \end{cases}$$

setzt, wo also p' das Geschlecht einer Restcurve $R_{m'}^{p'}$ von R_m^p beim Schnitt von F_μ mit einer F_ν vorstellt, auch so schreiben:

$$p' > m'(\mu-3) - \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)+1,$$
$$(\nu-1).\{\mu(\mu-3)-m'\} < \tfrac{1}{3}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3),$$

so kann man die Resultate der §§ 8, 9 so zusammenfassen:

Um auf einer irreduciblen Fläche F_μ *alle* irreduciblen Raumcurven R_m^p, welche zugleich auf keiner Fläche niedrigerer als μ^{ter} Ordnung liegen, zu erhalten, nehme man die Zahlen ν aus der Reihe der Zahlen μ, $\mu+1$, $\mu+2$, ..., und zwar zunächst so gross, dass $m' = \mu\nu - m$ nicht negativ wird. Die oberste Grenze von ν, welche man nicht zu überschreiten braucht, ergiebt sich daraus, dass man ν kleiner wählen kann, als die kleinste Zahl ν_0, für welche die beiden Ungleichungen

$$W_{\nu_0-1,\mu} - (\nu_0-1)m+p > 0,$$
$$2W_{\nu_0-1,\mu} - (\nu_0-1)m > 0$$

zugleich existiren. Sei p' durch (1.) gegeben.

Wird dann

$$(a.)\quad p' \leqq m'(\mu-3) - \tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)+1,$$

so nehme man auf F_μ *alle* Curvenarten $R_{m'}^{p'}$, durch welche noch eine F_ν gehen kann, und lege die Flächen F_ν durch diese $R_{m'}^{p'}$,

um Restcurven R^p_m zu erhalten. Die so bei *verschiedenen* ν (und m') erhaltenen Curven R^p_m werden im Allgemeinen von einander verschieden, und F_ν die niedrigste Fläche sein, welche durch R^p_m geht, ohne F_μ zum Factor zu haben; specielle Curven R^p_m können jedoch auf diese Weise auch mehrfach erhalten werden, indem zugleich eine von F_μ verschiedene Fläche $F_{\nu-i}$, $i>0$, durch R^p_m gehen könnte.

Wird aber

$$(b.)\qquad p' > m'(\mu-3)-\tfrac{1}{6}\mu(\mu-1)(\mu-2)+1,$$

so nehme man auf F_μ alle Curvenarten $R^{p'}_{m'}$, durch welche noch eine Fläche F_ν geht, für die

$$(\nu-1).\{\mu(\mu-3)-m'\} \geqq \tfrac{1}{3}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)$$

ist (also jedenfalls auch $m'<\mu(\mu-3)$ ist, von $\mu=3$, $m'=0$ abgesehen), durch welche aber *keine* F_{ν_1} ($\nu_1 \geqq \mu-2$) geht, die F_μ in einer irreduciblen Restcurve schneidet, und wo

$$(\nu_1-1).\{\mu(\mu-3)-m'\} < \tfrac{1}{3}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)$$

ist; und schneide F_μ mit den durch die $R^{p'}_{m'}$ gehenden Flächen F_ν. Auch die bei Variiren von ν so erhaltenen Curven R^p_m werden im Allgemeinen von einander verschieden, und F_ν die niedrigste von F_μ verschiedene Fläche sein, die R^p_m enthält; gewisse dieser Fälle, in welchen bereits eine $F_{\nu-i}$, $i>0$, durch R^p_m geht, sind nach der Methode des § 9 zu erledigen*).

Um sämmtliche Raumcurven R^p_m des Raumes zu erhalten, betrachtet man auf dieselbe Weise alle irreduciblen Flächen F_μ, von $\mu=2$ an bis zu einer oberen Grenze $\mu=\mu_0$, wo μ_0 der kleinste Werth ist, welcher (§ 7) den beiden Ungleichungen

$$2N_{\mu_0}-m\mu_0>0,\quad \text{d. h.}\quad \tfrac{1}{3}(\mu_0+2)(\mu_0+4)+1>m,$$
$$N_{\mu_0}-m\mu_0+p>0$$

zugleich Genüge leistet. Hierbei ist dann insbesondere der vorletzte Satz des § 6 zu beachten, durch welchen die Grenze für μ, wenn p selbst eine dort gegebene Grenze überschreitet, noch bedeutend reducirt wird.

*) Vgl. (*H.*), Comptes rendus t. 70. Da eine Bedingung, wie (3'.), § 8, daselbst nicht erwähnt wird, so werden bei (*H.*) auch nur die hier unter (*a.*) gegebenen Curven R^p_m genannt, die unter (*b.*) gar nicht; und jene unter (*a.*) werden alle als von einander verschieden bezeichnet.

§ 11.

Ueber die Constantenzahl der Raumcurven. Ein neues Element. Eine neue Ungleichung.

Berücksichtigt man nach den vorhergehenden Paragraphen die möglichen Lagen der Raumcurven R_m^p auf Flächen F_μ, so kann man für viele specielle Arten von Raumcurven, die einen Theil der allgemeinsten in § 2 betrachteten bilden, und auch für Fälle von allgemeinen Raumcurven, deren Geschlecht die in § 2 angegebene Grenze $\frac{4}{3}(m-3)$ überschreitet, zu *genauen* Bestimmungen der *Constantenzahl* kommen, in jedem Falle aber zu einer *unteren Grenze* für die Constantenzahl, die viel höher werden kann, als die in § 2 gefundene untere Grenze $4m$.

Wir führen zunächst ein *neues Element* in die Theorie ein. Wenn es auch möglich ist, eine irreducible Fläche F_μ durch eine gegebene Curve R_m^p zu legen, so werden doch umgekehrt auf einer gegebenen Fläche F_μ im Allgemeinen keine solche Curven R_m^p liegen, da eine Fläche F_μ für $\mu > 3$ im Allgemeinen überhaupt keine Curven enthält, die nicht *vollständige* Schnitte mit Flächen F_ν wären. *Die Zahl der Bedingungen, welchen eine allgemeine Fläche F_μ unterworfen ist, um überhaupt eine Raumcurve einer solchen Art R_m^p enthalten zu können, die von Flächen ν^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden kann, sei mit $\alpha_{\mu,\nu}$ bezeichnet.*

Es giebt also $\infty^{N_\mu-\alpha_{\mu,\nu}}$ Flächen μ^{ter} Ordnung, welche Raumcurven dieser Art R_m^p, die von Flächen ν^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden kann, enthalten, wobei

$$N_\mu = \tfrac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)-1.$$

Ausserdem führen wir folgende Bezeichnungen ein. Sei R_m^p der theilweise oder vollständige Schnitt einer F_μ mit einer F_ν. Dann seien F_μ^1, F_ν^1 solche Flächen F_μ, F_ν, welche Curven dieser Art R_m^p überhaupt enthalten, also den $\alpha_{\mu,\nu}$, bez. $\alpha_{\nu,\mu}$, Bedingungen genügen; A_μ, A_ν sei für eine Fläche F_μ, bez. F_ν, die Zahl der Bedingungen, um durch eine *gegebene* Curve R_m^p dieser Art hindurchzugehen; t_μ, bez. t_ν, sei die Mannigfaltigkeit der Schaar von Curven dieser Art R_m^p, welche auf einer gegebenen Fläche F_μ^1, bez. F_ν^1, liegt; u sei die Mannigfaltigkeit von Curven dieser Art R_m^p im Raume überhaupt.

Sei ferner $R_{m'}^{p'}$ der Restschnitt von F_μ^1 und F_ν^1, und seien die den obigen analogen Zahlen für $R_{m'}^{p'}$ bezüglich mit A'_μ, A'_ν, t'_μ, t'_ν, u' bezeichnet.

Wie in § 8 sei $\nu \geqq \mu$ und

$$W_{\nu,\mu} = N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1,$$

$$W_{\mu,\nu}\begin{cases} = N_\mu & \text{für } \mu < \nu, \\ = N_\mu - 1 & \text{für } \mu = \nu, \end{cases}$$

und sei $s_{\mu,\nu} = s_{\nu,\mu}$ die Zahl der Schnittpunkte von R_m^p und $R_{m'}^{p'}$, also:

$$s_{\mu,\nu} = s_{\nu,\mu} = m(\mu+\nu-4)-(2p-2) = m'(\mu+\nu-4)-(2p'-2).$$

Zunächst hat man nun eine Beziehung zwischen den auf R_m^p und auf $R_{m'}^{p'}$ bezüglichen Zahlen A und t. Denn*) geht man von sämmtlichen $\infty^{t'_\mu}$ Curven $R_{m'}^{p'}$ auf einer F_μ^1 aus und legt durch jede derselben alle möglichen von F_μ verschiedenen F_ν, an Zahl $\infty^{W_{\nu,\mu}-A'_\nu}$, so erhält man alle ∞^{t_μ} Curven R_m^p auf F_μ^1, aber jede auf $\infty^{W_{\nu,\mu}-A_\nu}$ Weisen; also

$$t_\mu = t'_\mu + (W_{\nu,\mu} - A'_\nu) - (W_{\nu,\mu} - A_\nu),$$

d. h.

$$(1.) \quad t_\mu - t'_\mu = A_\nu - A'_\nu,$$

und ebenso

$$(1'.) \quad t_\nu - t'_\nu = A_\mu - A'_\mu,$$

Die A_μ Bedingungen dafür, dass eine F_μ durch eine R_m^p hindurchgehe, kann man willkürlich auf die Constanten von F_μ und die von R_m^p vertheilen, wenn man nur wenigstens gewisse $\alpha_{\mu,\nu}$ der Bedingungen auf die Constanten von F_μ wirft. Denkt man sich F_μ nur diesen $\alpha_{\mu,\nu}$ Bedingungen unterworfen, also als Fläche F_μ^1, so existiren auf einer solchen F_μ^1 aus den ∞^u Raumcurven R_m^p noch $\infty^{u-(A_\mu-\alpha_{\mu,\nu})}$; also

$$t_\mu = u - (A_\mu - \alpha_{\mu,\nu}),$$

d. h.

$$(2.) \quad u = t_\mu + A_\mu - \alpha_{\mu,\nu},$$

und ebenso:

$$(2'.) \quad u = t_\nu + A_\nu - \alpha_{\nu,\mu},$$

$$(3.) \quad u' = t'_\mu + A'_\mu - \alpha_{\mu,\nu},$$

$$(3'.) \quad u' = t'_\nu + A'_\nu - \alpha_{\nu,\mu},$$

wobei die Zahlen $\alpha_{\mu,\nu}$ für R_m^p und $R_{m'}^{p'}$ offenbar gleichzusetzen waren. Aus diesen Beziehungen folgt

---

*) (*S.*), p. 234.

$$(4.)\quad \begin{cases} u-u' = A_\mu+A_\nu-A'_\mu-A'_\nu, \\ \qquad\; = t_\mu+t_\nu-t'_\mu-t'_\nu, \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} \alpha_{\mu,\nu}-\alpha_{\nu,\mu} = t_\mu-t_\nu+A_\mu-A_\nu, \\ \qquad\qquad\; = t'_\mu-t'_\nu+A'_\mu-A'_\nu, \end{cases}$$

Man hat so fünf unabhängige Beziehungen zwischen den zwölf Grössen A_μ, A'_μ, t_μ, t'_μ, A_ν, A'_ν, t_ν, t'_ν, $\alpha_{\mu,\nu}$, $\alpha_{\nu,\mu}$, u, u'; wobei sich als dàs allgemeine und wesentliche Problem zur Bestimmung der Zahl u nach (2.) die *unabhängige* Bestimmung der Zahl $\alpha_{\mu,\nu}$ erweist.

Um diese unabhängige Bestimmung zu erhalten, stellen wir folgende Betrachtung an: *Damit eine vollständige Schnittcurve zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung $s_{\mu,\nu}$ wirkliche Doppelpunkte erhalte und in zwei Curven mit $s_{\mu,\nu}$ Schnittpunkten zerfalle, werden $\sigma_{\mu,\nu}$ Bedingungen nöthig sein, wo $\sigma_{\mu,\nu}$ höchstens gleich $s_{\mu,\nu}$ ist.*

Für die allgemeinsten Raumcurven R^p_m, von gegebenem m und p, beweisen wir diesen Satz im nächsten Paragraphen unter 3.; und zwar *für beliebig hohe Zahlen μ, ν.* Wenn nun für Flächen F_μ, F_ν von hohen Ordnungen μ, ν die Berührung in $s_{\mu,\nu}$ Punkten schon die genügende Bedingung für das Zerfallen vorstellt, wird dies für Flächen F_μ, F_ν von niedrigeren Ordnungen um so mehr stattfinden müssen; und man wird daher den Satz *auf die allgemeinste Schaar von Curven R^p_m* ausdehnen können, *welche keiner weiteren Bedingung genügen, als auf einer irreduciblen Fläche F_μ und zugleich auf einer von F_μ verschiedenen Fläche F_ν ($\nu \geqq \mu$) zu liegen.* Ausgeschlossen bleibt bei dem Satze, dass man nur einen speciellen Theil dieser Gesammtheit von Curven aufsuche, z. B. nur solche Curven R^p_m, durch welche zugleich eine grössere Schaar von Flächen μ^{ter} Ordnung geht, als durch die allgemeinste auf F_μ und F_ν liegende Curve R^p_m.

Hiernach giebt es im Raume

$$\infty^{w_{\mu,\nu}+w_{\nu,\mu}-\sigma_{\mu,\nu}}$$

Raumcurven, welche vollständige Schnitte von Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung sind und in zwei Curven R^p_m, $R^{p'}_{m'}$ unserer Art zerfallen. Aber solcher Curvensysteme giebt es auf jeder Fläche F^1_μ

$$\infty^{t_\mu+(w_{\nu,\mu}-A_\nu)} = \infty^{t'_\mu+(w_{\nu,\mu}-A'_\nu)},$$

und da man $\infty^{w_{\mu,\nu}-\sigma_{\mu,\nu}}$ verschiedene Flächen F^1_μ hat, welche solche Curvensysteme, und zwar lauter verschiedene, enthalten, so giebt es auch im Raume

$$\infty^{(w_{\mu,\nu}-\sigma_{\mu,\nu})+(t_\mu+w_{\nu,\mu}-A_\nu)}$$

solcher Curvensysteme. Also wird

$$(W_{\mu,\nu}-\alpha_{\mu,\nu})+(t_\mu+W_{\nu,\mu}-A_\nu) = W_{\mu,\nu}+W_{\nu,\mu}-\sigma_{\mu,\nu},$$

d. h.

$$(6.)\quad t_\mu-\alpha_{\mu,\nu} = A_\nu-\sigma_{\mu,\nu},$$

$$(6'.)\quad \sigma_{\mu,\nu} \gtreqless s_{\mu,\nu}.$$

In dieser Ungleichung (6.), (6'.) ist die ***neue Relation*** enthalten, welche in Verbindung mit den obigen Gleichungen die Grösse u bestimmen lehrt. Es ergiebt sich:

$$(7.)\quad \begin{cases} t'_\mu-\alpha_{\mu,\nu} = A'_\nu-\sigma_{\mu,\nu}, \\ t_\nu-\alpha_{\nu,\mu} = A_\mu-\sigma_{\mu,\nu}, \\ t'_\nu-\alpha_{\nu,\mu} = A'_\mu-\sigma_{\mu,\nu}. \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} u = A_\mu+A_\nu-\sigma_{\mu,\nu}, \\ u' = A'_\mu+A'_\nu-\sigma_{\mu,\nu}, \\ \alpha_{\mu,\nu} = t_\mu-A_\nu+\sigma_{\mu,\nu}, \\ \alpha_{\nu,\mu} = t_\nu-A_\mu+\sigma_{\mu,\nu}. \end{cases}$$

§ 12.

Fortsetzung. Bemerkungen und Specialisirungen.

1. ***Die Zahl*** $\sigma_{\mu,\nu}$. Sucht man entweder die allgemeinste Schaar der Curven R^p_m, von gegebenem m und p, oder die allgemeinsten auf irreduciblen Flächen F_μ liegenden Curven R^p_m, so herrscht im ersten Falle für μ und ν, im zweiten Falle für ν eine Willkürlichkeit. Aber man wird in der Formel (8.), § 11, für u im Allgemeinen dann den genauesten Werth erhalten, d. h. $\sigma_{\mu,\nu}$ wird dann am nächsten an $s_{\mu,\nu}$ liegen, wenn man μ und ν, bezüglich ν, ***möglichst niedrig*** nimmt. Wenn man nämlich μ fest, aber ν beweglich annimmt, so wird bei gegebenen Curven R^p_m die Grösse $u-A_\mu$, also auch nach (8.) die Grösse $A_\nu-\sigma_{\mu,\nu}$ unabhängig von ν werden. Aber für genügend grosse ν wird auch $A_\nu-s_{\mu,\nu}$ von ν unabhängig; denn es ist dann nach § 7:

$$A_\nu = \nu m+1-p,\quad s_{\mu,\nu} = m(\mu+\nu-4)-(2p-2),$$

$$A_\nu-s_{\mu,\nu} = p-(\mu-4)m-1.$$

Also wird für genügend grosse ν auch $s_{\mu,\nu}-\sigma_{\mu,\nu}$ eine von ν unabhängige ***constante*** Zahl. Nimmt man nun ν kleiner, so wird nach § 7 A_ν im Allgemeinen $\geqq \nu m+1-p$, d. h. $s_{\mu,\nu}-\sigma_{\mu,\nu} \leqq$ als die genannte, für grosse ν gültige

constante Differenz. — Nur wenn die Curve R_m^p so speciell sein sollte, dass für ein ν' die Grösse $A_{\nu'} < \nu' m + 1 - p$ werden sollte, wird man $\nu > \nu'$ wählen.

2. *Corresidualität der Curven* R_m^p. Die in § 11 auftretenden Flächen haben eine bemerkenswerthe Eigenschaft, für die das Analogon bei den Curven in der Ebene nicht existirt. Da nämlich eine allgemeinste irreducible Fläche F_μ für $\mu > 3$ überhaupt nur vollständige Schnittcurven enthält, so werden die Curven R_m^p auf den Flächen F_μ, welche keiner anderen Bedingung unterliegen, als eine Curve R_m^p zu enthalten, für $\mu > 3$ *eine einzige lineare Schaar* bilden.

Aus der Geometrie der Flächen zweiter und dritter Ordnung ist ferner bekannt, dass auch die auf diesen Flächen liegenden Curven R_m^p, welche alle niedrigstens von Flächen ν^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden, eine *endliche* Zahl von linearen Schaaren, alle von *gleicher* Mannigfaltigkeit, bilden.

Hiernach ergeben sich für unsere Fälle noch weitere Beziehungen zwischen den Zahlen A und t des § 11. Denn man muss auf F_μ schon alle auf F_μ liegenden Curven R_m^p erhalten, wenn man nur durch *eine* Restcurve $R_{m'}^{p'}$, bez. für $\mu = 2$ und 3 durch eine endliche Zahl solcher, alle Flächen F_ν legt; d. h. man hat

$$(9.)\qquad t_\mu = W_{\nu,\mu} - A'_\nu$$

und ebenso

$$(10.)\qquad t'_\mu = W_{\nu,\mu} - A_\nu.$$

War auch F_ν irreducibel, so folgt:

$$(9'.)\qquad t_\nu = W_{\mu,\nu} - A'_\mu,$$

$$(10'.)\qquad t'_\nu = W_{\mu,\nu} - A_\mu$$

und dann:

$$(11.)\qquad \begin{cases} \alpha_{\mu,\nu} = W_{\nu,\mu} - A_\nu - A'_\nu + \sigma_{\mu,\nu}, \\ \alpha_{\nu,\mu} = W_{\mu,\nu} - A_\mu - A'_\mu + \sigma_{\mu,\nu}. \end{cases}$$

3. *Die allgemeinsten Curven* R_m^p. Für die Gesammtheit der Curven R_m^p, von gegebenen m und p, nehme man in § 11 die Zahlen μ und ν genügend hoch an; so wird (§ 7):

$$A_\mu = \mu m + 1 - p,$$

$$A_\nu = \nu m + 1 - p,$$

$$s_{\mu,\nu} = m(\mu+\nu-4) - (2p-2),$$

also

$$A_\mu + A_\nu - s_{\mu,\nu} = 4m.$$

Nach § 11 wird daher

$$u = A_\mu + A_\nu - \sigma_{\mu,\nu} \geqq 4m.$$

Umgekehrt ergiebt sich, weil nach § 2 der Werth von $u \geqq 4m$ ist, dass

$$\sigma_{\mu,\nu} \gtreqless s_{\mu,\nu}$$

sein muss, d. h. der Beweis des in § 11 benutzten Satzes.

Für die allgemeinsten Curven R_m^p, bei welchen $p \gtreqless \frac{4}{3}(m-3)$ ist, kann man nach § 2 noch weiter gehen. Denn da alsdann $u = 4m$ wird, und da hier A_μ und A_ν nur gleich oder grösser als die angegebenen Werthe werden, so folgt: dass für alle F_μ und F_ν, welche eine allgemeinste R_m^p, $p \gtreqless \frac{4}{3}(m-3)$, enthalten können, genau

$$\begin{aligned} A_\mu &= \mu m + 1 - p, \\ A_\nu &= \nu m + 1 - p, \\ \sigma_{\mu,\nu} &= s_{\mu,\nu} \end{aligned}$$

wird.

4. ***Die Curven vom Maximalgeschlecht.*** Für die irreduciblen Curven R_m^π auf einer Fläche F_μ, deren Restschnitt eine ***ebene*** Curve ist (§§ 4, 6), ergiebt die Betrachtung der Zahl u' für den Restschnitt leicht, dass bei diesen Curven die Zahl $\sigma_{\mu,\nu}$ immer ***kleiner*** wird als $s_{\mu,\nu}$, ausgenommen den Fall, dass die Ordnung der ebenen Restcurve $\gtreqless 3$ ist, wobei $\sigma_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu}$ wird.

III. Abschnitt.

Anwendungen auf die Raumcurven der einzelnen Ordnungen.

§ 13.

Eintheilung der Raumcurven.

Das Gesammtgebiet der Raumcurven R_m^p, von gegebener Ordnung m und gegebenem Geschlecht p, bildet eine ***algebraische, im Allgemeinen reducible, Mannigfaltigkeit.*** Die verschiedenen von einander getrennten irreduciblen Gebiete, in welche dieselbe zerfallen kann, können auch verschiedene Dimensionszahlen, die indess nach § 2 alle $\geqq 4m$ sein müssen, besitzen. Irgend zwei dieser getrennten Gebiete können wieder Untergebiete gemein haben, aber mit geringeren Dimensionszahlen, als die Zahlen in jedem der beiden Gebiete betragen. Die Gesammtheit der in einem jener irreduciblen Gebiete enthaltenen Raumcurven R_m^p bezeichnen wir als eine

Curvenfamilie; wir haben die verschiedenen Curvenfamilien, in welche die R_m^p zerfallen, als von gleichem Grade der Allgemeinheit zu betrachten, indem keine in der anderen enthalten ist.

Hat man nach anderen Kriterien Curvengebiete der R_m^p ausgeschieden, so wird man im Allgemeinen nur specielle Untergebiete aus diesen Familien vor sich haben. Unterscheidet man die Curven R_m^p insbesondere nach den Kriterien der §§ 6—10, also etwa nach den Ordnungszahlen der Flächen niedrigster Ordnung, auf denen die Curven liegen können, so wird man wohl *Curvenspecies* aufstellen können; aber die Frage der Einordnung derselben in die oben bezeichneten Curvenfamilien bleibt zunächst unentschieden.

Indessen bieten doch auch diese Paragraphen, in Verbindung mit den Betrachtungen über die Constantenzahlen, also den §§ 11, 12, in vielen Fällen die Mittel, um die Eintheilung der R_m^p in allgemeine Curvenfamilien und darin enthaltene Species durchführen zu können. Hat man nämlich zwei Species $R_m^{p(1)}$, $R_m^{p(2)}$, von denen die erstere nicht auf Flächen niedrigerer als μ_1 ter Ordnung, F_{μ_1}, die zweite nicht auf Flächen niedrigerer als μ_2 ter Ordnung, F_{μ_2}, liegt, und ist $\mu_1 > \mu_2$, so kann die erste Species, $R_m^{p(1)}$, kein specieller Fall der zweiten, $R_m^{p(2)}$, sein; die zweite Species ist aber entweder von der ersteren getrennt oder ein specieller Fall derselben. Hat nun die zweite Species eine Constantenzahl, die gleich oder grösser ist, als die Constantenzahl der ersten Species, so müssen die $R_m^{p(2)}$ ein von den $R_m^{p(1)}$ getrenntes Gebiet bilden *).

Wird $R_m^{p(1)}$ durch den Schnitt zweier Flächen F_{μ_1}, F_{ν_1}; $R_m^{p(2)}$ durch F_{μ_2}, F_{ν_2} erhalten, so wird $R_m^{p(2)}$ jedenfalls dann als specieller Fall von $R_m^{p(1)}$ zu betrachten sein, wenn $\nu_2 = \nu_1$, $\mu_2 < \mu_1$ oder $\mu_2 = \mu_1$, $\nu_2 < \nu_1$ ist, und wenn die beiden Gebiete nicht getrennte sind. Ueberhaupt wird man von einer Curvenfamilie, statt Curvenspecies, nur dann reden dürfen, wenn erstens die betrachteten Curven R_m^p, die niedrigstens auf einer Fläche F_μ liegen sollen, die *allgemeinsten* Curven R_m^p sind, welche aus einer irreduciblen F_μ ausgeschnitten werden können, und wenn zweitens die Angabe *der Zahl* μ keine speciellen Bedingungen für die R_m^p involvirt. — Dass bei der Definition einer Species durch die Zahlen μ, ν von ausschneidenden Flächen F_μ, F_ν immer auch noch Curven R_m^p erhalten werden, welche dieser Species

*) Ein Beispiel hierzu, R_9^{10}, findet sich bei (*H.*), Bull. II. p. 69.

zwar angehören, aber welche etwa auf reduciblen F_μ oder auf Flächen von niedrigerer als μ^{ter} Ordnung liegen, lässt die allgemeine Definition der Species unberührt, weil diese specielleren Curven nur ein Untergebiet der Species füllen. —

Nach diesen Gesichtspunkten werden die einzelnen im Folgenden erhaltenen Species von Curven R_m bei jeder Zahl m so weit möglich in Familien zusammengeordnet. Man kann dabei oft auch andere Gesichtspunkte benutzen; so ist es z. B. für die Curven R_m^p, von einem Geschlecht $p \leqq m-2$, aus ihrer Erzeugung durch eindeutige Transformation aus ebenen Curven klar, dass ihre Gesammtheit, bei gegebenem m und p, nur *ein* irreducibles Gebiet, also *eine* Familie bildet; denn erst wenn man *Specialschaaren* zur Transformation verwendet, kann dabei eine Trennung eintreten (§ 2).

§ 14.

Die Curven auf den Flächen der Ordnungen 2—5.

Bevor wir die Anwendungen des zweiten Abschnittes auf die Curven R_m^p in der Reihenfolge der Zahlen m geben, sollen in diesem Paragraphen diejenigen allgemeinen Sätze, welche sich auf die auf Flächen F_μ liegenden Raumcurven bei den niedrigsten Werthen von μ beziehen und sich aus dem § 10 etc. unmittelbar ergeben, kurz ausgesprochen werden.

1. $\mu = 2$. Die Curven auf F_2, welche sich mit Erzeugenden *einer* Schaar, und die Curven, welche sich mit Erzeugenden der anderen Schaar zu vollständigen Schnitten ergänzen, stellen alle auf F_2 liegenden Curven vor. Für $m > 4$ wird für die R_m^p:

$$u = 2m + p + 8.$$

Allgemein wird hier:

$$\alpha_{2,\nu} = 0,$$

$$\sigma_{2,\nu} = s_{2,\nu},$$

d. h. damit eine vollständige Schnittcurve (F_2, F_ν) in zwei Curven mit $s_{2,\nu}$ Schnittpunkten zerfalle, sind genau $s_{2,\nu}$ Bedingungen erforderlich.

2. $\mu = 3$. Ausser den vollständigen Schnittcurven liegen auf einer allgemeinen F_3 nur Curven, für die Restcurven $R_{m'}$ mit $\frac{1}{2}(m'-1)(m'-2)$ oder mehr scheinbaren Doppelpunkten existiren.

Einzelne specielle Werthe ausgenommen, liegen auf der F_3 Curven von jeder Ordnung und von jedem das Maximum des § 6 nicht überschreitenden Geschlecht. Geht durch die Curve R_m^p und die niedrigste Restcurve nur *eine* Fläche F_3, so wird

$$u = m + p + 18;$$

und immer wird auch hier

$$\alpha_{3,\nu} = 0,$$

$$\sigma_{3,\nu} = s_{3,\nu}.$$

Es sei noch bemerkt, dass schon bei den Curven R_m^p auf F_3 der Fall eintreten kann, dessen Behandlung in der Einleitung ausdrücklich ausgeschlossen worden ist: dass nämlich die Flächen von *niedrigster* Ordnung, welche R_m^p aus F_3 ausschneiden, die F_3 *längs Curven,* insbesondere Geraden, *berühren* müssen.

3. $\mu = 4$. Ausser den Curven vom Maximalgeschlecht (§ 6) liegen auf F_4 nur Curven, für die Restcurven $R_{m'}^{p'}$ auf F_4 existiren, deren $p' \leqq m' - 3$ ist. Sind die Curve R_m^p und die Restcurve $R_{m'}^{p'}$ irreducibel und geht durch jede der beiden nur *eine* Fläche F_4, so wird

$$u = p + 33.$$

Im Allgemeinen wird

$$\alpha_{4,\nu} = 1,$$

und immer

$$\sigma_{4,\nu} = s_{4,\nu}.$$

Die sehr einfachen Modificationen bei $\mu = 3$ und 4, welche bei niedrigem m oder m' eintreten, werden bei der Untersuchung der einzelnen Raumcurven R_m ihre Darstellung finden.

4. $\mu = 5$. Ausser den von Flächen F_2 auszuschneidenden Curven liegen auf einer F_5 nur solche irreducible Curven, welche Restschnitte $R_{m'}^{p'}$ besitzen, für die entweder $p' \leqq 2m' - 9$; oder $m' \gtreqless 5$; oder $m' = 6$, $p' = 4$; oder $m' = 7$, $p' = 6$; oder $m' = 8$, $p' = 8$ ist.

§ 15.

Die Species der irreducibeln Raumcurven bis zur neunten Ordnung hin.

Wir geben im Folgenden nur eine kurze Uebersicht über die Resultate, welche aus den Entwickelungen des zweiten Abschnittes, insbesondere

den §§ 6, 7, 10, 11, für die Curven der ersten Ordnungen hervorgehen, indem wir in Bezug auf die weiteren Ausführungen auf die Abhandlung selbst verweisen. — Wenn die Curve R_m^p als Schnitt einer irreduciblen Fläche F_μ, μ^{ter} Ordnung, mit einer Fläche ν^{ter} Ordnung erhalten worden ist, bezeichnen wir dieselbe durch $[\mu, \nu]$, insbesondere dann, wenn μ die niedrigste Ordnung für eine irreducible Fläche F_μ ist, die R_m^p enthält. Die Curven $[1, m]$ führen wir nicht besonders auf.

1. $m = 5$.

a_0. $p = 0$, $[3, 3]$, $u = 20$. Die R_5^0 hat eine vierpunktige Sehne.

a_0'. $p = 0$, $[2, 4]$, $u = 18$, mit ∞^1 vierpunktigen Sehnen.

a_1. $p = 1$, $[3, 3]$, $u = 20$.

a_2. $p = 2$, $[2, 3]$, $u = 20$.

a_0' ist als Unterfall der Familie a_0 aufzufassen.

2. $m = 6$.

a_0. $p = 0$, $[3, 4]$, $u = 24$.

a_0'. $p = 0$, $[3, 3]$,

wenn man als Restcurve eine doppeltzählende Gerade und eine diese nicht treffende einfache Gerade nimmt*). $u = 23$, $\alpha_{3,3} = 0$. Mit einer fünfpunktigen Sehne.

a_0''. $p = 0$, $[2, 5]$, $u = 20$, mit ∞^1 fünfpunktigen Sehnen.

a_1. $p = 1$, $[3, 3]$, $u = 24$.

a_2. $p = 2$, $[3, 3]$, $u = 24$.

a_3. $p = 3$, $[3, 3]$, $u = 24$.

a_3'. $p = 3$, $[2, 4]$, $u = 23$.

a_4. $p = 4$, $[2, 3]$, $u = 24$.

a_0'' ist als specieller Fall von a_0', a_0' als solcher von a_0 zu betrachten; ebenso a_3' als solcher von a_3.

3. $m = 7$.

a_0. $p = 0$, $[4, 4]$, $u = 28$, $\alpha_{4,4} = 1$.

a_0'. $p = 0$, $[3, 5]$, (auch schon $[3, 4]$), $u = 25$, $\alpha_{3,5} = 0$, mit einer sechspunktigen Sehne.

a_0''. $p = 0$, $[2, 6]$, $u = 22$, mit ∞^1 sechspunktigen Sehnen.

---

*) Diese Species fehlt sowohl bei (*W.*), als bei (*S.*), obwohl an beiden Orten die Singularität der Restcurve nicht, wie es hier geschehen soll, ausgeschlossen ist.

a_1. $p=1$, $[4, 4]$, $u=28$, $\alpha_{4,4}=1$.

a_1'. $p=1$, $[3, 4]$, $u=26$, $\alpha_{3,4}=0$, mit zwei fünfpunktigen Sehnen.

a_2. $p=2$, $[4, 4]$, $u=28$, $\alpha_{4,4}=1$.

a_2'. $p=2$, $[3, 4]$, $u=27$, $\alpha_{3,4}=0$, mit einer fünfpunktigen Sehne.

a_3. $p=3$, $[3, 4]$, $u=28$, $\alpha_{3,4}=0$.

a_3'. $p=3$, $[3, 4]$, (auch schon $[3, 3]$), $u=27$, $\alpha_{3,4}=0$,

mit einer fünfpunktigen Sehne. a_3' ist specieller Fall von a_3, obwohl die Restcurve bei a_3', eine aus zwei sich nicht schneidenden Curven R_1^0 und R_4^1 bestehende Curve R_5^0, kein specieller Fall der irreduciblen Restcurve R_5^0 von a_3 ist. Dies ist dadurch möglich, dass man, um auf F_3 alle Curven R_7^3 zu erhalten, nicht *alle* Restcurven R_5^0 zu verwenden braucht, sondern bei a_3' nur solche Unterfälle der reduciblen R_5^0, die zugleich Unterfälle der irreduciblen R_5^0 in a_3 sind, nämlich einen ebenen Schnitt von F_3, verbunden mit einer doppeltzählenden Geraden.

a_4. $p=4$, $[3, 3]$, $u=28$.

a_4'. $p=4$, $[2, 5]$, $u=26$, mit ∞^1 fünfpunktigen Sehnen.

a_5. $p=5$, $[3, 3]$, $u=28$.

a_6. $p=6$, $[2, 4]$, $u=28$.

Die Familie a_0 hat die zwei Species a_0', a_0'', die Familien a_1, a_2, a_3, a_4 bez. die Species a_1', a_2', a_3', a_4' als Unterfälle. Betrachtete man die möglichen fünf- oder mehrpunktigen Sehnen als Eintheilungsgrund, so könnte man noch weitere, in den genannten Familien enthaltene Species aufstellen: R_7^0 mit einer fünfpunktigen Sehne, $u=27$; R_7^0 mit zwei solchen, $u=26$; R_7^0 mit einer sechspunktigen Sehne, $u=26$, ausgeschnitten durch $[4, 4]$, eine von der vorhergehenden *getrennte* Species; R_7^1 mit einer fünfpunktigen Sehne, $u=27$.

4. $m=8$.

a_0. $p=0$, $[4, 4]$, $u=32$, $\alpha_{4,4}=1$.

a_0'. $p=0$, $[3, 6]$, (auch schon $[3, 4]$), $u=26$, mit einer siebenpunktigen und einer fünfpunktigen Sehne.

a_0''. $p=0$, $[2, 7]$, $u=24$, mit ∞^1 siebenpunktigen Sehnen.

a_1. $p=1$, $[4, 4]$, $u=32$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_1. $p=1$, $[3, 5]$, (auch $[3, 4]$), $u=27$, mit zwei sechspunktigen Sehnen.

a''_1. $p=1$, $[3, 5]$, $u=27$, mit einer sechspunktigen und fünf fünfpunktigen Sehnen.

Diese Species bildet, obwohl sie alle Hauptzahlen, wie u etc., mit a'_1 gemein hat, eine von a'_1 *getrennte* Species, die nicht als $[3, 4]$ erhalten werden kann.

a_2. $p=2$, $[4, 4]$, $u=32$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_2. $p=2$, $[3, 5]$, (auch $[3, 4]$), $u=28$, mit einer sechspunktigen und zwei fünfpunktigen Sehnen.

a_3. $p=3$, $[4, 4]$, $u=32$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_3. $p=3$, $[3, 4]$, $u=29$, mit vier fünfpunktigen Sehnen.

a_4. $p=4$, $[4, 4]$, $u=32$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_4. $p=4$, $[3, 4]$, $u=30$, mit zwei fünfpunktigen Sehnen.

a_5. $p=5$, $[4, 4]$, $u=32$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_5. $p=5$, $[3, 4]$, $u=31$, mit einer fünfpunktigen Sehne, Restcurve eine $(R_3^0+R_1^0)$.

a''_5. $p=5$, $[3, 4]$, $u=31$, ohne fünfpunktige Sehne, Restcurve eine $(R_2^0+R_2^0)$.

a'''_5. $p=5$, $[2, 6]$, $u=29$, mit ∞^1 sechspunktigen Sehnen.

a_6. $p=6$, $[3, 4]$, $u=32$.

a_7. $p=7$, $[3, 3]$, $u=32$.

a_8. $p=8$, $[2, 5]$, $u=32$, mit ∞^1 fünfpunktigen Sehnen.

a_9. $p=9$, $[2, 4]$, $u=33$.

Die Familie a_0 enthält die Species a'_0, diese a''_0; die Familie a_1 enthält die beiden getrennten Species a'_1, a''_1 als Unterfälle; a_2, a_3, a_4 enthalten je noch eine Species a'_2, a'_3, a'_4; die Familie a_5 enthält die beiden getrennten Species a'_5, a''_5 als Unterfälle, während a'''_5 als Unterfall von a'_5 zu betrachten ist.

Im Anschlusse an die letzte Bemerkung des § 2 kann man nach denjenigen irreduciblen Curven R_8^5 fragen, welche von den Ebenen des Raumes in einer Schaar von *Specialgruppen* geschnitten werden. Man zeigt

leicht mit Hülfe von § 1, VII., dass diese Curven auf Flächen dritter Ordnung liegen und zur Species a_5'' gehören müssen. Da a_5''' diese Eigenschaft nicht hat, muss a_5''' zu a_5' gehören.

5. $m = 9$.

a_0. $p = 0$, $[5, 5]$, $u = 36$, $\alpha_{5,5} = 10$, $\sigma_{5,5} = s_{5,5}$.

a_0'. $p = 0$, $[4, 5]$, $u = 33$, $\alpha_{4,5} = 1$, $\sigma_{4,5} = s_{4,5}$. Restcurve irreducibel.

Speciell $p = 0$, $[4, 5]$, Restcurve $(R_1 + R_{10}^6)$. Mit siebenpunktiger Sehne. $u = 32$, $\alpha_{4,5} = 2$, $\sigma_{4,5} = s_{4,5}$. Die allgemeine R_9^0 mit einer siebenpunktigen Sehne hat $u = 33$ und liegt *nicht* auf einer Fläche F_4.

a_0''. $p = 0$, $[4, 6]$, (auch $[4, 5]$), $u = 32$, $\alpha_{4,6} = 2$, $\sigma_{4,6} = s_{4,6}$, mit achtpunktiger Sehne.

a_0'''. $p = 0$, $[4, 4]$, $u = 28$, $\alpha_{4,4} = 5$, $\sigma_{4,4} = s_{4,4}$, z. B. die Curven mit vier sechspunktigen Sehnen.

a_0^{IV}. $p = 0$, $[3, 7]$, (auch $[3, 6]$), $u = 27$, $\alpha_{3,7} = 0$, $\sigma_{3,7} = s_{3,7}$, mit einer achtpunktigen und fünf fünfpunktigen Sehnen.

a_0^{V}. $p = 0$, $[2, 8]$, $u = 26$, mit ∞^1 achtpunktigen Sehnen.

a_1. $p = 1$, $[5, 5]$, $u = 36$, $\alpha_{5,5} = 9$, $\sigma_{5,5} = s_{5,5}$.

a_1'. $p = 1$, $[4, 5]$, $u = 34$, $\alpha_{4,5} = 1$, $\sigma_{4,5} = s_{4,5}$.

a_1''. $p = 1$, $[4, 4]$, $u = 30$, $\alpha_{4,4} = 4$, $\sigma_{4,4} = s_{4,4}$, wenn die Restcurve eine $(R_4^0 + R_1 + R_1 + R_1)$.

a_1'''. $p = 1$, $[3, 5]$, $u = 28$, mit sechs sechspunktigen Sehnen.

a_2. $p = 2$, $[5, 5]$, $u = 36$, $\alpha_{5,5} = 8$, $\sigma_{5,5} = s_{5,5}$.

a_2'. $p = 2$, $[4, 5]$, $u = 35$, $\alpha_{4,5} = 1$.

a_2''. $p = 2$, $[4, 4]$, wenn die Restcurve z. B. eine $(R_5^0 + R_1 + R_1)$, wird $u = 32$, $\alpha_{4,4} = 3$, $\sigma_{4,4} = s_{4,4}$.

a_2'''. $p = 2$, $[3, 6]$, $u = 29$, mit einer sieben-, einer sechs- und vier fünfpunktigen Sehnen.

a_3. $p = 3$, $[4, 5]$, $u = 36$, $\alpha_{4,5} = 1$.

a_3'. $p = 3$, $[4, 4]$; wenn die Restcurve z. B. eine $(R_6^0 + R_1)$, wird $u = 34$, $\alpha_{4,4} = 2$, $\sigma_{4,4} = s_{4,4}$.

a_3''. $p = 3$, $[3, 5]$, $u = 30$, mit drei sechs- und drei fünfpunktigen Sehnen.

a_4. $p=4$, $[4, 4]$, $u=36$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_4. $p=4$, $[3, 5]$, $u=31$, mit zwei sechs- und drei fünfpunktigen Sehnen.

a_5. $p=5$, $[4, 4]$, $u=36$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_5. $p=5$, $[3, 5]$, $u=32$, mit einer sechs- und vier fünfpunktigen Sehnen.

a_6. $p=6$, $[4, 4]$, $u=36$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_6. $p=6$, $[3, 5]$, $u=33$, mit sechs fünfpunktigen Sehnen.

a''_6. $p=6$, $[2, 7]$, $u=32$, mit ∞^1 siebenpunktigen Sehnen.

a_7. $p=7$, $[4, 4]$, $u=36$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_7. $p=7$, $[3, 4]$, $u=34$, mit drei fünfpunktigen Sehnen.

a_8. $p=8$, $[4, 4]$, $u=36$, $\alpha_{4,4}=1$.

a'_8. $p=8$, $[3, 4]$, $u=35$, mit einer fünfpunktigen Sehne.

a_9. $p=9$, $[3, 4]$, $u=36$.

a_{10}. $p=10$, $[3, 3]$, $u=36$.

a'_{10}. $p=10$, $[2, 6]$, $u=36$, mit ∞^1 sechspunktigen Sehnen.

a_{11}. $p=12$, $[2, 5]$, $u=38$, mit ∞^1 fünfpunktigen Sehnen.

So existiren also von jedem Geschlechte 0, 1, ..., 9 und 12 je *eine* Familie, vom Geschlechte 10 aber zwei getrennte Familien. Die Aufzählung aller getrennten Species, in welche die hier genannten Unterfälle zerfallen, unterblieb.

§ 16.

Die allgemeinen Arten der Raumcurven siebzehnter Ordnung.

Wir betrachten hier als weiteres Beispiel noch die *allgemeinen* Arten von Raumcurven siebzehnter Ordnung. Nach § 7, (3.), (4.) folgt, dass diese allgemeinen Arten sind:

für $p=0:[8, 8]$,
- $p=1:[7, 8]$,
- $p=2, 3, \ldots, 19:[7, 7]$,
- $p=20:[6, 7]$,
- $p=21, 22, \ldots, 30:[6, 6]$,
- $p=31:[5, 6]$,
- $p=32, 33, 34, 35:[5, 5]$.

Nach § 7, (3″.) folgt, dass die Curven für $p > 35$ auf einer F_4 liegen. Dasselbe folgt aus § 6:

$$\text{für} \quad p = 36 : [4, 5].$$

Da auf F_4 das Maximum von p zu 36, auf F_3 zu 40 wird, folgt weiter:

$$\text{für } p > 36 \text{ auf } F_3, \quad \text{für } p > 40 \text{ auf } F_2.$$

Nach § 2 wird für $p = 0, 1, \ldots, 18 : u = 68$, und nach §§ 11, 12 alsdann $\sigma_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu}$; ferner die Zahl der Bedingungen für die Fläche F_8 bei $p = 0 : \alpha_8 = 69$; für die Fläche F_7 bei $p = 1, 2, \ldots, 18 : \alpha_7 = 52 - p$.

Von $p = 31$ bis $p = 35$ folgt aus der Betrachtung der Restcurve, dass ebenfalls $\sigma_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu}$ und $u = 68$ wird, und für die Zahl α_5 der Bedingungen für die Fläche F_5: $\alpha_6 = 4$.

Nimmt man nun für die zwischenliegenden Geschlechtszahlen $p = 19, 20, \ldots, 30$ ebenfalls $\sigma_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu}$ an, so ergiebt sich auch dann $u = 68$; ferner für $p = 19 : \alpha_7 = 33$, für $p = 20, 21, \ldots, 25 : \alpha_6 = 35 - p$, für $p = 26, 27, \ldots, 30 : \alpha_6 = 10$.

Für $p = 36$ wird $u = 69$, $\alpha_4 = 1$, $\sigma_{4,5} = s_{4,5}$. Für $p > 36$ vergleiche § 14.

So giebt es z. B. für $p = 35$ vier verschiedene Familien von Curven R_{17}; die beiden ersten Familien entstehen aus dem Schnitt [5, 5], die eine mit irreducibler Restcurve R_8^8 und $u = 68$, die andere mit einer Restcurve $(R_5^6 + R_3^0)$ und $u = 68$, die letztere also auch als Curve [4, 5], mit $\alpha_4 = 1$; die beiden anderen Familien liegen auf Flächen F_3 und bestehen aus Curven [3, 8], die eine mit irreducibler Restcurve R_7^0, die andere mit einer Restcurve $(R_6^1 + R_1)$, und beide mit der Mannigfaltigkeit $u = 70$.

§ 17.

Anwendungen der zweiten Methode des § 9.

Es sollen noch einige ganz beliebig herausgegriffene Fälle von höheren Raumcurven behandelt werden, um die Anwendbarkeit der ***Methode des ebenen Schnittes*** des § 9 zu zeigen.

1. $m = 28$. Durch eine irreducible Curve R_{28}^p gehen nach § 7 für $99 > p \geqq 78$ noch ∞^{p-78} (für $p \geqq 99$ noch wenigstens ∞^{20}) Flächen F_7. Ein ebener Schnitt f_7 einer solchen F_7 würde von denselben in ∞^{p-79} Gruppen von je 21 Punkten getroffen, da aber von diesen Gruppen höchstens ∞^9 existiren, müssen für $99 > p \geqq 89$ wenigstens ∞^{p-89} (für $p \geqq 99$ wenigstens ∞^9) Flächen F_6 durch R_{28}^p gehen. So liegt also R_{28}^{89} auf [6, 7], R_{28}^{90} auf

[6, 6]. Die Restcurve aus [6, 6] wird für $p=90$ zu einer R_8^{10}; und von solchen Curven können auf irreducibler F_6 keine anderen existiren, als eine ebene R_6, verbunden mit zwei Geraden. Daher kann die auf irreducibler F_6 liegende R_{28}^{90} auch als Curve [5, 6] erhalten werden. Ebenso, oder auch aus § 6, folgt, dass R_{28}^{91} als [5, 6] entsteht, während die Curven R_{28}^p für $p > 91$ nach § 6 auf Flächen vierter oder niedrigerer Ordnung liegen müssen.

2. $m=50$. Eine irreducible R_{50}^p muss nach § 7 für $251 > p \geqq 216$ auf ∞^{p-216} Flächen F_{10}, für $p \geqq 251$ auf wenigstens ∞^{34} F_{10} liegen. Im ersten Falle erhält man auf einer ebenen Schnittcurve f_{10} einer solchen F_{10} durch den Schnitt mit den übrigen der F_{10} noch eine lineare $\infty^{p-217-(\lambda+1)}$-Schaar von Gruppen von je 50 Punkten, wenn ∞^λ Flächen F_9 durch R_{50}^p gehen. Von solchen Gruppen existiren aber nach § 5 nur höchstens ∞^{20}; ja dieser äusserste Fall führt schon nothwendig auf den Schnitt der f_{10} mit Curven fünfter Ordnung und also auf die Curve $R_{50}^p=[10, 5]$, die $p=276$ besitzt. Sicher ist also $p-217-(\lambda+1)$ höchstens gleich 19, d. h. λ wenigstens $=p-237$: *für* $p \geqq 237$ *gehen wenigstens* ∞^{p-237} *Flächen neunter Ordnung,* F_9, *durch* R_{50}^p.

Hieraus folgt weiter, dass die auf irreducibler Fläche F_9 gelegenen R_{50}^p für $p=237$ als Schnitte [9, 10], für $p > 237$ als [9, 9] erhalten werden. Betrachtet man jetzt analog eine ebene Schnittcurve f_9 einer solchen F_9, so erhielte man durch die $\infty^{p-216-4}$ Flächen F_{10}, welche nicht in diese F_9 zerfallen und doch durch R_{50}^p gehen, auf f_9 noch eine lineare ∞^{p-220}-Schaar von Gruppen von je 40 Punkten; da diese Gruppen aber höchstens eine ∞^{15}-Schaar bilden können, so gehen ausser der ersten F_9 noch wenigstens ∞^{p-236} Flächen F_9 durch R_{50}^p: *für* $p \geqq 236$ *gehen wenigstens* ∞^{p-235} *Flächen neunter Ordnung,* F_9, *durch* R_{50}^p, *wenn diese Curve überhaupt auf einer irreducibLen Fläche neunter Ordnung liegt.*

Betrachtet man weiter den Schnitt von f_9 mit allen diesen Flächen F_9, so erhielte man auf f_9 eine ∞^{p-236}-Schaar von Gruppen von je 31 Punkten; da aber von diesen Gruppen höchstens ∞^9 existiren, so folgt: *für* $p \geqq 246$ *gehen wenigstens* ∞^{p-246} *Flächen* F_8 *durch* R_{50}^p.

Ist eine von diesen Flächen F_8 irreducibel, so wird R_{50}^p für $p > 246$ als Curve [8, 8] erhalten. Diese Curven kann man nun analog durch Betrachtung eines ebenen Schnittes f_8 weiter untersuchen.

Im zweiten der zuerst genannten Fälle, $p \geqq 251$, folgt genau ebenso, dass diese Curven als Schnitte [8, 8] oder als niedrigere Schnitte zu erhalten sind.

§ 18.

Anwendung auf die Geometrie specieller Flächen.

Wir haben die Theorie der Raumcurven im zweiten Abschnitt aus den möglichst allgemeinen Flächen abgeleitet, d. h. aus den Flächen, welche überhaupt keine weiteren Eigenschaften besitzen sollten, als Raumcurven der betrachteten Art zu enthalten; also auch diese Flächen ohne vielfache Curven etc. vorausgesetzt. Diese allgemeine Theorie findet nun umgekehrt ihre wichtigste Anwendung in der Entwickelung der *Geometrie specieller Flächen*. Hierzu ist nur eine Erweiterung der Betrachtung nöthig, durch welche in § 11 die Zahl $\alpha_{\mu,\nu}$ eingeführt worden ist.

Nach § 11 stimmt die Zahl der Bedingungen, welche man einer Curve einer Art auflegen kann, damit sie auf einer gegebenen Fläche liege, im Allgemeinen *nicht* überein mit der Zahl der Bedingungen, welche der Fläche aufzulegen sind, um durch eine gegebene Curve der betrachteten Art hindurchzugehen. So schon bei einer F_4 und einer Curve R_3^1 oder Curve R_4^1. Die Relation, welche diese Verhältnisse bestimmt, ist (2.) des § 11. Durch die für die F_μ hinzutretenden $\alpha_{\mu,\nu}$ Bedingungen waren die in §§ 11, 12 behandelten speciellen Flächen charakterisirt, und durch die Curve R_m^p ist dann ihre Geometrie als gegeben zu betrachten.

Dieselbe Relation (2.) des § 11, oder

$$u = A + t - \alpha,$$

ist nun ihrer Ableitung nach auch noch in folgendem allgemeineren Falle anwendbar: man betrachte irgend eine beliebig gewählte Curvenspecies R und eine beliebige specielle Flächenart Φ; u sei die Mannigfaltigkeit der Species R; A bedeute die Zahl der Bedingungen, welchen eine Fläche aus der Art Φ unterworfen werden muss, um durch eine gegebene Curve aus der Species R zu gehen; α die Zahl der Bedingungen, welchen eine Fläche aus der Art Φ, ausser der Bedingung zu den Φ zu gehören, noch weiter genügen muss, wenn sie überhaupt irgend eine, nicht gegebene, Curve aus der Species R enthalten soll; endlich t die Mannigfaltigkeit der Curven der Species R, die dann noch auf *einer* solchen speciellen Fläche Φ' aus der Art Φ liegen. — Eine solche Fläche Φ' ist durch die Bedingung, zur Art Φ zu gehören und eine Curve R zu besitzen, charakterisirt und ihre Geometrie alsdann als bekannt zu betrachten.

Kennt man nun die Zahlen u und A für die Arten R und Φ, so ist die Geometrie der speciellen Fläche Φ' zu untersuchen, um t zu bestimmen, wonach die obige Relation α ergiebt. Hiermit erhält man dann die Entscheidung über die Frage, welche in diesen Flächenproblemen die schwierigste und zugleich die Hauptfrage ist: ***ob etwa jede Fläche der Art Φ Curven der Species R besitzt oder nicht.***

Als Beispiel erwähnen wir hier nur für Φ die Fläehen sechster Ordnung, welche eine Raumcurve R_4^1 als Doppelcurve und eine die R_4^1 nicht treffende Gerade als Doppelgerade besitzen. Eine solche Fläche F_6 besitzt eine nicht lineare Schaar von Kegelschnitten, ausgeschnitten von einem Ebenenbüschel, dessen Ebenen in je zwei Kegelschnitten der Schaar schneiden; und man kann mit Hülfe unserer Relation beweisen, dass auf F_6 Curven R_5^1 existiren, welche alle Kegelschnitte der Schaar in nur je ***einem*** Punkte treffen; d. h. dass F_6 auf einen Kegel dritter Ordnung Punkt für Punkt eindeutig abgebildet werden kann *).

Es mag hier genügen, auf dieses weite Feld der Anwendungen auf specielle Flächenarten hingewiesen zu haben.

*) [Eine eingehende Untersuchung dieser Fläche F_6 theile ich in Math. Ann. XXI. mit.]

Berneck, den 6. September 1882.

Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme.

(Von Herrn *C. Runge.*)

In einer Abhandlung über „die Subdeterminanten symmetrischer Systeme" (Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 27. Juli 1882) macht Herr *Kronecker* auf gewisse lineare Relationen aufmerksam, die zwischen ihnen bestehen. Auf Veranlassung meines verehrten Lehrers habe ich mich mit denselben eingehender beschäftigt und dabei ermittelt, dass die von Herrn *Kronecker* angegebenen Relationen insofern die *einzigen* sind, als alle anderen durch lineare Verbindungen der *Kronecker*schen Relationen entstehen. Ich habe ferner eine Methode gefunden, ein System linear-unabhängiger Subdeterminanten zu bestimmen, durch die sich die sämmtlichen Subdeterminanten derselben Ordnung linear ausdrücken lassen.

I.

Unter den Subdeterminanten m^{ter} Ordnung eines symmetrischen Systems

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

besteht nach Herrn *Kronecker* *) die lineare Relation

$$(A.) \qquad |a_{gh}| = \sum_r |a_{ik}| \qquad (r = m+1, m+2, \dots 2m)$$

$$(g = 1, 2, \dots m;\ h = m+1, \dots 2m);\quad (i = 1, 2, \dots m-1, r;\ k = m+1, \dots r-1, m, r+1, \dots 2m)$$

und also eine ganze Reihe von solchen Relationen, welche entstehen, indem man an Stelle der Zahlen 1, 2, ... $2m$ irgend welche $2m$ von den Zahlen 1, 2, ... n nimmt. Dabei sind unter den $2m$ Zahlen auch paarweis gleiche zuzulassen, sobald nur je eine des Paares an Stelle einer der Zahlen 1, 2, ... $m-1$ tritt. Die Gleichung $(A.)$ behält dann ihre Gültigkeit, da

---

*) Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1882. S. 824.

man ja, anstatt zwei Indices einander gleich zu setzen, die bezüglichen *Grössen* a einander gleich setzen kann. Es soll gezeigt werden, dass jede zwischen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung bestehende lineare Gleichung, deren Coefficienten von den Grössen a_{ik} unabhängig sind, aus den *Kronecker*schen Relationen dadurch abgeleitet werden kann, dass man eine Reihe derselben mit Constanten multiplicirt und addirt.

Da die Relation für beliebige Werthe der nur durch die Bedingungen $a_{ik} = a_{ki}$ eingeschränkten Grössen a_{ik} gelten soll, so kann dieselbe nur dadurch bestehen, dass die einzelnen Glieder in der Entwickelung der Subdeterminanten nach Producten von Potenzen der Grössen a_{ik} sich wegheben. Nun ist ersichtlich, dass zwei Subdeterminanten m^{ter} Ordnung nur dann ein Glied mit einander gemein haben können, wenn die sämmtlichen $2m$ Indices, welche die Horizontal- und Verticalreihen bezeichnen, abgesehen von ihrer Reihenfolge und abgesehen davon, ob sie den Horizontal- oder Verticalreihen angehören, für beide Subdeterminanten übereinstimmen. Eine Relation zwischen Subdeterminanten, welche nicht sämmtlich dieselben $2m$ Indices enthalten, zerfällt also in mehrere Relationen zwischen Subdeterminanten, welche sämmtlich durch dieselben $2m$ Indices charakterisirt sind, und es genügt daher, lineare Relationen *dieser* Art zu betrachten.

Es ist nun zunächst nachzuweisen, dass jede solche lineare Relation zwischen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung, für den Fall, dass diese sämmtlich in den Indices der s ersten Horizontalreihen übereinstimmen, und dass die $2m$ Indices verschieden sind, sich speciell aus *solchen Kronecker*schen Relationen zusammensetzen lässt, in denen nur Determinanten m^{ter} Ordnung mit eben denselben s ersten Horizontalreihen-Indices vorkommen.

Bezeichnet man die $2m$ Indices der Subdeterminanten m^{ter} Ordnung, zwischen denen eine Relation besteht, durch die Zahlen $1, 2, 3, \dots 2m$, so ist jede dieser Subdeterminanten durch

$$|a_{ik}| \qquad (i = i_1, i_2, \dots i_m;\ k = i_{m+1}, i_{m+2}, \dots i_{2m})$$

dargestellt, wenn $i_1, i_2, \dots i_{2m}$ irgend eine Permutation der Zahlen $1, 2, \dots 2m$ bedeutet, und jede solche Subdeterminante bleibt ungeändert, wenn die Indices $i_1, i_2, \dots i_m$ mit den Indices $i_{m+1}, i_{m+2}, \dots i_{2m}$ vertauscht werden. Man kann daher annehmen, dass bei jeder solchen Subdeterminante der Index 1 sich unter den *ersten* m Indices $i_1, i_2, \dots i_m$ befindet, und diese m Indices selbst können, da man ja die Subdeterminanten mit dem geeigneten Vorzeichen versehen kann, der Grösse nach geordnet angenommen werden.

Eine lineare Relation zwischen den Subdeterminanten m^{ter} Ordnung hat hiernach die Gestalt:

$$(B.)\qquad \sum_{(t)} c_{t_{s+1}\dots t_{2m}} |a_{ik}| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,\,2,\,\dots\,s,\; t_{s+1},\,\dots\,t_m \\ k=t_{m+1},\;\dots\dots\;t_{2m} \end{pmatrix},$$

wo s einen der Werthe $1, 2, \dots m-1$ haben kann, ferner $t_{s+1}, \dots t_{2m}$ eine Permutation der Zahlen $s+1, s+2, \dots 2m$ mit den Bedingungen

$$t_{s+1} < t_{s+2} < \dots < t_m, \quad t_{m+1} < t_{m+2} < \dots < t_{2m}$$

bedeutet und die Summe über eine Reihe solcher Permutationen erstreckt wird. In dieser Relation $(B.)$ ist der Coefficient von $a_{1,s+1}$ eine Summe von Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Verschwinden entweder eine Relation constituirt oder nicht. Ist das Erstere der Fall, so kann — wenn die Richtigkeit des Satzes für Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorausgesetzt wird — der Coefficient von $a_{1,s+1}$ in $(B.)$ aus lauter Ausdrücken

$$(C.)\qquad |a_{gh}| - \sum_r |a_{ik}| \qquad (r=m+2,\,m+3,\,\dots\,2m)$$

$$(g=2,\,3,\,\dots\,s,\; t_{s+2},\,\dots\,t_{m+1};\; h=t_{m+2},\,\dots\,t_{2m});\quad (i=2,\,3,\,\dots\,s,\; t_{s+2},\,\dots\,t_m,\,t_r;\; k=t_{m+2},\,\dots\,t_{r-1},\,t_{m+1},\,t_{r+1},\,\dots\,t_{2m})$$

additiv zusammengesetzt werden, in denen $t_{s+2}, \dots t_{2m}$ eine Permutation der Zahlen $s+2, \dots 2m$ bedeutet, und welche gemäss den *Kronecker*schen Relationen $(A.)$ gleich Null sind. Jedem solchen Ausdrucke $(C.)$ entspricht aber eine *Kronecker*sche Relation zwischen Determinanten m^{ter} Ordnung:

$$(D.)\qquad -|a_{gh}| + \sum_r |a_{ik}| = 0 \qquad (r=m+1,\,m+2,\,\dots\,2m)$$

$$(g=1,\,2,\,\dots\,s,\; t_{s+2},\,\dots\,t_m,\,s+1;\; h=t_{m+1},\,t_{m+2},\,\dots\,t_{2m});$$
$$(i=1,\,2,\,\dots\,s,\; t_{s+2},\,\dots\,t_m,\,t_r;\; k=t_{m+1},\,\dots\,t_{r-1},\,s+1,\,t_{r+1},\,\dots\,t_{2m}).$$

in welcher der Coefficient von $a_{1,s+1}$ jener Ausdruck $(C.)$ ist, und man kann demnach ein Aggregat von Gleichungen $(D.)$ bilden, in welchem der Coefficient von $a_{1,s+1}$ bis auf die Determinanten, welche sich ohne Relation wegheben, mit dem Coefficienten von $a_{1,s+1}$ in der Relation $(B.)$ übereinstimmt. In der Differenz kann daher das Verschwinden des Coefficienten von $a_{1,s+1}$ keine Relation constituiren. Wird nun $s+1$ überall, wo es Index einer Verticalreihe ist, zum Index der *ersten* Verticalreihe gemacht, so kann von den Subdeterminanten, welche die Coefficienten von $a_{1,s+1}$ sind, die Subdeterminante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=2,\,\dots\,s,\; t_{s+2},\,\dots\,t_{m+1} \\ k=t_{m+2},\;\dots\dots\;t_{2m} \end{pmatrix}$$

nur aus der Subdeterminante m^{ter} Ordnung:

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1,\,2,\,\dots\,s,\; t_{s+2},\,\dots\,t_{m+1} \\ k=s+1,\; t_{m+2},\;\dots\dots\;t_{2m} \end{pmatrix}$$

hervorgehen, sobald $s > 1$ ist, im Falle $s = 1$ aber auch aus der Subdeterminante m^{ter} Ordnung:

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1, t_{m+2}, \dots t_{2m} \\ k=2, t_3, \dots\dots t_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Wenn $s > 1$ ist, muss daher der Coefficient derjenigen Determinanten, in denen $s+1$ Index einer Verticalreihe und also *nicht* Index einer Horizontalreihe ist, gleich Null sein, und es können demnach nur solche Determinanten m^{ter} Ordnung vorkommen, bei welchen die $s+1$ Indices $1, 2, \dots s+1$ sämmtlich Indices von *Horizontalreihen* sind. Für $s = 1$ findet entweder dasselbe statt, oder es lassen sich diejenigen Determinanten, in denen $s+1$ Index einer Verticalreihe ist, folgendermassen paarweise gruppiren

$$c(|a_{gh}| - |a_{g'h'}|)$$
$$(g=1, t_3, \dots t_{m+1};\ h=2, t_{m+2}, \dots t_{2m});\quad (g'=1, t_{m+2}, \dots t_{2m};\ h=2, t_3, \dots t_{m+1}).$$

Dies ist aber gleich

$$\pm c(|a_{gh}| - |a_{g'h'}|)$$
$$(g=t_{m+2}, \dots t_{2m}, 1;\ h=2, t_3, \dots t_{m+1});\quad (g'=t_{m+2}, \dots t_{2m}, 2;\ h'=1, t_3, \dots t_{m+1}),$$

und diese Verbindung verwandelt sich durch Addition von

$$\mp c(|a_{gh}| - \sum_r |a_{ik}|), \qquad (r=2, \dots m+1)$$
$$(g=t_{m+2}, \dots t_{2m}, 1;\ h=2, t_3, \dots t_{m+1});\quad (i=t_{m+2}, \dots t_{2m}, t_r;\ k=t_2, \dots t_{r-1}, 1, t_{r+1}, \dots t_{m+1})\ (t_2=2)$$

in eine Summe von Determinanten, in denen die Zahlen 1 und 2 überall zu Indices der ersten beiden Horizontalreihen gemacht werden können.

Man gelangt also von einer Relation mit s festen Indices durch Hinzufügung von *Kronecker*schen Relationen — und zwar von solchen, in denen sämmtliche Determinanten eben dieselben s ersten Horizontalreihen-Indices haben — zu einer Relation mit $s+1$ festen Indices. Dass die Deduction auf Relationen beschränkt worden ist, bei denen sämmtliche $2m$ Indices verschieden sind, hatte lediglich den Zweck, die Bezeichnung zu vereinfachen. An sich behält die Deduction durchweg ihre Gültigkeit. Da man nun schliesslich bei Anwendung des angegebenen Verfahrens bis zu dem Werthe $s = m$ gelangt, für welchen keine Relation $(B.)$ existiren kann, weil sich alsdann die darin vorkommenden Determinanten auf eine einzige reduciren, so ist der behauptete Satz unter der Voraussetzung, dass er für Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gilt, bewiesen. Nun verificirt man ihn leicht für $m = 2$; mithin gilt er allgemein.

II.

Aus der obigen Deduction geht unmittelbar der folgende Satz hervor: Wenn in einem Aggregat von Subdeterminanten, welche in den Indices $1, 2, \dots s$ der ersten s Horizontalreihen übereinstimmen, der Coefficient von $a_{1,s+1}$ verschwindet, so lässt es sich in ein Aggregat von Subdeterminanten verwandeln, welche in den Indices $1, 2, \dots s+1$ der ersten $s+1$ Horizontalreihen übereinstimmen. Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich ein vollständiges System von einander linear-unabhängiger Subdeterminanten m^{ter} Ordnung aufstellen, durch welche man alle linear und ganzzahlig ausdrücken kann. Wir weisen ein solches System für Determinanten derselben Indices nach und können dabei die $2m$ Indices von einander verschieden annehmen, weil die Relationen zwischen Determinanten, bei denen Paare von gleichen Indices vorkommen, mit Relationen zwischen Determinanten *niedrigerer* Ordnung übereinstimmen, bei denen alle Indices von einander verschieden sind. So finden z. B. unter den Determinanten

$$|a_{gh}| \qquad \begin{pmatrix} g = t_1, & t_2, & \dots\dots & t_{m-1}, & 2m-1 \\ h = t_m, & t_{m+1}, & \dots & t_{2m-2}, & 2m-1 \end{pmatrix}$$

dieselben Relationen statt wie unter den Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$|a_{gh}| \qquad \begin{pmatrix} g = t_1, & t_2, & \dots\dots & t_{m-1} \\ h = t_m, & t_{m+1}, & \dots & t_{2m-2} \end{pmatrix}.$$

Es seien unter den Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Indices $3, 4, \dots 2m$ die Determinanten

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = t_3, & \dots\dots & t_{m+1} \\ k = t_{m+2}, & \dots & t_{2m} \end{pmatrix},$$

wo $t_3, \dots t_{2m}$ gewisse Permutationen der Zahlen $3, 4, \dots 2m$ bedeuten, von einander linear-unabhängig, und jede andere Determinante mit denselben Indices $3, 4, \dots 2m$ möge als ganzzahlige lineare Function derselben ausdrückbar sein. Alsdann müssen die Determinanten m^{ter} Ordnung

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, & t_3, & \dots\dots & t_{m+1} \\ k = 2, & t_{m+2}, & \dots & t_{2m} \end{pmatrix}$$

ebenfalls von einander linear-unabhängig sein. Denn in einer linearen Relation zwischen ihnen müsste auch der Coefficient von a_{12} Null sein, und es wäre dies also eine Relation für die als unabhängig vorausgesetzten Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Bezeichnet man nun irgend eine andere Subdeterminante m^{ter} Ordnung, deren Horizontal- und Verticalreihen die Indices $1, 2, \dots 2m$ haben, mit S, so kommt darin die Grösse a_{12} entweder gar nicht vor, oder deren Coefficient ist eine Subdeterminante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche der Annahme nach als lineare ganzzahlige Function der

von einander linear-unabhängigen Subdeterminanten:

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = t_3, \ldots\ldots t_{m+1} \\ k = t_{m+2}, \ldots t_{2m} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann. Setzt man in dieser linearen Function an die Stelle der Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung die entsprechenden Determinanten m^{ter} Ordnung:

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, t_3, \ldots\ldots t_{m+1} \\ k = 2, t_{m+2}, \ldots t_{2m} \end{pmatrix},$$

so resultirt eine lineare ganzzahlige Function von Subdeterminanten m^{ter} Ordnung, welche mit F bezeichnet werden möge, und in welcher der Coefficient von a_{12} gleich dem Coefficienten derselben Grösse a_{12} in jener Subdeterminante S ist. In der Differenz $S-F$ muss also der Coefficient von a_{12} verschwinden, und sie kann demnach in eine Summe von Determinanten verwandelt werden, die a_{12} nicht mehr enthalten. Man kann daher jede Subdeterminante m^{ter} Ordnung mit denselben Indices als lineare ganzzahlige Function der Determinanten

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, t_3, \ldots\ldots t_{m+1} \\ k = 2, t_{m+2}, \ldots t_{2m} \end{pmatrix}$$

und solcher Determinanten ausdrücken, welche die Grösse a_{12} nicht mehr enthalten. Die ersteren sind, wie schon oben bemerkt, linear-unabhängig, und ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der linear-unabhängigen unter den Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die übrigen hingegen können noch durch Relationen verbunden sein. Da sie a_{12} nicht mehr enthalten, so können sie alle auf die Form gebracht werden:

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, t_3, \ldots t_m \\ k = t_{m+1}, \ldots t_{2m} \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man hierin den Coefficienten von a_{13}, so ist derselbe entweder Null oder gleich einer Determinante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Indices 2, 4, 5, ... $2m$, und die Zahl 2 ist hierbei Index der ersten Horizontalreihe. Bezeichnet man die schon als bekannt anzunehmenden, linear-unabhängigen unter ihnen mit

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 2, t_4, t_5, \ldots t_{m+1} \\ k = t_{m+2}, \ldots t_{2m} \end{pmatrix},$$

so erschliesst man genau wie oben, dass die entsprechenden Determinanten m^{ter} Ordnung

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, t_4, \ldots t_{m+1} \\ k = 3, t_{m+2}, \ldots t_{2m} \end{pmatrix}$$

von einander linear-unabhängig sind, und es ergiebt sich auch ebenso, wie oben, dass jede Determinante m^{ter} Ordnung, welche a_{12} nicht enthält, durch die Determinanten

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ t_4,\ \dots\ t_{m+1} \\ k=3,\ t_{m+2},\ \dots\ t_{2m} \end{pmatrix}$$

und durch diejenigen, welche sowohl a_{12} als a_{13} nicht enthalten, linear und ganzzahlig auszudrücken sind. Hiermit ist also die Frage auf die linear-unabhängigen unter diesen letzteren zurückgeführt, die sämmtlich in der Form

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3,\ t_4,\ \dots\ t_m \\ k=t_{m+1},\ \dots\dots\ t_{2m} \end{pmatrix}$$

angenommen werden können.

Unter der Voraussetzung, dass unter den Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit den Indices 2, 3, 5, 6, ... $2m$, welche die Grösse a_{23} nicht enthalten, die linear-unabhängigen schon bekannt sind, und dass sich durch diese die übrigen linear und ganzzahlig ausdrücken, reducirt sich wieder die Frage auf die Determinanten

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ t_5,\ \dots\ t_m \\ k=t_{m+1},\ \dots\dots\ t_{2m} \end{pmatrix}.$$

In dieser Weise ist fortzufahren, bis schliesslich die Indices der Horizontalreihen die Zahlen 1, 2, 3, ... m sind, und also nur die eine Determinante

$$|a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \dots\ m \\ k=m+1,\ \dots\ 2m \end{pmatrix}$$

bleibt. Wenn mithin für die Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung die gemachten Voraussetzungen richtig und die linear-unabhängigen gegeben sind, so folgt die Richtigkeit derselben Voraussetzungen für die Determinanten m^{ter} Ordnung, und es ergeben sich die linear-unabhängigen unter ihnen. Ferner ist die Aufgabe, eine Determinante m^{ter} Ordnung durch die linear-unabhängigen auszudrücken, auf dieselbe Aufgabe für Determinanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt.

Für Determinanten zweiter Ordnung treffen die Voraussetzungen zu, und man kann ohne Weiteres jede Determinante durch die linear-unabhängigen ausdrücken. Denn hier giebt es nur drei Determinanten mit denselben Indices, von denen man zwei beliebige als unabhängige nehmen kann, da nur eine Relation besteht:

$$(a_{13}a_{24}-a_{14}a_{23}) = (a_{12}a_{34}-a_{14}a_{32})+(a_{13}a_{42}-a_{12}a_{43}).$$

Bedeutet $A_m^{(h)}$ die Anzahl der von einander linear-unabhängigen Determinanten m^{ter} Ordnung mit denselben Indices, in denen h bestimmte Indices entweder nur den Horizontal- oder nur den Verticalreihen angehören, so ist offenbar:

$$A_m^{(0)} = A_m^{(1)}, \quad A_m^{(m)} = 1,$$

und nach dem Obigen ist ausserdem:

$$A_m^{(h)} = A_{m-1}^{(h-1)}+A_m^{(h+1)} \qquad (0<h<m).$$

Demgemäss wird

$$A_m^{(h)} = (h+1)\cdot\frac{(2m-h)!}{(m+1)!(m-h)!} \qquad (h=0,1,2,\dots m-1),$$

wenn $k!$ wie gewöhnlich das Product $1.2.3\dots k$ bedeutet. Für $h=0$ kommt

$$A_m^{(0)} = \frac{2m!}{(m+1)!m!} = \frac{2}{m+1}\cdot\mathfrak{A}_m,$$

wenn $\mathfrak{A}_m$ die Anzahl *aller* verschiedenen Determinanten mit denselben $2m$ von einander verschiedenen Indices bedeutet, und es zeigt sich also, ***dass die Anzahl der linear-unabhängigen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung nur den $\frac{1}{2}(m+1)^{ten}$ Theil aller beträgt.***

III.

Ich bemerke noch, dass unter den Subdeterminanten eines Systems

$$a_{ki} = -a_{ik}$$

keine lineare Relation besteht. Nimmt man nämlich eine Relation von Determinanten m^{ter} Ordnung mit denselben Indices an, so kann man daraus eine solche für Determinanten $(m-1)^{ter}$ Ordnung ableiten. Dies ersieht man auf folgende Weise. In der Relation müssen mindestens zwei Determinanten vorkommen. Daher können die $2m$ Indices nicht mehr als $m-2$ Paare gleicher Indices enthalten. Enthalten sie nämlich $m-1$ Paare gleicher Indices und sind *eins* und *zwei* die beiden nicht zweimal vorkommenden, so giebt es nur die Determinante

$$|a_{ik}| \qquad \binom{i=1,3,4,\dots m+1}{k=2,3,4,\dots m+1}.$$

Dasselbe gilt für m Paare gleicher Indices. Es giebt also mehr als zwei nur einmal vorkommende Indices, von denen offenbar in jeder Determinante ebensoviele den Horizontalreihen wie den Verticalreihen angehören müssen. Es kann daher angenommen werden, dass etwa die Indices 1, 2, 3 nur einmal vorkommen und dass ein Glied der Relation die folgende Form hat

$$c.|a_{ik}| \qquad \binom{i=1,2,i_3,\dots i_m}{k=3,k_2,\dots k_m}.$$

Wenn nun in der Relation der Coefficient von a_{13}, der ja verschwinden muss, keine Relation zwischen Determinanten $(m-1)^{ter}$ Ordnung lieferte, so müsste der Theil desselben, welcher aus dem hingeschriebenen Gliede hervorgeht, sich wegheben; folglich müsste in der Relation noch das Glied vorkommen

$$+c_1.|a_{ik}| \qquad \binom{i=3,2,i_3,\dots i_m}{k=1,k_2,k_3,\dots k_m}.$$

Derselbe Schluss gilt auch in Bezug auf a_{23}. Es müsste sich also in der Relation auch das folgende Glied finden:

$$+c_1 . |a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=1, & 3, & i_3, & \dots & i_m \\ k=2, & k_2, & k_3, & \dots & k_m \end{pmatrix}.$$

Alsdann muss aber der Coefficient von a_{12} nothwendig eine Relation ergeben. Denn aus den hingeschriebenen Gliedern kommt

$$2c_1 . |a_{ik}| \qquad \begin{pmatrix} i=3, & i_3, & \dots & i_m \\ k=k_2, & k_3, & \dots & k_m \end{pmatrix},$$

und diese Determinante kann aus keinen anderen Gliedern als den obigen beiden hervorgehen, kann sich daher nicht wegheben und ist von Null verschieden. Da nun, wie man sich leicht überzeugen kann, zwischen Determinanten zweiter Ordnung keine lineare Relation besteht, so ist die Unmöglichkeit einer linearen Relation allgemein nachgewiesen.

Berlin, im August 1882.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. I.

(Von Herrn *Otto Rausenberger* in Frankfurt a. M.)

§ 1.

Bevor ich auf den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Notiz eingehe, muss ich einige Bezeichnungen vorherschicken, deren ich mich im Folgenden bedienen will. In meiner Abhandlung „Theorie der allgemeinen Periodicität" im 18. Bande der Mathem. Annalen wies ich darauf hin, dass sich an Stelle der doppeltperiodischen elliptischen Functionen mit Vortheil Transcendenten mit einfacher multiplicatorischer Periode einführen lassen, d. h. Functionen, die einer Gleichung

$$f(px) = f(x)$$

Genüge leisten. Die Bezeichnungen für diese und die damit im Zusammenhang stehenden Transcendenten wähle ich durchaus analog zu denjenigen, welche in dem Werke meines hochverehrten Lehrers, Herrn *Königsberger* „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" für die entsprechenden elliptischen Functionen angewandt sind.

Ich setze, indem ich mod. $p < 1$ annehme,

$$\eta(p, x) = \Sigma p^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = \Pi(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+1}x)\left(1+\frac{p^{2n+1}}{x}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots \infty)$$

und betrachte diesen Ausdruck als Normalform der Functionen, aus denen sich die multiplicatorisch periodischen Transcendenten zusammensetzen. Wir haben die Gleichungen

$$\eta(p, p^2 x) = \frac{1}{px} \cdot \eta(p, x)$$

und

$$\eta\left(p, \frac{1}{x}\right) = \eta(p, x).$$

Ferner schreibe ich

ist. $\varphi^n(x)$ ist somit eine Function mit der multiplicatorischen Periode p und muss sich daher durch irgend eine solche Function, z. B. $S(p, x)$ ausdrücken lassen. Die Ausführung dieser Rechnung, die hier in ganz anderer Weise bewerkstelligt werden soll, wie durch Herrn *Kiepert* in der Abhandlung: „Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen", dieses Journal Bd. 76, ist die Aufgabe der folgenden Untersuchung.

2. Wenn wir die Methode benutzen, welche in dem *Königsberger*schen Lehrbuche pag. 350 ff. dargestellt ist, finden wir ohne Schwierigkeit

$$\varphi^n(x) = C\cdot\frac{S^2(p, \alpha p^{\frac{1}{2}} x)}{S^2(p, \alpha p^{\frac{1}{2}} x)-S^2(p, \alpha)}\cdot\frac{S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}} x)-S^2(p, \alpha^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}} x)-S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}} p^{\frac{1}{2}})}$$

$$\cdot\frac{S^2(p, \alpha^{\frac{4}{2}} x)-S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}} p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha^{\frac{4}{2}} x)-S^2(p, \alpha^{\frac{4}{2}} p^{\frac{1}{2}})}\cdots\frac{S^2(p, \alpha^{\frac{n+1}{2}} x)-S^2(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha^{\frac{n+1}{2}} x)-S^2(p, \alpha^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{1}{2}})},$$

und indem wir, behufs Bestimmung von C, $x = 1$ setzen:

$$\varphi^n(1) = \frac{\eta_0^n(p, \alpha)}{\eta_0^n} = C\cdot\frac{S^2(p, \alpha p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha p^{\frac{1}{2}})-S^2(p, \alpha)}\cdot\frac{S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}})-S^2(p, \alpha^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}})-S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}} p^{\frac{1}{2}})}$$

$$\cdot\frac{S^2(p, \alpha^{\frac{4}{2}})-S^2(p, \alpha^{\frac{2}{2}} p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha^{\frac{4}{2}})-S^2(p, \alpha^{\frac{4}{2}} p^{\frac{1}{2}})}\cdots\frac{S^2(p, \alpha^{\frac{n+1}{2}})-S^2(p, \alpha^{\frac{n-1}{2}} p^{\frac{1}{2}})}{S^2(p, \alpha^{\frac{n+1}{2}})-S^2(p, \alpha^{\frac{n+1}{2}} p^{\frac{1}{2}})}.$$

Es ist nicht meine Absicht, auf dem eingeschlagenen Wege weiterzugehen, da wir nach dieser Methode den Ausdruck für $\varphi^n(x)$ in recht complicirter Form erhalten. Wir begnügen uns vielmehr damit, aus dem gefundenen Resultate den Schluss zu ziehen, dass sich $\varphi^n(x)$ (wie sich leicht mittelst bekannter Rechnungen ergiebt), abgesehen von dem Factor

$$\frac{\eta_0^n(p, \alpha)}{\eta_0^n},$$

als eine algebraische Function von $S(p, x)$, $S(p, \alpha)$ *und* $\varkappa$ *darstellen lässt, welche keine höheren Irrationalitäten als Quadratwurzeln enthält.* — Um zur wirklichen Ausrechnung des gesuchten Ausdrucks für $\varphi^n(x)$ zu gelangen, wählen wir einen ganz anderen Weg.

3. Da sich $\varphi^n(x)$ als rationale Function von $w = S(p, \alpha)$ und der einzigen Irrationalität $\sqrt{R(w)} = \sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}$ darstellen lässt und ausserdem dieselben Unstetigkeitspunkte wie $S(p, \alpha)$ besitzt, mithin eine ganze Function jener Grössen sein muss, so dürfen wir setzen

$$(1.) \qquad \varphi^n(x) = f_0(w)+f_1(w)\sqrt{R(w)},$$

worin $f_0(w)$ und $f_1(w)$ ganze Functionen bezeichnen. Dieser Ausdruck muss wegen der Doppeldeutigkeit von $\sqrt{R(w)}$ noch einen zweiten Werth:

$$\varphi_1^n(x) = f_0(w) - f_1(w)\sqrt{R(w)}$$

haben, der in Folge der leicht herzuleitenden Relation

$$\mathrm{S}\left(p, -\frac{1}{x}\right) = \mathrm{S}(p, x)$$

mit

$$\varphi^n\left(-\frac{1}{x}\right) = \left[\frac{\eta_0\left(p, -\frac{\alpha}{x}\right)}{\eta_0\left(p, -\frac{1}{x}\right)}\right]^n = \left[\frac{\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)}{\eta_0(p, x)}\right]^n$$

identisch ist. — Hiernach haben wir

$$(2.) \qquad 2f_0(w) = \left[\frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p, x)}\right]^n + \left[\frac{\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)}{\eta_0(p, x)}\right]^n$$

und

$$(3.) \qquad f_0^2(w) - f_1^2(w) R(w) = \left[\frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p, x)} \cdot \frac{\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)}{\eta_0(p, x)}\right]^n.$$

Da man sich aber leicht davon überzeugt, dass bereits

$$\frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p, x)} \cdot \frac{\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)}{\eta_0(p, x)}$$

die multiplicatorische Periode p besitzt, so dürfen wir mit Rücksicht auf die Unstetigkeitspunkte und darauf, dass jener Ausdruck ungeändert bleibt, wenn man x mit $-x$, also w mit $-w$ oder (wodurch eine Irrationalität ausgeschlossen wird) x mit $-\frac{1}{x}$ vertauscht,

$$(4.) \qquad \frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p, x)} \cdot \frac{\eta_0\left(p, \frac{x}{\alpha}\right)}{\eta_0(p, x)} = a + bw^2$$

setzen. — Um a und b zu bestimmen, wählen wir $x = 1$ und finden

$$a = \frac{\eta_0^2(p, \alpha)}{\eta_0^2},$$

ferner $x = p^{\frac{1}{2}}\alpha$ und erhalten

$$0 = a + b\,\mathrm{S}^2(p, p^{\frac{1}{2}}\alpha);$$

hieraus folgt

$$b = -\frac{\eta_1^2(p,\alpha)}{\eta_0^2 S^2(p, p^{\frac{1}{2}}\alpha)} = -\frac{\eta_2^2\eta_0^2(p,\alpha)\eta_0^2(p, p^{\frac{1}{2}}\alpha)}{\eta_0^2\eta_3^2\eta_1^2(p, p^{\frac{1}{2}}\alpha)}$$

$$= -\frac{\eta_2^2\eta_0^2(p,\alpha)\eta_1^2(p,\alpha)}{\eta_0^2\eta_3^2\eta_0^2(p,\alpha)} = -\frac{\eta_2^2\eta_1^2(p,\alpha)}{\eta_0^2\eta_3^2}$$

$$= -\varkappa\cdot\frac{\eta_1^2(p,\alpha)}{\eta_0^2}.$$

also

$$a + b w^2 = \frac{\eta_0^2(p,\alpha)}{\eta_0^2}[1-\varkappa^2 S^2(p,\alpha)w^2].$$

Da nun aus (2.) ersichtlich ist, dass $f_0(w)$ durch die Vertauschung von x mit $-x$, also von w mit $-w$ keine Aenderung erleidet, so ist $f_0(w)$ eine gerade Function von w, die bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ansteigen kann. Aus (3.) ergiebt sich dann weiter, dass $f_1^2(w)$ nur gerade, also $f_1(w)$ nur gerade oder nur ungerade Potenzen von w enthält; da wegen (4.) $f_1(w)$ bis zum $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade ansteigen muss, kann nur das Letztere der Fall sein. Wir setzen daher (das Anfangsglied von $f_0(w)$ bestimmt sich unmittelbar)

$$f_0(w) = \frac{\eta_0^n(p,\alpha)}{\eta_0^n}(1 + a_2 w^2 + a_4 w^4 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1}).$$

$$f_1(w) = \frac{\eta_0^n(p,\alpha)}{\eta_0^n}(b_1 w + b_3 w^3 + \cdots + b_{n-2} w^{n-2})$$

und haben

$$(5.)\quad \begin{cases} (1 + a_2 w^2 + a_4 w^4 + \cdots + a_{n-1} w^{n-1})^2 \\ -(b_1 w + b_3 w^3 + \cdots + b_{n-2} w^{n-2})^2 (1-(1+\varkappa^2)w^2 + \varkappa^2 w^4) \\ = (1-\varkappa^2 S^2(p,\alpha) w^2)^n. \end{cases}$$

Multipliciren wir aus und vergleichen die Coefficienten gleich hoher Potenzen mit einander, so ergeben sich $n+1$ Gleichungen, aus welchen sich die n unbekannten Coefficienten bestimmen lassen. Wenn nun auch diese Gleichungen die Unbekannten im zweiten Grade enthalten, also nach ausgeführter Elimination auf Gleichungen höheren Grades führen, so ist doch aus den unter 2. durchgeführten Betrachtungen ersichtlich, dass sie unter Zuhülfenahme keiner höheren Irrationalitäten als Quadratwurzeln lösbar sein müssen. — Wir führen die Rechnung für den einfachsten Fall durch.

4. Für $n = 3$ haben wir

$$(1 + a_2 w^2)^2 - b_1^2 w^2 (1-(1+\varkappa^2)w^2 + \varkappa^2 w^4) = (1-\varkappa^2 S^2(p,\alpha) w^2)^3,$$

also

$$2a_2 - b_1^2 = -3\varkappa^2 S^2(p,\alpha),$$

$$a_2^2 + b_1^2(1+\varkappa^2) = 3\varkappa^4 S^4(p,\alpha),$$

$$b_1^2 \varkappa^2 = \varkappa^6 S^6(p,\alpha),$$

woraus folgt

$$b_1 = \pm \varkappa^2 S^3(p,\alpha),$$
$$a^2 = \varkappa^2 S^2(p,\alpha)(\varkappa^2 S^4(p,\alpha)-3),$$

also

$$\varphi^3(x) = \frac{\eta_0^3(p,\alpha)}{\eta_0^3}[1+\varkappa^2 S^2(p,\alpha)(\varkappa^2 S^4(p,\alpha)-3)w^2$$
$$\pm \varkappa^2 S^3(p,\alpha) w \sqrt{(1-w^2)(1-\varkappa^2 w^2)}].$$

Die Bestimmung des Vorzeichens der Irrationalität glaube ich übergehen zu dürfen.

5. Ist n eine gerade Zahl, so stellt bereits $\varphi^{\frac{n}{2}}(x)$ eine multiplicatorisch periodische Function dar, so dass sich diese Grösse rational durch w und $\sqrt{R(w)}$ ausdrücken lassen muss. Der Gang bei der wirklichen Ausführung bleibt wesentlich derselbe wie bei einem ungeraden n, abgesehen davon, dass die Schlüsse über den Grad von $f_0(w)$ und $f_1(w)$ nicht mehr zutreffen. — Um auch für diesen Fall ein Beispiel zu geben, wählen wir $n=4$, also $\alpha = i$, und setzen mit Rücksicht darauf, dass $S(p,i)=1$ ist:

$$(a_0+a_1 w+a_2 w^2)^2 - b_0^2(1-w^2(1+\varkappa^2)+\varkappa^2 w^4) = (1-\varkappa^2 w^2)^2.$$

Die Coefficientenvergleichung ergiebt ausser $a_1 = 0$:

$$a_0^2 - b_0^2 = 1,$$
$$2a_0 a_2 + b_0^2(1+\varkappa^2) = -2\varkappa^2,$$
$$a_2^2 - b_0^2 \varkappa^2 = \varkappa^4.$$

Bringen wir in der zweiten Gleichung das zweite Glied auf die rechte Seite, quadriren dieselbe und eliminiren mit Hülfe der beiden anderen Gleichungen a_0 und a_2, so folgt leicht

$$b_0 = 0, \quad \text{also} \quad a_0 = \pm 1, \quad a_2 = \mp \varkappa^2.$$

Das noch fragliche Vorzeichen bestimmt sich leicht durch die Bemerkung, dass wir für $\varkappa = 1$, also $w = 0$

$$\varphi^2(1) = \left[\frac{\eta_0(p,i)}{\eta_0(p,1)}\right]^2 = \frac{\eta_3^2}{\eta_0^2}$$

haben. Somit ist

$$\varphi^2(x) = \frac{\eta_3^2}{\eta_0^2}(1-\varkappa^2 w^2) = \frac{\eta_3^2}{\eta_0^2} D^2(p,x).$$

Frankfurt a. M., im März 1882.

Zur Theorie der arithmetischen Functionen, welche von *Jacobi* $\psi(\alpha)$ genannt werden.

(Von Herrn *Schwering* in Coesfeld.)

Seien p und λ irgend zwei reelle ungerade Primzahlen, x eine Wurzel der Gleichung:

$$(1.)\quad x^p = 1,$$

α eine solche der Gleichung:

$$(2.)\quad \alpha^\lambda = 1,$$

wo nur die Einheit beide Male ausgeschlossen werden soll, und

$$(3.)\quad p = 2n\lambda+1,\quad \lambda > 3.$$

Ferner möge g eine primitive Wurzel mod. p sein. Setzen wir dann:

$$(\alpha, x) = x+\alpha.x^g+\alpha^2.x^{g^2}+\alpha^3.x^{g^3}+\cdots+\alpha^{p-2}.x^{g^{p-2}}$$

oder

$$(4.)\quad (\alpha, x) = \sum_1^{p-2}{}_m\,\alpha^{\operatorname{ind} m}.x^m,$$

so ist

$$(5.)\quad \psi(\alpha) = \frac{(\alpha^h, x).(\alpha^k, x)}{(\alpha^{h+k}, x)},$$

und durch diese Gleichung ist, da die Exponenten h und k willkürlich bleiben, eine ganze Reihe verschiedener ψ-Functionen eingeführt. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, die *wirklich verschiedenen* ψ auszusondern und ihre Anzahl zu bestimmen. Diese Aufgabe ist, wie Herr *Bachmann* in seinem Werke *„die Lehre von der Kreistheilung“* Seite 92 angiebt, von *Jacobi* gelöst und die Lösung wohl in seinen Vorlesungen mitgetheilt worden *).

Seit einiger Zeit mit der Theorie der fünften Potenzreste beschäftigt, fand ich nun zunächst durch Induction den Satz, der dann auch durch Bildung der Norm bewiesen wurde, *dass* $1+\psi(\alpha)$ *immer durch* $(1-\alpha)^3$ *theilbar ist.* Diese interessante Eigenschaft der ψ-Function zeigte sich aber

---

*) Vgl. meinen nachfolgenden Aufsatz. *Kronecker.*

als *allgemein* gültig, und die bei dem Nachweise benutzten Principien führten auch zu einer Lösung jener von *Jacobi* bereits erledigten Aufgabe. Ob meine Lösung mit der von *Jacobi* gegebenen übereinstimmt, ist mir unbekannt geblieben, da dieselbe meines Wissens noch nicht veröffentlicht ist.

Um nun den angegebenen Satz zu beweisen, seien die ψ-Functionen von jetzt ab durch die Gleichung:

$$(6.)\qquad \psi_{\nu,\mu}(\alpha) = \sum_{m}^{1 \ldots p-2} \alpha^{\nu \operatorname{ind} m + \mu \operatorname{ind}(m+1)}$$

definirt. Ferner sei:

$$\psi_{\nu,\mu}(\alpha) = A_0^{(\nu,\mu)} + A_1^{(\nu,\mu)}\alpha + A_2^{(\nu,\mu)}\alpha^2 + \cdots + A_{\lambda-1}^{(\nu,\mu)}\alpha^{\lambda-1}.$$

Im Allgemeinen werden wir die Doppelindices weglassen dürfen.

Wir betrachten die Congruenz:

$$1 + g^{\lambda a + b} \equiv g^{\lambda c + d} (\text{mod.} p).$$

Halten wir b und d fest und lassen a alle Werthe von 1 bis $\frac{p-1}{\lambda}$ ganzzahlig durchlaufen, so wird diese Congruenz eine begrenzte Zahl möglicher c aufweisen. Die Anzahl derselben nennen wir nach *Gauss*

$$(b, d).$$

Dann hat man, wie leicht zu sehen,

$$(7.)\qquad (b, d) = (d, b) = (-b, d-b).$$

Ein negativer Index $-b$ äquivalirt durchaus dem positiven $\lambda - b$. Fassen wir nun die Function $\psi_{1,1}$ ins Auge, so sehen wir, dass für deren Coefficienten A die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (0,0) + (1, \lambda-1) + (2, \lambda-2) + \cdots + (\lambda-1, 1),\\
A_1 &= (0,1) + (1,0) + (2, \lambda-1) + \cdots + (\lambda-1, 2),\\
A_2 &= (0,2) + (1,1) + (2,0) + \cdots + (\lambda-1, 3),\\
&\cdots\\
A_{\lambda-1} &= (0, \lambda-1) + (1, \lambda-2) + (2, \lambda-3) + \cdots + (\lambda-1, 0),
\end{aligned}$$

in welchen der Einfachheit halber die oberen Indices der Grössen A weggelassen sind. Der Beweis unseres Satzes erfordert aber den Nachweis des Bestehens der drei Congruenzen (mod. λ)

$$\begin{aligned}
1 + A_0 + A_1 + \cdots + A_{\lambda-1} &\equiv 0,\\
A_1 + 2A_2 + \cdots + (\lambda-1)A_{\lambda-1} &\equiv 0,\\
A_2 + 3A_3 + \cdots + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2} A_{\lambda-1} &\equiv 0,
\end{aligned}$$

welche sich ergeben, wenn man $\psi(\alpha)$ nach Potenzen von $1-\alpha$ entwickelt. Dieser Nachweis soll nunmehr durch die obigen Ausdrücke der Coefficienten A geführt werden.

Die erste der drei Congruenzen ist selbstverständlich, da die linke Seite den Werth $p-1 = 2n\lambda$ hat.

Zum Beweise der zweiten erwäge man, dass der Summand $(0, \varkappa)$ mit *zwei* behaftet in $A_\varkappa$ vorkommt, weil $(0,\varkappa) = (\varkappa, 0)$ ist. Ferner erscheint $(0,\varkappa)$ wegen $(0,\varkappa) = (\lambda-\varkappa, \lambda-\varkappa)$ auch in $A_{\lambda-2\varkappa}$. Daher erscheint in

$$\Sigma\varkappa . A_\varkappa$$

der Summand $(0,\varkappa)$ multiplicirt mit $2\varkappa+(\lambda-2\varkappa)$, d. h. mit λ. Der Summand $(\varkappa, \mu)$, wo $\varkappa$ und μ von Null verschieden sind, kommt in sechs Formen vor. Sie sind:

$$(\varkappa, \mu) = (\mu, \varkappa) = (\lambda-\varkappa, \mu-\varkappa) = (\mu-\varkappa, \lambda-\varkappa) = (\lambda-\mu, \varkappa-\mu) = (\varkappa-\mu, \lambda-\mu).$$

Die erste und zweite Form erscheinen in $A_{\varkappa+\mu}$, die dritte und vierte in $A_{\lambda+\mu-2\varkappa}$, die beiden letzten in $A_{\lambda+\varkappa-2\mu}$. Daher erscheint $(\varkappa, \mu)$ in der Summe multiplicirt mit 4λ, w. z. b. w.

Betrachten wir endlich die dritte Congruenz, deren linke Seite sich als

$$\Sigma\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}A_\varkappa$$

darstellt. Durch analoge Schlüsse wie vorhin beweist man, dass dieselbe sich abgesehen von Vielfachen von λ auf

$$3\Sigma\varkappa^2(0,\varkappa)+6\Sigma(\varkappa^2+\mu^2-2\varkappa\mu)(\varkappa, \mu)$$

reducirt. Man hat nun aber, wie die Kreistheilung lehrt, auch die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\frac{p-1}{\lambda}-1 &= (0,0)+(0,1)+(0,2)+\cdots+(0,\lambda-1),\\ \frac{p-1}{\lambda} &= (1,0)+(1,1)+(1,2)+\cdots+(1,\lambda-1),\\ \frac{p-1}{\lambda} &= (2,0)+(2,1)+(2,2)+\cdots+(2,\lambda-1),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Multipliciren wir die zweite, dritte, vierte u. s. w. dieser Gleichungen mit 1, 4, 9, ... der Reihe nach und addiren, so erhalten wir links eine durch λ theilbare Summe, rechts aber erscheint:

$$\Sigma\varkappa^2.(0,\varkappa)+2\Sigma(\varkappa^2+\mu^2-2\varkappa\mu)(\varkappa, \mu),$$

welches also, w. z. b. w., durch λ theilbar ist.

Hiermit ist der obige Satz bewiesen und zugleich gezeigt, dass auf Theilbarkeit durch eine höhere Potenz von $(1-\alpha)$ als die dritte nicht gehofft werden darf, weil sie in dem dreigliedrigen Cyklus (7.) begründet ist.

Zusatz. Der obige dreigliedrige Cyklus (7.) führt auf einen sechsgliedrigen unter den Functionen $\psi_{\varkappa,\mu}$. Die resultirenden Functionen sind aber nur dann alle verschieden, wenn die Congruenz

$$\delta^2+\delta+1 \equiv 0 \quad (\text{mod.}\,\lambda)$$

keine ganzzahligen Auflösungen besitzt, also wenn $\lambda = 6m+5$ ist. Ausserdem fallen immer $\lambda-1$ complementäre Combinationen, $\varkappa+\mu=\lambda$, als zu Entartungen führend heraus. Ferner sind die drei Grundcombinationen $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,\lambda-2}$, $\psi_{1,\frac{1}{2}(\lambda-1)}$ auf einander zurückführbar. Hieraus ergiebt sich folgendes Endresultat: Ist $\lambda-1$ durch sechs theilbar, so existirt ausser dem letzten dreigliedrigen Cyklus ein zweigliedriger mit zusammen $3+2=5$ Typen, die zwei Urtypen entstammen. Es bleiben $\lambda-7$ Typen. Denn von den $(\lambda-1)^2$ Combinationen wurden $\lambda-1$ als zu Entartungen führend verworfen, und da jede Function $\psi_{\varkappa,\mu}$ zu $\lambda-1$ weiteren führt, wenn man für α alle $\lambda-1$ verschiedenen Wurzeln eintreten lässt, so bleiben $\lambda-2$ übrig, von denen die obigen fünf subtrahirt wurden. Diese $\lambda-7$ Typen reduciren sich auf $\frac{1}{6}(\lambda-7)$ Urtypen und *daher ist die Anzahl der Functionen ψ für $\lambda = 6m+1$ im Ganzen $\frac{1}{6}(\lambda+5)$. Für $\lambda = 6m+5$ ist diese Zahl $\frac{1}{6}(\lambda+1)$.*

So ist z. B.

für $\lambda = 13$, die Anzahl der ψ gleich 3, indem

$$\psi_{1,1} = \psi_{1,11} = \psi_{1,6}, \quad \psi_{1,3} = \psi_{1,9},$$
$$\psi_{1,2} = \psi_{1,10} = \psi_{1,7} = \psi_{1,4} = \psi_{1,5} = \psi_{1,8};$$

für $\lambda = 17$ ist die Anzahl der ψ gleich 3, indem:

$$\psi_{1,1} = \psi_{1,15} = \psi_{1,8},$$
$$\psi_{1,2} = \psi_{1,14} = \psi_{1,9} = \psi_{1,11} = \psi_{1,7} = \psi_{1,5},$$
$$\psi_{1,3} = \psi_{1,13} = \psi_{1,6} = \psi_{1,4} = \psi_{1,10} = \psi_{1,12}.$$

Die Argumente sind leicht passend zu ergänzen. Für $\lambda = 7$ hat man die zwei Functionen $\psi_{1,1}$ und $\psi_{1,2}$. So für $p = 71$:

$$\psi_{1,2}(\alpha) = 3+12\alpha+12\alpha^2+10\alpha^3+12\alpha^4+10\alpha+10\alpha^6,$$
$$\psi_{1,1}(\alpha) = 12+12\alpha+6\alpha^2+11\alpha^3+8\alpha^4+6\alpha^5+14\alpha^6.$$

Zur Theorie der Abelschen Gleichungen.

Bemerkungen zum vorstehenden Aufsatze des Herrn *Schwering*.

(Von *Kronecker*.)

I.

Die von Herrn *Schwering* gefundene und nachgewiesene Eigenschaft der complexen Zahlen $\psi(\alpha)$ lässt sich auch aus allgemeineren Eigenschaften der bei den Abelschen Gleichungen auftretenden Ausdrücke herleiten.

Beschränkt man sich auf *einfache* Abelsche Gleichungen und bezeichnet man wie in meinem Aufsatze „Ueber Abelsche Gleichungen" (Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom December 1877, S. 845 u. folg.) mit

$$x_h \qquad (h=0, 1, \dots n-1)$$

n unbestimmte Grössen, mit ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit und mit ϖ_h die Summe

$$\sum_r \omega^{hr} x_r \qquad (r=0, 1, \dots n-1),$$

so wird der Quotient

$$\frac{\varpi_{ht}\varpi_{kt}}{\varpi_{(h+k)t}}$$

eine ganze Function von ω^t, deren Coefficienten rationale cyklische Functionen der n Grössen x sind, und welche mit $\psi_{h,k}(\omega^t)$ bezeichnet werden soll. Setzt man nämlich, wie schon a. a. O. angegeben worden, zuvörderst eine *Variable* w an Stelle der Wurzel der Einheit ω, so dass an die Stelle der mit ϖ_h bezeichneten Summe der Ausdruck

$$\sum_r w^{hr} x_r \qquad (r=0, 1, \dots n-1)$$

tritt, so findet offenbar die Congruenz

$$\sum_r w^{mr} x_r \equiv w^{ms} \sum_r w^{mr} x_{r+s} (\text{mod.} (w^n - 1)) \qquad (r=0, 1, \dots n-1)$$

statt, wenn m, s irgend welche nicht negative ganze Zahlen bedeuten und unter x_k für den Fall, dass $k > n-1$ ist, der kleinste nicht negative Rest modulo n verstanden wird. Hieraus folgt die Congruenz

$$\prod_m \sum_r w^{mr} x_r \equiv \prod_m \sum_r w^{mr} x_{r+s} \pmod{(w^n-1)} \qquad (r=0, 1, \dots n-1),$$

wenn darin die Producte auf eine Reihe von Zahlen m erstreckt werden, deren Summe durch n theilbar ist. Da hiernach das Product

$$\prod_m \sum_r w^{mr} x_{r+s} \qquad (r=0, 1, \dots n-1;\ m=m_0, m_1, m_2, \dots),$$

für den Fall, dass $m_0+m_1+m_2+\cdots \equiv 0 \pmod{n}$ ist, im Sinne der Congruenz modulo (w^n-1) ungeändert bleibt, wenn für s irgend eine der Zahlen 0, 1, ... $n-1$ gesetzt wird, so ergiebt sich die Congruenz

$$\prod_m \sum_r w^{mr} x_r \equiv f(w) \pmod{(w^n-1)} \qquad (r=0, 1, \dots n-1;\ m=m_0, m_1, m_2, \dots),$$

in welcher $f(w)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von w bedeutet, deren Coefficienten ganze *cyklische* Functionen der n Grössen x sind. Verbindet man endlich hiermit die Congruenz

$$\prod_m \sum_r w^{mr} x_r \equiv \bar{f}(w) \pmod{(w^n-1)} \qquad (r=0, 1, \dots n-1;\ m=m_0, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots),$$

wo $m_0+\bar{m}_1+\bar{m}_2+\cdots \equiv 0 \pmod{n}$ vorausgesetzt ist, und $\bar{f}(w)$ eine Function von derselben Beschaffenheit wie $f(w)$ bedeutet, so gelangt man zu der allgemeinen Congruenz

$$\bar{f}(w) \prod_m \sum_r w^{mr} x_r \equiv f(w) \prod_{\bar{m}} \sum_r w^{\bar{m}r} x_r \pmod{(w^n-1)} \qquad (r=0, 1, \dots n-1),$$

in welcher die Zahlen m, $\bar{m}$, auf welche die Multiplication zu erstrecken ist, nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Summe der einen für den Modul n congruent der Summe der anderen sein muss. Diese allgemeine Congruenz lässt sich auch in folgender Form darstellen:

$$(A.) \qquad \Big(\sum_r w^{mr} x_r\Big)^{l} . \Big(\sum_r w^{m'r} x_r\Big)^{l'} . \Big(\sum_r w^{m''r} x_r\Big)^{l''} \cdots \equiv \varphi(w) \pmod{(w^n-1)},$$
$$(r=0, 1, \dots n-1;\ lm+l'm'+l''m''+\cdots \equiv 0 \pmod{n})$$

wo $\varphi(w)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von w bedeutet, deren Coefficienten *cyklische*, rationale (ganze oder gebrochene) Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ sind. Setzt man in der Congruenz $(A.)$ an Stelle der Variabeln w die n^{te} Wurzel der Einheit ω^t, so resultirt die *Gleichung:*

$$(B.) \qquad \varpi_{mt}^{l}\, \varpi_{m't}^{l'}\, \varpi_{m''t}^{l''} \cdots = \varphi(\omega^t) \qquad (lm+l'm'+l''m''+\cdots \equiv 0 \pmod{n}),$$

aus welcher für den speciellen Fall $l = l' = 1$, $l'' = -1$ hervorgeht, dass in der That, wie oben angeführt worden,

$$(C.) \qquad \frac{\varpi_{ht}\, \varpi_{kt}}{\varpi_{(h+k)t}} = \psi_{h,k}(\omega^t),$$

d. h. dass der Quotient links eine ganze Function von ω^t ist, deren Coefficienten

rationale cyklische Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sind. Ist x, wie im Aufsatze des Herrn *Schwering*, eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit, g eine primitive Congruenzwurzel von p, und setzt man $n = p-1$ und

$$x_0 = x, \quad x_1 = x^g, \quad x_2 = x^{g^2}, \quad \ldots \quad x_{n-1} = x^{g^{p-2}},$$

so fallen die durch die Gleichung $(C.)$ definirten Ausdrücke ψ mit den *Jacobi*schen zusammen.

Bedeuten nun wieder, wie vorher, $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ *unbestimmte* Grössen und entwickelt man das Product

$$2\sum_r w^{hr} x_r . \sum_r w^{kr} x_r \qquad (r=0, 1, \ldots n-1)$$

nach steigenden Potenzen von $(w-1)$, so kommt, wenn man von denjenigen Gliedern absieht, die eine höhere als die zweite Potenz von $(w-1)$ enthalten, und wenn man zur Abkürzung

$$\sum_r x_r = X, \quad \sum_r r x_r = X_1, \quad \sum_r r^2 x_r = X_2 \qquad (r=0, 1, \ldots n-1)$$

setzt:

$$2X^2 - (h+k)(w-1)(w-3)XX_1 + (h+k)^2(w-1)^2 XX_2 - hk(w-1)^2 \sum_{r,s} (r-s)^2 x_r x_s. \qquad (r, s=0, 1, \ldots n-1)$$

Andererseits ergiebt die Entwickelung von $2\sum_r w^{(h+k)r} x_r$, abgesehen von den mit $(w-1)^3$ beginnenden Gliedern, das Aggregat:

$$2X - (h+k)(w-1)(w-3)XX_1 + (h+k)^2(w-1)^2 X_2,$$

und es besteht daher die Congruenz

$$2\sum_r w^{hr} x_r . \sum_r w^{kr} x_r \equiv 2X\sum_r w^{(h+k)r} x_r - hk(w-1)^2 \sum_{r,s}(r-s)^2 x_r x_s \pmod{(w-1)^3} \qquad (r, s=0, 1, \ldots n-1)$$

in dem Sinne, dass die Division der auf beiden Seiten stehenden Ausdrücke durch $(w-1)^3$ als Rest eine und dieselbe ganze ganzzahlige Function der Grössen

$$w, \quad x_0, \quad x_1, \quad \ldots \quad x_{n-1}$$

ergiebt. Da nun, wenn zur Abkürzung

$$\sum_r x_r x_{r+h} = \Xi_h \qquad (r=0, 1, \ldots n-1)$$

gesetzt wird, die Congruenz

$$\sum_{r,s} (r-s)^2 x_r x_s \equiv \sum_r r^2 \Xi_r \pmod{n} \qquad (r, s=0, 1, \ldots n-1)$$

besteht, wo $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ ganze cyklische Functionen der n Grössen x sind, so erhellt, dass in dem im 92. Bande dieses Journals S. 77 dargelegten Sinne die Congruenz

$$(D.)\quad 2\sum_r w^{hr}x_r.\sum_r w^{kr}x_r \equiv 2\sum_r x_r.\sum_r w^{(h+k)r}x_r - hk(w-1)^2\sum_r r^2\Xi_r \quad (r=0,1,\dots n-1)$$

für das Modulsystem

$$(n(w-1)^2,\ (w-1)^3)$$

stattfindet. Setzt man gemäss der Congruenz $(A.)$

$$(\bar{A}.)\quad \sum_r w^{hr}x_r.\sum_r w^{kr}x_r.\sum_r w^{(h+k)(n-1)r}x_r \equiv \varphi_{h,k}(w)\ (\text{mod.}(w^n-1)) \quad (r=0,1,\dots n-1)$$

und multiplicirt die Congruenz $(D.)$ mit

$$\sum_r w^{(h+k)(n-1)}x_r \qquad (r=0,1,\dots n-1),$$

so geht dieselbe in die Congruenz

$$(E.)\quad 2\varphi_{h,k}(w) \equiv 2\varphi_{0,h+k}(w) - hk(w-1)^2\sum_r r^2\Xi_r\ (\text{modd.}\,n(w-1)^2,\ (w-1)^3,\ w^n-1) \quad (r=0,1,\dots n-1)$$

über, in welcher die Ausdrücke $\varphi(w)$ ganze Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von w bedeuten, deren Coefficienten *ganze ganzzahlige cyklische* Functionen der n Grössen x sind. Diese Congruenz $(E.)$ enthält den von Herrn *Schwering* aufgestellten Satz als speciellen Fall.

Nimmt man zuvörderst, wie oben, für w die n^{te} Wurzel der Einheit ω^t, wo t irgend einen Divisor von n bedeutet, so reducirt sich das Modulsystem der Congruenz $(E.)$ auf das System der *zwei* Moduln

$$n(\omega^t-1)^2,\quad (\omega^t-1)^3,$$

und da ω^t-1 für den Fall, dass der Quotient $\frac{n}{t}$ *verschiedene* Primzahlen als Factoren enthält, eine complexe *Einheit* ist, so hat man nur den Fall ins Auge zu fassen, wo dieser Quotient eine Primzahlpotenz ν^m ist. Alsdann ist aber ν und also auch $t\nu^m$, d. h. n durch ω^t-1 theilbar, und das Modulsystem in $(E.)$ reducirt sich daher auf den einfachen Modul

$$(\omega^t-1)^3.$$

Die in der Congruenz $(E.)$ vorkommenden Ausdrücke $\varphi(w)$ bestimmen sich durch die Gleichung

$$(F.)\quad \varpi_{ht}\varpi_{kt}\varpi_{-(h+k)t} = \varphi_{h,k}(\omega^t),$$

welche aus der obigen Congruenz $(\bar{A}.)$ hervorgeht, wenn $w=\omega^t$ gesetzt wird, und der Ausdruck $\sum_r r^2\Xi_r$ in $(E.)$ verwandelt sich, wenn man in

$$\Xi_r = \sum_s x_s x_{s+r} \qquad (s=0,1,\dots n-1)$$

die Werthe

$$x_s = \frac{1}{n}\sum_h \omega^{-hs}\varpi_h,\quad x_{s+r} = \frac{1}{n}\sum_h \omega^{-h(s+r)}\varpi_h \qquad (h=0,1,\dots n-1)$$

einsetzt, in

$$\frac{1}{n}\sum_{h,r} r^2 \omega^{hr}\varpi_h\varpi_{-h} \qquad (h, r=0, 1, \dots n-1).$$

Da nun für eine beliebige Grösse w:

$$(w-1)^2\sum_r r^2 w^r = n^2 w^n(w-1)-2nw^{n+1}+w(w+1)\cdot\frac{w^n-1}{w-1} \qquad (r=0, 1, \dots n-1)$$

ist, so wird

$$(G.) \qquad \sum_r r^2 \Xi_r = \frac{1}{n}\sum_{h,r} r^2\omega^{hr}\varpi_h\varpi_{-h} = \chi \qquad (h, r=0, 1, \dots n-1),$$

wenn χ durch die Gleichung

$$(\overline{G}.) \qquad \chi = \tfrac{1}{6}(n-1)(2n-1)\varpi_0^2-\sum_k\frac{n+(2-n)\omega^k}{(1-\omega^k)^2}\varpi_k\varpi_{-k} \qquad (k=1, 2, \dots n-1)$$

definirt wird. Man gelangt auf diese Weise von der Congruenz $(E.)$ zur Congruenz

$$(\overline{E}.) \qquad 2\varphi_{h,k}(\omega^t) \equiv 2\varphi_{0,h+k}(\omega^t)-hk(\omega^t-1)^2\chi \pmod{(\omega^t-1)^3},$$

in welcher die Ausdrücke φ, χ die in den Gleichungen $(F.)$ und $(G.)$ dargelegte Bedeutung haben.

Specialisirt man nunmehr die Grössen $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ wie oben indem man

$$x_0 = x, \quad x_1 = x^g, \quad x_2 = x^{g^2}, \quad \dots \quad x_{n-1} = x^{g^{p-2}}, \quad n = p-1$$

setzt und unter g eine primitive Congruenzwurzel von p, unter x aber eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit und unter p eine ungerade Primzahl versteht, so wird

$$(H.) \qquad \varpi_0 = -1, \quad \varpi_k\varpi_{-k} = \omega^{\frac{1}{2}kn}p \qquad (k=1, 2, \dots n-1),$$

also

$$\chi = \frac{1}{n}\sum_{h,r} r^2\omega^{hr}\varpi_h\varpi_{-h} = \tfrac{1}{4}p(p-1)^2-\sum_r r^2 \qquad \binom{h=0, 1, \dots n-1}{r=1, 2, \dots n-1}$$

oder

$$\chi = -\tfrac{1}{12}(p-1)(p^2-11p+12) = -\tfrac{1}{12}n(n^2-9n+2)$$

und daher

$$\chi \equiv -\tfrac{1}{12}n(n-2)(n+5) \pmod{n}.$$

Da nun $n = t\nu^m$ und folglich $\chi \equiv 0 \pmod{\nu}$ wird, wenn die Primzahl $\nu \geqq 3$ und wenn nur nicht $\nu^m = 3$ und dabei $t \equiv \pm 1 \pmod{3}$ ist, so geht die Congruenz $(\overline{E}.)$ in die einfachere

$$(J.) \qquad \varphi_{h,k}(\omega^t) \equiv \varphi_{0,h+k}(\omega^t) \pmod{(\omega^t-1)^3}$$

über, welche vermöge der Gleichungen $(C.)$, $(F.)$ und $(H.)$ auf die Form

$$(\overline{J}.) \qquad p\,\psi_{h,k}(\omega^t) \equiv -p \quad \text{oder also} \quad \psi_{h,k}(\omega^t) \equiv -1 \pmod{(\omega^t-1)^3}$$



gebracht werden kann; und ω^t bedeutet hier eine primitive Wurzel der Einheit, deren Exponent irgend eine in $p-1$ enthaltene ungerade Primzahlpotenz ist, wenn nur der einzige Fall ausgenommen wird, wo $t=\frac{1}{3}(p-1)$ und zugleich t nicht durch 3 theilbar ist.

Die Vereinfachung der Congruenz $(\bar{E}.)$ ist keineswegs auf die Kreistheilungs-Gleichungen beschränkt. Man kann nämlich für eine beliebige ungerade Anzahl Grössen $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ eine ebenso grosse Anzahl ganzer rationaler Functionen derselben

$$x'_0, \quad x'_1, \quad \ldots \quad x'_{n-1}$$

so bestimmen, dass die daraus gebildeten Ausdrücke ϖ' diejenige Eigenschaft besitzen, auf welcher — im Falle der Kreistheilungs-Gleichung — der Wegfall des letzten Gliedes in der Congruenz $(\bar{E}.)$ beruht. Es ist dies die Eigenschaft, dass das Product $\varpi_h\varpi_{-h}$ für alle $n-1$ von Null verschiedenen Werthe des Index h denselben Werth hat. Um solche Grössen x' zu bestimmen, setze man

$$(K.)\qquad \frac{\varpi_h}{\varpi_{-h}}\prod_k \varpi_k = \varpi'_h, \qquad x'_i = \frac{1}{n}\sum_h \omega^{-hi}\varpi'_h \qquad \binom{h,\, i=0,\, 1,\, \ldots\, n-1}{k=1,\, 2,\, \ldots\, n-1}.$$

Alsdann sind die n Grössen x' ganze ganzzahlige Functionen der n Grössen x, und jede der n Grössen x' lässt sich daher als ganze Function einer der Grössen x so darstellen, dass die Coefficienten rationale cyklische Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sind. In dem durch die symmetrischen und cyklischen Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ gebildeten Rationalitäts-Bereiche wird also durch x_0 eine Gattung algebraischer Functionen n^{ter} Ordnung repräsentirt, welcher alle n Grössen x ebenso wie alle n Grössen x' angehören. Die aus den Grössen x' gebildeten Ausdrücke

$$\varpi'_h = \sum_r \omega^{hr} x'_r \qquad (h,\, r=0,\, 1,\, \ldots\, n-1)$$

erfüllen nun vermöge der Gleichungen $(K.)$ die Bedingung:

$$(L.)\qquad \varpi'_h\varpi'_{-h} = \varpi'_0\varpi'_0 \qquad (h=1,\, 2,\, \ldots\, n-1),$$

und es wird daher der Ausdruck

$$\frac{1}{n}\sum_{h,r} r^2\omega^{hr}\varpi'_h\varpi'_{-h} \qquad (h,\, r=0,\, 1,\, \ldots\, n-1),$$

welcher dem oben mit χ bezeichneten entspricht, gleich *Null*. Die Congruenz $(\bar{E}.)$ erhält demnach die einfache Form:

$$(E'.)\qquad \varphi'_{h,k}(\omega) \equiv \varphi'_{0,h+k}(\omega) \;(\text{mod.}\,(\omega-1)^3),$$

wenn $t = 1$ gesetzt und der Factor zwei weggelassen wird. Diese Congruenz hat nur dann eine Bedeutung, wenn n Primzahlpotenz ist, da sonst $\omega - 1$ complexe Einheit ist. Wenn aber $n = \nu^m$ und ν eine ungerade Primzahl ist, so kann $(\omega-1)^3$ als Modul durch $\nu^{\frac{3}{\sigma}}$ ersetzt werden, wo $\sigma = \nu^{m-1}(\nu-1)$ zu nehmen ist. Führt man an Stelle der Ausdrücke φ' die durch die Gleichung

$$\varpi'_h \varpi'_k = \varpi'_{h+k} \psi'_{h,k}$$

definirten Ausdrücke ψ' ein, so geht die Congruenz $(E'.)$ in folgende über:

$$(E''.) \qquad \psi'_{h,k}(\omega) \equiv \sum_r x'_r \pmod{(\omega-1)^3} \qquad (r=0, 1, \dots n-1),$$

und man sieht also, ***dass in jeder Gattung Abelscher Gleichungen eines beliebigen Rationalitäts-Bereiches solche Gleichungen existiren, für die eine ebenso einfache Congruenz (E''.) besteht, wie für die Kreistheilungs-Gleichungen.***

Führt man die Ausdrücke ϖ' selbst ein, so erhält man an Stelle von $(E''.)$ die Congruenz:

$$\varpi'_h \varpi'_k \equiv \varpi'_0 \varpi'_{h+k} \pmod{(\omega-1)^3}$$

und also nach Einsetzung der durch die Gleichung $(K.)$ definirten Werthe der Ausdrücke ϖ':

$$\frac{\varpi_h \varpi_k}{\varpi_{-h}\varpi_{-k}} \varpi'_0 \varpi'_0 \equiv \frac{\varpi_{h+k}}{\varpi_{-h-k}} \varpi'_0 \varpi'_0 \pmod{(\omega-1)^3}.$$

In dieser Congruenz können die Factoren ϖ'_0 weggelassen werden, da

$$\varpi'_0 = \prod_k \varpi_k \qquad (k=1, 2, \dots n-1)$$

und also offenbar nicht durch $\omega - 1$ theilbar ist. Es zeigt sich daher die Congruenz

$$(M.) \qquad \varpi_h \varpi_k \varpi_{-h-k} \equiv \varpi_{-h} \varpi_{-k} \varpi_{h+k} \pmod{(\omega-1)^3}$$

als mit der Congruenz $(E''.)$ äquivalent. Diese Congruenz $(M.)$ lässt sich aber ganz unmittelbar verificiren. Denn wenn man auf beiden Seiten die Werthe der Ausdrücke ϖ substituirt, alsdann, um nur positive Exponenten zu haben, die Indices $-h$, $-k$ durch $n-h$, $n-k$ ersetzt, und endlich an Stelle von ω eine Variable w nimmt, so kommt links

$$(N.) \qquad \sum_{r,s,t} w^{hr+ks+(2n-h-k)t} x_r x_s x_t$$

und rechts $\qquad (r, s, t = 0, 1, \dots n-1)$

$$(N'.) \qquad \sum_{r,s,t} w^{(n-h)r+(n-k)s+(h+k)t} x_r x_s x_t.$$

Entwickelt man diese Summen-Ausdrücke nach steigenden Potenzen von $w-1$, so ist das erste Glied auf beiden Seiten dasselbe, nämlich:

$$(\sum_r x_r)^3 \qquad (r=0, 1, \dots n-1);$$

das zweite Glied, welches die erste Potenz von $(w-1)$ enthält, wird auf

beiden Seiten durch n theilbar; denn der Coefficient von $(w-1)$ wird für den Modul n dem positiv oder negativ genommenen Werthe der Summe

$$\sum_{r,s,t}(hr+ks-(h+k)t)x_r x_s x_t \qquad (r,s,t=0,1,\dots n-1)$$

congruent, welche offenbar gleich Null ist, da hierin das Product

$$\sum_r rx_r \sum_r x_r \sum_r x_r$$

zuerst mit h dann mit k und zuletzt mit $-(h+k)$ multiplicirt erscheint. Im dritten Gliede endlich wird der Coefficient von $(w-1)^2$, abgesehen von Vielfachen der Zahl n, gleich

$$\tfrac{1}{2}\sum_{r,s,t}(hr+ks-(h+k)t)^2 x_r x_s x_t \mp \tfrac{1}{2}\sum_{r,s,t}(hr+ks-(h+k)t)x_r x_s x_t, \qquad (r,s,t=0,1,\dots n-1)$$

und zwar erscheint das obere Zeichen des zweiten Theiles dieses Ausdrucks auf der linken Seite, das untere auf der rechten Seite der Congruenz. Eben dieser zweite Theil ist aber identisch Null, jene beiden Summen ($N.$), ($N'.$) sind also für das Modulsystem $(n, (w-1)^3)$ einander congruent, und an Stelle dieses Modulsystems tritt für $w=\omega$ der einfache Modul $(\omega-1)^3$, da n durch $(\omega-1)^3$ theilbar ist.

II.

So wie hier die in der Congruenz ($\bar{J}.$) dargelegte Eigenschaft der complexen Zahlen $\psi(\omega)$ aus ihrer ***ursprünglichen*** Definition durch die Gleichung ($C.$), nicht wie bei Herrn *Schwering* aus jener zweiten, in der Gleichung (6.) des vorstehenden Aufsatzes enthaltenen Definition abgeleitet worden ist, so ergiebt sich auch die Reduction der Functionen $\psi_{h,k}$ auf den sechsten Theil ganz unmittelbar aus jener Gleichung ($C.$). Diese Reduction beruht ebenso wie die Vereinfachung der Congruenz ($\bar{E}.$) auf jener schon oben hervorgehobenen Eigenschaft, dass das Product $\varpi_h \varpi_{-h}$ für alle $n-1$ Indices h denselben Werth hat, und ist also auf alle Abelschen Gleichungen anwendbar, welche jene Eigenschaft besitzen. Ist nämlich, wie oben,

$$(P.)\qquad \psi'_{h,k} = \frac{\varpi'_h \varpi'_k}{\varpi'_{h+k}}, \quad \varpi'_h \varpi'_{-h} = \varpi'_k \varpi'_{-k} \qquad (h,k=1,2,\dots n-1),$$

so ist unmittelbar ersichtlich, dass die sechs Ausdrücke

$$\psi'_{h,k},\quad \psi'_{k,h},\quad \psi'_{h,-h-k},\quad \psi'_{k,-h-k},\quad \psi'_{-h-k,h},\quad \psi'_{-h-k,k}$$

mit einander übereinstimmen. Dies findet sich schon in dem Heft *Jacobi*scher Vorlesungen aus dem Jahre 1836, welches in der Vorrede des *Bachmann*schen Werkes über die Kreistheilung erwähnt ist. *Jacobi* wendet darin folgende Bezeichnungen an:

$$(\alpha, x) = \sum_k \alpha^k x^{g^k}, \quad \psi_h(\alpha) = \frac{(\alpha, x)(\alpha^h, x)}{(\alpha^{h+1}, x)} \qquad \binom{h=0,\,1,\,2,\,\ldots\,\lambda-2}{k=0,\,1,\,2,\,\ldots\,p-2},$$

wo x eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit, α eine primitive λ^{te} Wurzel der Einheit, g eine primitive Congruenzwurzel der Primzahl p und λ einen Primfactor von $p-1$ bedeutet; er geht genau auf die Bedingungen ein, unter denen einige von den sechs verschiedenen Index-Systemen der in ihrem Werthe übereinstimmenden ψ-Functionen mit einander identisch werden, und formulirt das Endresultat in folgender Weise:

„Die Anzahl der zu bildenden Functionen (ψ) ist gleich der ganzen Zahl, welche nur um einen echten Bruch grösser ist als $\frac{1}{6}\lambda$."

Hierbei bedeutet λ diejenige Zahl, welche oben mit n bezeichnet worden ist. Dass sich die Functionen ψ „immer unmittelbar auf den sechsten Theil zurückführen lassen" hat *Jacobi* mit eben diesen Worten auch in seiner im Monatsbericht der Berliner Akademie vom October 1837 abgedruckten Mittheilung (S. 132)*) angegeben. In der Note, welche diese Angabe enthält, fügt *Jacobi* hinzu: „Ich habe sogar durch eine bis $\mu = 31$**) fortgesetzte Induction gefunden, dass sich alle Functionen ψ immer durch die Werthe einer einzigen ausdrücken lassen". Bezüglich dieser Frage enthält aber die XVII^{te} der oben angeführten *Jacobi*schen Vorlesungen in der mir vorliegenden Nachschrift die folgende *ausführlichere* Darlegung: „Wir haben in der XV^{ten} Vorlesung gesehen, dass man die Anzahl der zu bildenden Functionen ψ immer auf den sechsten Theil reduciren kann. Diese Reductionen sind die einzigen, die *unmittelbar* eine Function auf die andere zurückführen, indem man nur statt α eine andere Wurzel setzt. Man kann aber, wenn man sich bloss die Aufgabe stellt, eine Function ψ vermittelst der anderen auszudrücken, noch ganz andere Relationen angeben, durch welche man aus einer Function die andere erhält, indem man in ihr für α andere Wurzeln setzt und mehrere dieser Ausdrücke mit einander multiplicirt. Im Allgemeinen erhält man aus einer Function $\psi(\alpha)$ die $\lambda-1$ Functionen

$$\psi(\alpha), \quad \psi(\alpha^2), \quad \psi(\alpha^3), \quad \ldots \quad \psi(\alpha^{\lambda-1}),$$

und durch Multiplication einiger dieser Functionen wird man wieder auf Functionen ψ kommen können. Es ist jedoch sehr schwer, das allgemeine Verfahren anzugeben, indem jede Primzahl λ hier als ein Individuum auf-

*) Vgl. auch dieses Journal Bd. 30 S. 170.

**) Mit μ ist hier diejenige Zahl bezeichnet, für welche *Jacobi* in seinen Vorlesungen den Buchstaben λ gebraucht hat.

tritt, für das bis jetzt ganz besondere Verfahrungsarten angewendet werden müssen. Ich habe daher früher auch eine ziemlich weit getriebene Induction angewendet und den Satz nicht allgemein, sondern nur für die einzelnen Primzahlen bis 31 bewiesen. Man gelangt hierbei zu sehr merkwürdigen Ausdrücken für die Grössen unter dem Wurzelzeichen, welche Producte aus den verschiedenen Werthen einer Function ψ werden, die durch die Natur der Primzahl bestimmt ist. Eine hierzu dienende Formel ist z. B. diejenige, mittels deren man das Product zweier Functionen ψ durch das Product von zwei anderen ausdrücken kann". *Jacobi* leitet hierauf einen Satz ab, welcher bei der oben in (*C.*) definirten Bezeichnung sich dahin formuliren lässt, dass das Product

$$\psi_{h,k}\,\psi_{h+k,l}$$

bei beliebiger Vertauschung der drei Indices h, k, l ungeändert bleibt. Diesen Satz, dessen Inhalt in Evidenz tritt, wenn das Product $\psi_{h,k}\psi_{h+k,l}$ durch Einführung der Ausdrücke (α, x) oder ϖ in den Quotienten

$$\frac{(\alpha^h, x)(\alpha^k, x)(\alpha^l, x)}{(\alpha^{h+k+l}, x)} \quad \text{oder} \quad \frac{\varpi_h \varpi_k \varpi_l}{\varpi_{h+k+l}}$$

transformirt wird, benutzt *Jacobi* im Verfolg seiner Vorlesungen, um für eine Reihe von Primzahlen λ zu der von ihm erstrebten Darstellung des Ausdrucks ϖ durch eine einzige der Functionen ψ zu gelangen. Er leitet die Entwickelung mit der Bemerkung ein, dass die allgemeine Theorie mit grossen Schwierigkeiten verbunden und es daher rathsam sei, die Darstellungsweise erst an einigen Beispielen zu versuchen, und er gelangt alsdann durch Combination der zwischen den verschiedenen ψ-Functionen bestehenden Relationen zu den Formeln:

$$(\alpha, x)^3 = p\,\psi_1(\alpha^2),$$
$$(\alpha, x)^5 = p\,\psi_1(\alpha^3)\,\psi_1^2(\alpha),$$
$$(\alpha, x)^7 = \psi_1(\alpha^4)\,\psi_1^2(\alpha^2)\,\psi_1^4(\alpha),$$
$$(\alpha, x)^{11} = \frac{1}{p^3}\,\psi_2(\alpha^2)\,\psi_2^2(\alpha)\,\psi_2^3(\alpha^8)\,\psi_2^4(\alpha^6)\,\psi_2^5(\alpha^7),$$
$$(\alpha, x)^{13} = \frac{1}{p^4}\,\psi_2(\alpha^3)\,\psi_2^2(\alpha^8)\,\psi_2^3(\alpha)\,\psi_2^4(\alpha^4)\,\psi_2^5(\alpha^{11})\,\psi_2^6(\alpha^7),$$
$$(\alpha, x)^{17} = \frac{1}{p^{11}}\,\psi_3(\alpha^6)\,\psi_3^2(\alpha^3)\,\psi_3^3(\alpha^2)\,\psi_3^4(\alpha^{10})\,\psi_3^5(\alpha^8)\,\psi_3^6(\alpha)\,\psi_3^{10}(\alpha^4)\,\psi_3^8(\alpha^5),$$
$$(\alpha, x)^{19} = \frac{1}{p^{13}}\,\psi_2(\alpha^4)\,\psi_2^2(\alpha^2)\,\psi_2^3(\alpha^{14})\,\psi_2^4(\alpha)\,\psi_2^5(\alpha^{16})\,\psi_2^6(\alpha^7)\,\psi_2^7(\alpha^6)\,\psi_2^8(\alpha^{10})\,\psi_2^9(\alpha^{11}),$$
$$(\alpha, x)^{23} = \frac{1}{p^{23}}\,\psi_3(\alpha^3)\,\psi_3^2(\alpha^{13})\,\psi_3^3(\alpha)\,\psi_3^4(\alpha^{18})\,\psi_3^5(\alpha^{19})\,\psi_3^6(\alpha^{12})\,\psi_3^7(\alpha^7)\,\psi_3^8(\alpha^9)\,\psi_3^9(\alpha^8)\,\psi_3^{10}(\alpha^{17})\,\psi_3^{13}(\alpha^2).$$

Jacobi hat auf diese Weise in der That für die ersten acht ungeraden Primzahlen λ den Werth von $(\alpha, x)^\lambda$ durch Producte

$$\Pi\psi^p(\alpha^q),$$

wo $\psi^p(\alpha^q)$ die p^{te} Potenz von $\psi(\alpha^q)$ bedeutet, also durch Producte ***conjugirter*** ψ-Functionen ausgedrückt; dabei hebt er als bemerkenswerthe Eigenschaften dieser Producte hervor, dass für die verschiedenen Factoren $\psi^p(\alpha^q)$ der Congruenzwerth von $p.q$ (mod. λ) derselbe bleibt, und dass die Einrichtung der Producte erkennen lasse, wie die verschiedenen Wurzelgrössen, welche bei der Berechnung der conjugirten Werthe (α, x), (α^2, x), (α^3, x), ... auftreten, durch einander bestimmt werden. Hiermit ist gemeint, dass z. B. für $\lambda = 7$ die Wurzelausdrücke

$$(\alpha, x) = \sqrt[7]{\psi_1(\alpha^4)\psi_1^2(\alpha^2)\psi_1^4(\alpha)}, \quad (\alpha^2, x) = \sqrt[7]{\psi_1(\alpha)\psi_1^2(\alpha^4)\psi_1^4(\alpha^2)}$$

so eingerichtet sind, dass das Verhältniss $(\alpha, x)^2 : (\alpha^2, x)$ gleich $\sqrt[7]{\psi_1^7(\alpha)}$ und demnach das Wurzelzeichen durch die Bedingung: $(\alpha, x)^2 = \psi_1(\alpha)(\alpha^2, x)$ bestimmt wird. *Jacobi* macht ausserdem die Bemerkung, dass für die Zahlen $\lambda = 3, 5, 11, 13, 19$ die Exponenten der conjugirten Functionen ψ die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ bilden, und er entwickelt die Bedingungen, unter denen eine *solche* Darstellung von $(\alpha, x)^\lambda$ möglich ist, ohne jedoch die Frage allgemein zu untersuchen, ob überhaupt — wie er offenbar vermuthet hat — für alle Primzahlen λ der Ausdruck $(\alpha, x)^\lambda$ als Product conjugirter ψ-Functionen darstellbar ist.

Es sind, wie ich glaube, diese hier mitgetheilten weiteren, die Reduction der ψ-Functionen betreffenden Entwickelungen in den *Jacobi*schen Vorlesungen — nicht aber jene einfachen und kurzen Bemerkungen über die Reduction der Anzahl der ψ-Functionen auf den sechsten Theil — welche in der von Herrn *Schwering* citirten Stelle des *Bachmann*schen Werkes*) gemeint sind, wo es heisst: „die ψ-Functionen können sogar auf eine noch geringere Anzahl reducirt und die Rechnung dadurch vereinfacht werden. Indessen scheint es mir nicht angezeigt, diese feineren Untersuchungen *Jacobi*s hier zu reproduciren".

Die Frage der Reduction der ψ-Functionen, mit welcher sich *Jacobi* eingehend beschäftigt hat, kann in sehr einfacher und eleganter Weise mit Hülfe derjenigen Mittel behandelt werden, welche ich in meiner Dissertation

*) *Bachmann*, die Lehre von der Kreistheilung, S. 92.

über die complexen Einheiten angewendet habe (vgl. S. 3 dieses Bandes oder S. 125 meiner Festschrift zu Herrn *Kummers* Doctor-Jubiläum). Ist nämlich n Primzahl und γ eine primitive Congruenzwurzel derselben, so sucht *Jacobi* eine der $n-1$ Functionen

$$\psi_{1,\gamma^m} \qquad (m=0,1,\dots n-2),$$

für welche sich ϖ^n als Product von Potenzen der conjugirten Functionen

$$\psi_{t,t\gamma^m} \qquad (t=1,2,\dots n-1),$$

und der $n-1$ ebenfalls mit einander conjugirten Ausdrücke

$$\varpi_t \varpi_{-t} \qquad (t=1,2,\dots n-1)$$

darstellen lässt, dass also eine Gleichung

$$(Q.) \qquad \varpi_t^n = \prod_h \psi_{t\gamma^h, t\gamma^{h+m}}^{r_h} \prod_k \varpi_{t\gamma^k}^{s_k} \varpi_{-t\gamma^k}^{s_k} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h,\, k=0,1,\dots n-2 \\ t=1,2,\dots n-1 \end{smallmatrix}\right)$$

besteht, in welcher die Exponenten r und s ganze Zahlen bedeuten. Es macht hierbei keinen Unterschied, ob unter ϖ_h der *allgemeine* Ausdruck

$$\sum_r \omega^{hr} x_r \qquad (r=0,1,\dots n-1)$$

oder — wie bei der *Jacobi*schen Frage selbst — der besondere verstanden wird, welcher entsteht, wenn man darin

$$x_r = x^{g^r} \qquad (r=0,1,\dots n-1)$$

und für x eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit setzt; nur dass in diesem speciellen Falle das zweite Product auf der rechten Seite der Gleichung ($Q.$) sich auf eine ganze (positive oder negative) Potenz der Primzahl p reducirt. *Jacobi* stellt überdies, wie oben auseinandergesetzt worden ist, an jene in der Gleichung ($Q.$) enthaltene Darstellung von ϖ^n die Anforderung, dass sie „erkennen lasse", welche der n^{ten} Wurzeln den verschiedenen conjugirten Werthen ϖ_t zukommen, d. h. dass bei einer solchen Darstellung das Verhältniss $\varpi_{t\gamma}^n : \varpi_t^{n\gamma}$ durch vollständige n^{te} Potenzen der ψ-Functionen ausgedrückt erscheine. Hiernach müssen die Exponenten r_h, da in $\varpi_{t\gamma}^n$ das erste Product rechts:

$$\prod_h \psi_{t\gamma^{h+1}, t\gamma^{h+m+1}}^{r_h} \quad \text{oder} \quad \prod_h \psi_{t\gamma^h, t\gamma^{h+m}}^{r_{h-1}} \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

wird, den Congruenzbedingungen

$$(R^0.) \qquad \gamma r_h \equiv r_{h-1} \pmod{n} \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

genügen. — Setzt man in der Gleichung ($Q.$) an Stelle der Functionen ψ ihre Ausdrücke durch die Functionen ϖ, so kommt:

$$(Q'.) \qquad \varpi_t^n = \prod_h \varpi_{t\gamma^h}^{r_h} \varpi_{t\gamma^{h+m}}^{r_h} \varpi_{t\gamma^{h+t}}^{-r_h} \prod_k \varpi_{t\gamma^k}^{s_k} \varpi_{-t\gamma^k}^{s_k} \qquad \left(\begin{smallmatrix} h,\, k=0,1,\dots n-2 \\ t=1,2,\dots n-1 \end{smallmatrix}\right),$$

wenn die Zahl l durch die Congruenz:

$$\gamma^l \equiv 1+\gamma^m \pmod{n} \quad \text{oder} \quad l \equiv \operatorname{ind.}(1+\gamma^m) \pmod{(n-1)}$$

bestimmt wird. Die Exponenten r und s sind hiernach, abgesehen von den Congruenzbedingungen $(R^0.)$, einzig und allein durch die Bedingungen:

$$(R.) \qquad r_h - r_{h-l} + r_{h-m} + s_h + s_{h-\nu} = n\delta_{0h} \qquad (h=0,\,1,\,\ldots\,n-2)$$

bestimmt, wenn

$$\nu = \tfrac{1}{2}(n-1), \quad \delta_{0h} = 0 \text{ für } h>0, \quad \delta_{00} = 1$$

ist, und wenn sowohl die Exponenten r als auch die Exponenten s, deren Indices sich nur durch ganze Vielfache von n unterscheiden, als identisch gelten, so dass für jede Zahl k

$$r_k = r_{k+n}, \quad s_k = s_{k+n}$$

ist. Bedeutet nun ζ irgend eine primitive $(n-1)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit und multiplicirt man die Gleichung $(R.)$ mit ζ^{hk} und summirt alsdann über alle Zahlen $k=0,\,1,\,\ldots\,n-2$, so erhält man die Gleichung:

$$\sum_h (r_h - r_{h-l} + r_{h-m})\zeta^{hk} + \sum_h (s_h + s_{h-\nu})\zeta^{hk} = n \qquad (h,\,k=0,\,1,\,\ldots\,n-2),$$

welche unmittelbar in folgende zu transformiren ist:

$$(1-\zeta^{kl}+\zeta^{km})\sum_h r_h\zeta^{hk} + (1+\zeta^{\nu k})\sum_h s_h\zeta^{hk} = n \qquad (h,\,k=0,\,1,\,\ldots\,n-2);$$

diese liefert, da $\zeta^\nu = -1$ ist, für ungerade Zahlen k die Bedingungsgleichung:

$$(R'.) \qquad (1-\zeta^{kl}+\zeta^{km})\sum_h r_h\zeta^{hk} = n \qquad \binom{h=0,\,1,\,\ldots\ldots\,n-2}{k=1,\,3,\,5,\,\ldots\,n-2},$$

und also, wenn unter z eine Variable verstanden wird, die Congruenzbedingung:

$$(1-z^l+z^m)\sum_h r_h z^h + (1+z^\nu)\sum_h s_h z^h \equiv n \pmod{(z^{n-1}-1)} \qquad (h=0,\,1,\,\ldots\,n-2).$$

Da $n-1 = 2\nu$ ist, so enthält diese Congruenzbedingung die folgende:

$$(R''.) \qquad (1-z^l+z^m)\sum_h r_h z^h \equiv n \pmod{(z^\nu+1)} \qquad (h=0,\,1,\,\ldots\,n-2),$$

welche aber zugleich *hinreichend* ist; denn, wenn $\sum_h r_h z^h$ dieser Congruenz und also einer Gleichung

$$(1-z^l+z^m)\sum_h r_h z^h = n + (1+z^\nu)\Phi(z) \qquad (h=0,\,1,\,\ldots\,n-2)$$

genügt, so werden die Zahlen s durch die Congruenz

$$\sum_h s_h z^h \equiv -\Phi(z) \pmod{(z^\nu-1)} \qquad (h=0,\,1,\,\ldots\,n-2)$$

bestimmt. Die Gleichung $(R'.)$ oder die damit vollständig äquivalente Congruenz $(R''.)$ bildet also zusammen mit den Congruenzen $(R^0.)$ die noth-

wendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der oben bezeichneten *Jacobi*schen Aufgabe.

Die Congruenzbedingungen $(R^0.)$ lassen sich in die folgenden transformiren:

$$r_h \equiv \gamma^{-h} r_0 \pmod{n} \qquad (h=1,2,\dots n-2),$$

welche zeigen, dass

$$\sum_h r_h \zeta^h \equiv r_0 \sum_h \gamma^{-h} \zeta^h \pmod{n} \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

sein muss. Da hiernach für das Divisoren-System (vgl. Bd. 92 S. 72)

$$(n,\ \gamma - \zeta^k)$$

die Congruenz

$$\sum_h r_h \zeta^h \equiv r_0 \sum_h \zeta^{h(1-k)} \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

und also, falls $k > 1$ ist, die Congruenz

$$\sum_h r_h \zeta^h \equiv 0 \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

bestehen muss, so folgt, dass die complexe Zahl $\sum_h r_h \zeta^h$ durch jeden der „algebraischen Divisoren“ *)

$$\operatorname{div}[nu + \gamma - \zeta^k] \qquad (k=2,3,\dots n-2)$$

theilbar sein muss. Nimmt man für k nur Zahlen, die kleiner als $n-1$ und zu $n-1$ relativ prim sind, so repräsentiren die verschiedenen algebraischen Divisoren $\operatorname{div}[nu+\gamma-\zeta^k]$ die sämmtlichen conjugirten oder verbundenen Primtheiler von n in der Theorie der aus *primitiven* Wurzeln der Einheit ζ gebildeten complexen Zahlen, so dass das über alle Zahlen k erstreckte Product

$$\prod_k \operatorname{div}[nu+\gamma-\zeta^k]$$

der Primzahl n absolut äquivalent wird. Da nun für $k > 1$ die Congruenz

$$\sum_h r_h \zeta^h \equiv 0 \pmod{[nu+\gamma-\zeta^k]} \qquad (h=0,1,\dots n-2),$$

also für *alle* Werthe von k die Congruenz

$$\operatorname{div}[nu+\gamma-\zeta].\sum_h r_h \zeta^h \equiv 0 \pmod{[nu+\gamma-\zeta^k]} \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

besteht, so muss das Product auf der linken Seite dieser Congruenz durch das Product aller conjugirten Primtheiler $\operatorname{div}[nu+\gamma-\zeta^k]$, d. h. also durch die Primzahl n theilbar sein. Mit Benutzung der Gleichung $(R'.)$ kommt daher:

$$\operatorname{div}[nu+\gamma-\zeta].\sum_h r_h \zeta^h \equiv 0 \pmod{.(1-\zeta^l+\zeta^m)\sum_h r_h \zeta^h} \qquad (h=0,1,\dots n-2)$$

---

*) Vgl. § 15 meiner Arbeit im 92. Bande dieses Journals.

oder
$$\mathrm{div}[nu+\gamma-\zeta] \equiv 0 \pmod{1-\zeta^l+\zeta^m}.$$
Andererseits ist aber:
$$1-\zeta^l+\zeta^m \equiv 1-\gamma^l+\gamma^m \pmod{\gamma-\zeta},$$
$$1-\gamma^l+\gamma^m \equiv 0 \pmod{n}$$
und also:
$$1-\zeta^l+\zeta^m \equiv 0 \pmod{[nu+\gamma-\zeta]}.$$
Es muss daher
$$1-\zeta^l+\zeta^m \sim \mathrm{div}[nu+\gamma-\zeta],$$
d. h. es muss die complexe Zahl $1-\zeta^l+\zeta^m$ selbst ein Primtheiler von n und also
$$(S.) \qquad \mathrm{Nm}(1-\zeta^l+\zeta^m) = n$$
sein, wenn die Norm das Product aller derjenigen complexen Zahlen $1-\zeta^l+\zeta^m$ bedeutet, in welchen ζ irgend eine *primitive* $(n-1)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit ist.

Die für die Lösbarkeit der *Jacobi*schen Aufgabe erforderliche, aber nicht ausreichende Bedingung (*S.*) ist für alle Primzahlen $n=3, 5, 7, \ldots$ bis $n=43$ erfüllt; für $n=47$ aber *nicht.* In diesem letzteren Falle ist nämlich $-\zeta$ eine primitive 23ste Wurzel der Einheit, und die Zahl 47 ist nicht als Norm einer aus 23sten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahl darstellbar; es giebt also überhaupt keine complexe Zahl, welche der *Primform* $nu-2-\zeta$ oder dem algebraischen Primtheiler $\mathrm{div}[nu-2-\zeta]$ äquivalent wäre, welche also die für eine der complexen Zahlen $1-\zeta^l+\zeta^m$ verlangte Bedingung erfüllte*). Wenn aber von der *zweiten* durch die Congruenzbedingungen $(R^0.)$ ausgedrückten *Jacobi*schen Forderung abgesehen wird, so ist die Aufgabe auch für $n=47$ noch lösbar, d. h. es lässt sich auch in diesem Falle noch ϖ^ν als Product von Potenzen conjugirter ψ-Functionen darstellen. Hierfür ist nämlich die in der Gleichung $(R'.)$ oder in der Congruenz $(R''.)$ ausgedrückte Bedingung einzig massgebend, und es soll deren Inhalt nunmehr näher dargelegt werden.

Da die Congruenz $(R''.)$ für sich, d. h. abgesehen von den jetzt bei Seite zu lassenden Congruenzbedingungen $(R^0.)$, ganz beliebige ganzzahlige Werthe der Coefficienten r gestattet, so kann dieselbe, unter Anwendung der in meiner Arbeit (im 92. Bande dieses Journals) eingeführten Divisoren-

*) Es ist hier die primitive Wurzel -2 für γ genommen.

Systeme höherer Stufen, einfach durch die Congruenz:

$$(T.) \quad n \equiv 0 \ (\text{modd.}\, 1-z^l+z^m,\ 1+z^\nu)$$

dargestellt werden, in welcher $(1-z^l+z^m,\ 1+z^\nu)$ ein Divisoren-System zweiter Stufe ist. Dieses Divisoren-System ist in Factoren zerlegbar, welche den einzelnen irreductibeln Factoren von $1+z^\nu$ entsprechen. Sind nämlich $F(z)$ und $G(z)$ zwei Divisoren von $1+z^\nu$, die mit einander keinen gemeinsamen Theiler (erster Stufe) haben, so ist das Modulsystem

$$(1-z^l+z^m,\ F(z).G(z))$$

aus den beiden Modulsystemen

$$(1-z^l+z^m,\ F(z)),\quad (1-z^l+z^m,\ G(z))$$

zusammengesetzt*), da bei der Multiplication der Elemente dieser beiden Modulsysteme zuvörderst das System

$$((1-z^l+z^m)^2,\ (1-z^l+z^m)F(z),\ (1-z^l+z^m)G(z),\ F(z).G(z))$$

resultirt und aber die in den drei ersten Elementen mit $(1-z^l+z^m)$ multiplicirten Functionen

$$1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z)$$

ein Modulsystem bilden, welches äquivalent *Eins* und daher kein Modulsystem im eigentlichen Sinne des Wortes ist. Um dies näher darzulegen, hebe ich zuvörderst hervor, dass die Eliminationsresultante von $F(z)$ und $G(z)$, als homogene lineare Function derselben, dem Modulsystem $(F(z), G(z))$ als ferneres Element hinzugefügt werden kann. Diese Resultante wird durch das Product aller Factoren $(\zeta^h-\zeta^k)$ dargestellt, welche man erhält, wenn man für ζ^h alle Wurzeln der Gleichung $F(z)=0$ und für ζ^k alle diejenigen der Gleichung $G(z)=0$ setzt; ihr Werth ist eine ganze Zahl d, und da sie durch ein Product

$$\pm \prod_{h,k}(1-\zeta^{h-k}) \quad \text{oder} \quad \pm \prod_{h,k}\left(1-e^{\frac{(h-k)\pi i}{\nu}}\right)$$

*) Vgl. Bd. 92 dieses Journals, S. 78, V. Es kann übrigens an der bezeichneten Stelle hinzugefügt werden, dass ein Modulsystem $(M.M', M_1, M_2, \ldots)$ auch dann aus den beiden Systemen $(M, M_1, M_2, \ldots)$, $(M', M_1, M_2, \ldots)$ zusammengesetzt ist, wenn das Modulsystem $(M, M', M_1, M_2, \ldots) \sim 1$ ist; denn das componirte System ist aus den Elementen

$$M.M',\ M.M_1,\ M.M_2,\ \ldots,\quad M'.M_1,\ M'.M_2,\ \ldots,\quad M_1.M_1,\ M_1.M_2,\ \ldots$$

zu bilden, und für jeden Werth $h=1, 2, \ldots$ können die Elemente $M.M_h$, $M'.M_h$, $M_1.M_h$, $M_2.M_h$, ... durch das einzige Element M_h ersetzt werden, weil das aus den damit multiplicirten Elementen gebildete System der gemachten Voraussetzung gemäss äquivalent Eins ist.

gegeben ist, so kann sie nur ein Divisor von ν sein. Es mag hier beiläufig bemerkt werden, dass, wenn dieser Divisor d von Eins verschieden ist, die Functionen $F(z)$ und $G(z)$ ein Divisoren-System zweiter Stufe gemein haben; so ist z. B.

$$1+z^3+z^6 = (1+z+z^2)(-2+2z-z^3+z^4)+3,$$

also

$$1+z^3+z^6 \equiv 0 \ (\text{modd.}\, 1+z+z^2,\ 3),$$

und das hier auftretende Modulsystem *zweiter* Stufe $(1+z+z^2,\ 3)$ ist daher in den *beiden* Functionen $1+z+z^2$, $1+z^3+z^6$ zugleich enthalten, wenn dieselben auch keinen Divisor *erster* Stufe gemein haben. — Nach vorstehender Darlegung findet nun die Aequivalenz

$$(1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z)) \sim (1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z),\ d)$$

statt, und da auf Grund der Congruenz $(T.)$ die Zahl n die *beiden* Modulsysteme

$$(1-z^l+z^m,\ F(z)),\quad (1-z^l+z^m,\ G(z))$$

und demnach auch das den beiden gemeinsame Modulsystem

$$(1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z)),$$

also auch das diesem äquivalente

$$(1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z),\ d)$$

enthalten muss, so kann eben diesem Modulsystem die Zahl n als Element hinzugefügt werden*). Alsdann kommen aber die beiden Zahlen d und n als Elemente vor, und da d ein Theiler von ν und also von $n-1$ ist, so ist schon das Modulsystem (d, n) und daher auch das Modulsystem

$$(1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z))$$

äquivalent Eins. Hieraus folgt aber, dass in der That, wie oben behauptet worden, das System

$$(1-z^l+z^m,\ F(z).G(z))$$

aus den beiden Modulsystemen

$$(1-z^l+z^m,\ F(z)),\quad (1-z^l+z^m,\ G(z))$$

componirt ist. Führt man, wie im § 22 meiner im 92. Bande dieses Journals abgedruckten Arbeit, an Stelle der Divisoren-Systeme die *„Formen"* mit „Unbestimmten" $u, u', \ldots$ ein, so besagt die Congruenz $(T.)$,

---

*) Vgl. Bd. 92 dieses Journals, S. 77, III.

dass die Form zweiter Stufe $(1-z^l+z^m)u+1+z^\nu$ in der Zahl n enthalten sein muss*).

Hiernach muss, wenn $F(z)$, wie oben, einen Divisor von $1+z^\nu$ bedeutet, auch die Form

$$(1-z^l+z^m)u+F(z)$$

in der Zahl n enthalten sein, und andererseits ist, wenn die beiden Formen

$$(1-z^l+z^m)u+F(z),\quad (1-z^l+z^m)u+G(z)$$

in n enthalten sind, nothwendig auch die aus beiden componirte Form

$$(1-z^l+z^m)u+F(z).G(z)$$

in der Zahl n enthalten. Da nämlich, wie oben dargelegt worden, das Modulsystem

$$(1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z))$$

äquivalent Eins ist, so haben jene beiden Formen keine andere mit einander gemein, und das Enthalten-Sein jeder einzelnen hat darum das des Products zur Folge. Um dies aber hier ohne Bezugnahme auf meine mehrfach erwähnte Arbeit nachzuweisen, seien $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ ganzzahlige Functionen, welche die für die Aequivalenz

$$(1-z^l+z^m,\ F(z),\ G(z)) \sim 1$$

erforderliche Gleichung

$$(1-z^l+z^m)P(z)+F(z)Q(z)+G(z)R(z) = 1$$

erfüllen. Es seien ferner $\Phi(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Psi(z)$, $\Psi_1(z)$ ganzzahlige Functionen, welche die den Congruenzen

$$n\equiv 0 \ (\text{modd. } 1-z^l+z^m,\ F(z)),\quad n\equiv 0 \ (\text{modd. } 1-z^l+z^m,\ G(z))$$

entsprechenden Gleichungen

$$n=(1-z^l+z^m)\Phi(z)+F(z)\Phi_1(z),\quad n=(1-z^l+z^m)\Psi(z)+G(z)\Psi_1(z)$$

befriedigen. Alsdann findet die Gleichung

$$n=(1-z^l+z^m)(G(z)R(z)\Phi(z)+F(z)Q(z)\Psi(z)+nP(z))+F(z)G(z)(R(z)\Phi_1(z)+Q(z)\Psi_1(z))$$

statt, welche sich durch die Congruenz

$$n \equiv 0 \ (\text{modd. } 1-z^l+z^m,\ F(z).G(z))$$

darstellen lässt und welche zeigt, dass in der That die Form

$$(1-z^l+z^m)u+F(z).G(z)$$

*) Vgl. Bd. 92 dieses Journals, S. 85, I. und S. 91, IX°.

in der Zahl n enthalten ist. Die Congruenz ($T.$) kann demnach durch die Congruenz

$$(T^0.) \quad n \equiv 0 \ (\text{modd.}\, 1-z^l+z^m,\ f_h(z)) \qquad (h=1,2,\ldots)$$

ersetzt werden, wenn darin $f_h(z)$ alle verschiedenen irreductiblen Factoren von $z^\nu+1$ repräsentirt, und die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass sich ϖ^n in der Form ($Q'.$) mit *irgend welchen* Exponenten r, d. h. ohne die beschränkenden Congruenzen ($R^0.$), darstellen lasse, können also auch dahin formulirt werden, dass es Zahlen l, m geben muss,

> für welche die sämmtlichen Formen zweiter Stufe $(1-z^l+z^m)u+f_h(z)$ in der Primzahl n enthalten sind, oder für welche die Primzahl n durch jede der complexen Zahlen
>
> $$1-\zeta^{kl}+\zeta^{km} \qquad (k=1,3,5,\ldots n-2)$$
>
> theilbar ist.

Die Werthe $\zeta, \zeta^3, \zeta^5, \ldots \zeta^{n-2}$ sind nämlich die ν verschiedenen Wurzeln der sämmtlichen Gleichungen $f_h(z)=0$, und es zeigt sich daher als Resultat der vorstehenden Entwickelung, dass die aus der Gleichung ($R'.$) unmittelbar als *nothwendige* Bedingungen folgenden Congruenzen

$$(T'.) \quad n \equiv 0 \ (\text{mod.}(1-\zeta^{kl}+\zeta^{km})) \qquad (k=1,3,5,\ldots n-2)$$

zugleich ein System von *hinreichenden* Bedingungen für die Darstellung ($Q'.$) bilden. Es sind also Eigenschaften der Zahl n in der Theorie der aus $(n-1)^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen oder also Eigenschaften von n im Rationalitäts-Bereich $[e^{\frac{2\pi i}{n-1}}]$ *), auf denen die Möglichkeit jener Darstellung der Kreistheilungs-Ausdrücke durch ψ-Functionen beruht, und darin liegt es, dass *Jacobi*, der in seinen Vorlesungen im Jahre 1836 die Theorie der complexen Zahlen des Bereichs $[e^{\frac{2\pi i}{n-1}}]$ noch nicht benutzen konnte, bei Aufsuchung jener Darstellung zu der schon oben citirten Aeusserung veranlasst wurde: „es sei sehr schwer ein allgemeines Verfahren anzugeben, indem jede Primzahl (n) hier als *Individuum* auftrete, für welches bis jetzt ganz besondere Verfahrungsarten angewendet werden müssten".

Um die obigen Ausführungen an einigen Beispielen zu erläutern, knüpfe ich zuvörderst an die auf S. 347 mitgetheilte *Jacobi*sche Darstellung

---

*) Vgl. Bd. 92 dieses Journals, S. 14.

von ϖ^{19} oder $(\alpha, x)^{19}$ an, so dass

$$n = 19, \quad \gamma = 2, \quad \psi_2(\alpha) = \varpi_1 \varpi_2 \varpi_3^{-1}, \quad m = 1, \quad l = 13, \quad \nu = 9$$

wird, da $2^{13} \equiv 3 \pmod{19}$ ist. Alsdann ist

$$(1 - z^{13} + z) \sum_h r_h z^h \equiv 19 \ (\mathrm{mod.}(z^9 + 1)),$$

wenn

$$(U.) \qquad \sum_h r_h z^h = 4 + 2z + z^2 + 5z^4 + 6z^6 + 3z^7 + 9z^{12} + 7z^{14} + 8z^{17}$$

genommen wird, und die hierdurch definirten Zahlen r bilden die Exponenten der conjugirten ψ-Functionen bei jenem *Jacobi*schen Ausdrucke. Hier ist also, wenn $-\zeta$ eine primitive neunte Wurzel der Einheit bedeutet,

$$19 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}(1 - \zeta^{13k} + \zeta^k)) \qquad (k = 1, 3, 5, \dots 17),$$

und diese Congruenz besteht für alle neun Werthe von k, wenn sie nur für $k = 1, 3, 9$ erfüllt ist. Für $k = 1$ ist nun $1 - \zeta^{13} + \zeta$ oder, was dasselbe ist, $1 + \zeta + \zeta^4$ in der That ein complexer Primfactor von 19 und erfüllt daher die obige Bedingung (*S.*), während sowohl für $k = 3$ als für $k = 9$

$$1 - \zeta^{13k} + \zeta^k = 1$$

wird. Die durch die Gleichung (*U.*) definirten Exponenten r genügen somit ***allen*** *Jacobi*schen Forderungen. Wird aber

$$n = 47, \quad \gamma = -2, \quad \nu = 23$$

genommen, so kann — wie schon oben dargelegt worden — den sämmtlichen *Jacobi*schen Forderungen nicht genügt werden, sondern nur insoweit, als von den Congruenzbedingungen (R''.) abgesehen wird. Jede ψ-Function, welche nach der *Jacobi*schen Bezeichnung den Index γ^m hat, d. h. also:

$$\psi_{\gamma^m} \quad \text{oder} \quad \varpi_1 \varpi_{\gamma^m} \varpi_{1+\gamma^m}^{-1}$$

wird durch die Zahl m oder auch durch die complexe Zahl

$$1 - \zeta^l + \zeta^m,$$

bei welcher l durch die Congruenz

$$1 - \gamma^l + \gamma^m \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, n)$$

bestimmt ist, vollkommen charakterisirt. Für je sechs dieser ψ-Functionen, welche nach der oben mitgetheilten *Jacobi*schen Bemerkung sich unmittelbar auf einander reduciren, sind die beiden Zahlen l, m beziehungsweise:

$$(l, m), \ (l-m, -m), \ (m+\nu, l+\nu), \ (m-l, -l-\nu), \ (-m+\nu, l-m+\nu), \ (-l, m-l-\nu);$$

es sind also die complexen Zahlen

$$1 - \zeta^l + \zeta^m, \ 1 - \zeta^{l-m} + \zeta^{-m}, \ 1 + \zeta^m - \zeta^l, \ 1 - \zeta^{m-l} - \zeta^{-l}, \ 1 + \zeta^{-m} - \zeta^{l-m}, \ 1 - \zeta^{-l} - \zeta^{m-l},$$

welche den sechs Functionen ψ entsprechen. Diese unterscheiden sich von einander theils gar nicht, theils nur durch einfache Einheiten ζ^m, $-\zeta^l$, ... Die *eine* complexe Zahl

$$1-\zeta^l+\zeta^m$$

ist daher für die sämmtlichen sechs auf einander zurückführbaren ψ-Functionen charakteristisch, und es ist für die Zahl l z. B. nur je einer von den sechs Werthen

$$l, \quad l-m, \quad m+\nu, \quad m-l, \quad -m-\nu, \quad -l$$

zu nehmen. Setzt man nun $\beta=-\zeta$, so dass für $n=47$ mit β eine primitive 23ste Wurzel der Einheit bezeichnet ist, so sind die einzig in Betracht kommenden acht Functionen ψ:

$$\frac{\varpi_1^2}{\varpi_2}, \quad \frac{\varpi_1\varpi_2}{\varpi_3}, \quad \frac{\varpi_1\varpi_3}{\varpi_4}, \quad \frac{\varpi_1\varpi_4}{\varpi_5}, \quad \frac{\varpi_1\varpi_5}{\varpi_6}; \quad \frac{\varpi_1\varpi_6}{\varpi_7}, \quad \frac{\varpi_1\varpi_9}{\varpi_{10}}, \quad \frac{\varpi_1\varpi_{10}}{\varpi_{11}}$$

beziehungsweise durch die complexen Zahlen

$$2-\beta,\ 1+\beta-\beta^{-4},\ 1+\beta^{-4}-\beta^2,\ 1+\beta^2+\beta^9,\ 1-\beta^9-\beta^{-3},\ 1+\beta^{-3}-\beta^{-11},\ 1+\beta^{-8}+\beta^{10},\ 1-\beta^{10}+\beta^{-6}$$

charakterisirt. Von diesen Zahlen sind die 2te und 6te, sowie auch die 4te und 7te mit einander conjugirt. Die 5te und 8te Zahl sind, abgesehen von einer einfachen Einheit, ebenfalls mit einander conjugirt, da

$$-\beta^3(1-\beta^9-\beta^{-3})=1-\beta^3+\beta^{12}=1-\beta^{-2.10}+\beta^{2.6}$$

ist. Da nun jede der acht complexen Zahlen den algebraischen Primtheiler

$$\text{div}\,[47u+2-\beta]$$

enthält, so enthalten jene sechs, d. h. die 2te, 4te, 5te, 6te, 7te und 8te der complexen Zahlen ausser $\text{div}[47u+2-\beta]$ noch einen der damit conjugirten Primtheiler. Die erste und dritte dagegen, nämlich $2-\beta$ und $1+\beta^{-4}+\beta^2$, enthalten *nur* $\text{div}[47u+2-\beta]$ und keinen der damit conjugirten Divisoren; diese beiden complexen Zahlen enthalten daher, da $\text{div}[47u+2-\beta]$ keiner complexen Zahl in β absolut äquivalent ist, noch algebraische Divisoren gewöhnlicher, von 47 *verschiedener* Primzahlen, und können also nicht, wie es die Congruenz (T'.) verlangt, als Theiler in der Zahl 47 enthalten sein. Die anderen sechs complexen Zahlen sind dagegen in der That Divisoren der Zahl 47, und jede derselben ist dem Producte von zwei conjugirten Primtheilern

$$\text{div}\,[47u+2-\beta]$$

absolut äquivalent. So ist z. B.

$$1+\beta-\beta^{-4} \sim \text{div}\,[47u+2-\beta].\text{div}\,[47u+2-\beta^{-8}],$$

da einerseits die complexe Zahl links durch jeden der beiden Primtheiler rechts theilbar ist, und da andererseits das Product der 11 conjugirten Zahlen

$$1+\beta^{h^2}-\beta^{-4h^2} \qquad (h=1,2,3,\dots 11)$$

gleich 47 ist, so dass die Zahl $1+\beta-\beta^{-4}$ nur Primtheiler von 47 und von diesen selbst nur zwei conjugirte enthalten kann. Da die Zahl $1+\beta-\beta^{-4}$ die ψ-Function $\varpi_1\varpi_2\varpi_3^{-1}$ charakterisirt, so ist die 47ste Potenz von ϖ mittels eben dieser ψ-Function in der Form $(Q.)$ darstellbar, ohne dass jedoch die Exponenten r darin die Congruenzen $(R''.)$ befriedigen.

Dass, wie *Jacobi* vermuthet zu haben scheint, die von ihm mit $(\alpha, x)^\lambda$ bezeichneten Kreistheilungs-Ausdrücke, *stets* als Producte conjugirter ψ-Functionen darstellbar sein sollten, ist nach den oben dafür gefundenen Bedingungen $(T'.)$ kaum anzunehmen; denn darnach müsste stets eine Zahl m existiren, für welche jede der complexen Zahlen

$$1+\zeta^{km}-\zeta^{k\,\mathrm{ind.}(1+g^m)} \qquad (k=1,3,\dots \lambda-2),$$

wo ζ eine Wurzel der Gleichung $\zeta^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}+1=0$ bedeutet, entweder eine complexe Einheit oder aber ein Product conjugirter algebraischer Primtheiler von λ ist. Ich habe jedoch noch für keinen Werth von λ feststellen können, dass diese Bedingungen nicht erfüllbar sind. Die erste Primzahl, welche in dieser Beziehung zur Untersuchung geeignet erscheint, ist $\lambda=83$. Indessen hat die von *Jacobi* erstrebte Darstellung von $(\alpha, x)^\lambda$, *ohne* jene Congruenzbedingungen $(R''.)$, keinerlei theoretischen Werth; und *mit* den bezeichneten Congruenzbedingungen ist — wie oben gezeigt worden — die Darstellung schon für $\lambda=47$ nicht mehr möglich. Wenn die Congruenzbedingungen $(R''.)$ erfüllbar sind, ist die für die Function ψ_{γ^m} charakteristische complexe Zahl $1-\zeta^i+\zeta^m$ ein complexer Primfactor der Primzahl n, welche bei *Jacobi* mit λ bezeichnet ist, und gerade auf dieser Eigenschaft, nicht auf der einfachen Bildung und Gestalt der ψ-Functionen, beruht ihre theoretische Bedeutung für die Kreistheilungs-Gleichungen wie für die *Abel*schen Gleichungen überhaupt. Tritt nämlich an die Stelle von $1-\zeta^i+\zeta^m$ irgend eine complexe Zahl

$$\sum_h q_h\zeta^h \qquad (h=0,1,\dots n-2),$$

für welche die Bedingungsgleichung $(R'.)$

$$\sum_h q_h\zeta^{hk}.\sum_h r_h\zeta^{hk} = n \qquad \left(\begin{matrix}h=0,1,\dots n-2\\ k=1,3,5,\dots n-2\end{matrix}\right)$$

erfüllt ist, während die Zahlen r_h den Congruenzbedingungen $(R''.)$ genügen, so ist genau so wie oben zu erschliessen, dass der Gleichung $(S.)$ gemäss

$$(S'.) \qquad Nm\sum_h q_h\zeta^h = n$$

sein muss. Eine solche complexe Zahl $\sum_h q_h \zeta^h$ charakterisirt alsdann einen Ausdruck Ψ_t, der sich durch die Gleichung

$$\Psi_t = \prod_h \varpi_{t\gamma^h}^{q_h}$$

bestimmt und die Eigenschaft hat, dass sich ϖ^n in der Form $(Q.)$ darstellen lässt, wenn darin an Stelle jener specielleren Functionen ψ diese allgemeineren Ψ gesetzt werden. Aber nicht bloss für den Fall, dass gemäss der Bedingung $(S'.)$ die Primzahl n sich als Norm einer complexen Zahl in ζ darstellen lässt, sondern ganz allgemein führt die obige Deduction, wenn darin an Stelle von $1-\zeta^l+\zeta^m$ *irgend eine* complexe Zahl in ζ genommen wird, zu Resultaten über die verschiedenen Arten der Darstellbarkeit von Wurzeln Abelscher Gleichungen, welche ich in einem anderen Aufsatze näher darlegen werde.

Für den Fall der Kreistheilung erlangt man mit Hülfe der ψ-Functionen, wie von *Jacobi* in seinen Vorlesungen hervorgehoben wird, eine zahlentheoretische Definition für die Coefficienten der oben mit ϖ^n bezeichneten Ausdrücke, welche auch zu deren Berechnung sehr geeignet erscheint. Aber wenn man zu Gunsten der Einfachheit der zahlentheoretischen Definition auf die Einfachheit der wirklichen Ausrechnung verzichtet, so ist es besser, den Werth des Kreistheilungs-Ausdrucks ϖ^n direct, d. h. ohne Vermittelung durch die ψ-Functionen darzustellen.

III.

Bezeichnet man, wie oben (I.), mit w eine Variable, mit x eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit und mit g eine primitive Congruenzwurzel von p, ist ferner n irgend ein Theiler von $p-1$ und ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit, so ist gemäss der obigen Formel $(A.)$, wenn darin $l=n$, $m=1$ genommen wird,

$$\Big(\sum_r w^r x^{g^r}\Big)^n \equiv p\sum_t c_t w^t \pmod{(w^n-1)} \qquad \binom{r=0,1,\dots p-2}{t=0,1,\dots n-1},$$

wo $c_0, c_1, \dots c_{n-1}$ ganze Zahlen bedeuten, und es sind eben diese ganzzahligen Coefficienten c, deren Bestimmung die Kreistheilung erfordert. Da nun, je nachdem k einen der Werthe $1, 2, \dots p-1$ oder den Werth p hat,

$$\sum_r w^r x^{kg^r} \equiv w^{n-\operatorname{ind.}k} \sum_r w^r x^{g^r} \quad \text{oder} \quad \equiv 0 \pmod{(w^n-1)} \qquad (r=0,1,\dots p-2)$$

ist, so wird

$$\sum_k \Big(\sum_r w^r x^{kg^r}\Big)^n \equiv (p-1)\Big(\sum_r w^r x^{g^r}\Big)^n \ (\text{mod.}(w^n-1)) \quad \begin{pmatrix} k=0,1,\dots p-1 \\ r=0,1,\dots p-2 \end{pmatrix},$$

und die $(n+1)$-fache Summe

$$\sum_k \sum_{r_1} \sum_{r_2} \cdots \sum_{r_n} w^{r_1+r_2+\cdots+r_n} x^{k(g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n})} \quad \begin{pmatrix} k=0,1,\dots p-1 \\ r_1, r_2, \dots r_n=0,1,\dots p-2 \end{pmatrix}$$

ist daher dem Ausdrucke

$$p(p-1)\sum_t c_t w^t \qquad (t=0,1,\dots n-1)$$

für den Modul (w^n-1) congruent. Die in Beziehung auf k allein ausgeführte Summation

$$\sum_k x^{k(g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n})} \qquad (k=0,1,\dots p-1)$$

liefert aber den Werth p oder *Null*, je nachdem $g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n}$ durch p theilbar ist oder nicht, und es wird daher

$$(V.) \qquad \sum_t c_t w^t \equiv \frac{1}{p-1} \sum_{r_1, r_2, \dots r_n} w^{r_1+r_2+\cdots+r_n} \ (\text{mod.}(w^n-1)) \qquad (t=0,1,\dots n-1),$$

wenn die Summation rechts auf alle Werthe $r_1, r_2, \dots r_n = 0, 1, \dots p-2$ erstreckt wird, welche die Congruenzbedingung

$$g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n} \equiv 0 \ (\text{mod.}p)$$

erfüllen. Setzt man ω^h an Stelle der Variabeln w, so werden die Coefficienten c *algebraisch* dadurch charakterisirt, dass für alle ganzzahligen Werthe von h die Gleichung

$$(x+\omega^h x^g+\omega^{2h}x^{g^2}+\cdots+\omega^{(p-2)h}x^{g^{p-2}})^n = p\sum_t c_t \omega^{ht} \qquad (t=0,1,\dots n-1)$$

besteht, und jeder dieser Coefficienten c_t wird auf Grund der Gleichung $(V.)$ in der elegantesten Weise rein ***arithmetisch als der*** $(p-1)^{te}$ ***Theil der Anzahl der modulo*** $(p-1)$ ***unter einander verschiedenen Werthsysteme*** $r_1, r_2, \dots r_n$ ***definirt, welche den beiden Congruenzen***

$$r_1+r_2+\cdots+r_n \equiv t \ (\text{mod.}n), \quad g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n} \equiv 0 \ (\text{mod.}p)$$

zugleich genügen. Dieselbe Definition lässt sich noch in etwas anderer Weise formuliren, wenn man an Stelle der Zahlen r die durch die Congruenzen $g^r \equiv s$ (mod.p) erklärten Zahlen s einführt. Alsdann hat man für $s_1, s_2, \dots s_n$ alle diejenigen von den Werthen 1, 2, ... $p-1$ zu nehmen, für welche die beiden Congruenzen

$$s_1 s_2 \dots s_n \equiv g^{t+hn}, \quad s_1+s_2+\cdots+s_n \equiv 0 \ (\text{mod.}p)$$

zugleich erfüllt sind, wenn h eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Unter-

scheidet man nun die sämmtlichen modulo p verschiedenen Zahlen nach den n Gruppen, von denen eine durch die n^{ten} Potenzreste gebildet wird, so wird der Werth von

$$(p-1)c_t \qquad (t=0, 1, \dots n-1)$$

einfach als *die Anzahl der nach dem Modul p verschiedenen Systeme von n Zahlen* $s_1, s_2, \dots s_n$ *definirt, deren Summe durch p theilbar ist, und deren Product zu der durch* g^t *bestimmten Gruppe von* $\frac{p-1}{n}$ *Zahlen gehört.* Endlich möge noch die Gleichung selbst, welche entsteht, wenn in ($V.$) die Variable w durch ω^h ersetzt wird, hier ausdrücklich hervorgehoben werden, nämlich die Gleichung:

$$(V^0.) \qquad (\sum_r \omega^{hr} x^{g^r})^n = \frac{p}{p-1} \sum_{r_1, r_2, \dots r_n} \omega^{h(r_1+r_2+\cdots+r_n)} \qquad (r=0, 1, \dots p-2),$$

in der die Summation rechts nur auf alle diejenigen Werthe $r_1, r_2, \dots r_n = 0, 1, \dots p-2$ zu erstrecken ist, welche die Congruenzbedingung

$$g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n} \equiv 0 \pmod{p}$$

erfüllen.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass bei der Zählung der verschiedenen Werthsysteme $r_1, r_2, \dots r_n$ und $s_1, s_2, \dots s_n$ z. B. die beiden Werthsysteme

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 2, \quad \dots; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 2, \quad \dots$$

als zwei verschiedene zu rechnen sind. Bezeichnet man nun mit m_k die Anzahl derjenigen Zahlen r, die gleich k sind, so gehen die beiden obigen Congruenzen

$$r_1+r_2+\cdots+r_n \equiv t \pmod{n}, \quad g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n} \equiv 0 \pmod{p}$$

in folgende über:

$$(W.) \qquad \sum_k k m_k \equiv t \pmod{n}, \quad \sum_k k m_{\text{ind.}(k+1)} \equiv -n \pmod{p}$$

mit den Bedingungen

$$\sum_k m_k \leqq n, \quad k = 1, 2, \dots p-2.$$

Denn jene Congruenz $g^{r_1}+g^{r_2}+\cdots+g^{r_n} \equiv 0 \pmod{p}$ ergiebt zuvörderst die folgende:

$$\sum_{h=0}^{h=p-2} m_h g^h \equiv 0 \quad \text{oder} \quad n+\sum_{h=1}^{h=p-2} m_h (g^h-1) \equiv 0 \pmod{p},$$

da $n = m_0+m_1+\cdots+m_{p-2}$ ist, und die letztere Congruenz führt, wenn

$g^h-1 \equiv k \pmod{p}$ gesetzt wird, unmittelbar zu der zweiten von den Congruenzen (*W.*). Es lässt sich hiernach der Coefficient c_t auch in der Form:

$$\frac{n!}{p-1}\Sigma\frac{1}{m_0!\,m_1!\,m_2!\ldots m_{p-2}!}$$

darstellen, wenn die Summation auf alle Werthe $m_0, m_1, \ldots m_{p-2} = 0, 1, 2, \ldots n$ erstreckt wird, für welche ausser der Bedingung

$$m_0+m_1+m_2+\cdots+m_{p-2} = n$$

noch die beiden Congruenzen (*W.*) befriedigt sind. Dabei hat man, wie gewöhnlich, $m!$ gleich dem Product $1.2.3\ldots m$ zu nehmen, wenn $m>0$ ist, während man, wenn $m=0$ ist, $m!=1$ zu setzen hat. — Setzt man $m_k = l_{g^k}$, so ist l_h die Anzahl derjenigen Zahlen s, die gleich h sind, und es wird:

$$c_t = \frac{n!}{p-1}\Sigma\frac{1}{l_1!\,l_2!\ldots l_{p-1}!},$$

wenn die Summation auf alle diejenigen Werthe $l_1, l_2, \ldots l_{p-1} = 1, 2, \ldots n$ erstreckt wird, für welche

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{p-1} = n,\quad l_1+2l_2+3l_3+\cdots+(p-1)l_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, und für welche zu gleicher Zeit der Rest der Zahl

$$2^{l_2}.3^{l_3}\ldots(p-1)^{l_{p-1}}$$

modulo p zu der Gruppe der Reste $g^t, g^{t+n}, g^{t+2n}, \ldots$ gehört. So erfüllen für $n=2$, $p=7$ die Werthsysteme:

$$l_1=1,\quad l_2=1,\quad l_4=1;\quad l_3=1,\quad l_5=1,\quad l_6=1$$
$$l_1=2,\quad l_5=1;\quad l_1=1,\quad l_3=2;\quad l_2=2,\quad l_3=1;\quad l_4=2,\quad l_6=1;$$
$$l_4=1,\quad l_5=2;\quad l_2=1,\quad l_6=2$$

die Bedingungen

$$l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6 = 3,\quad l_1+2l_2+3l_3+4l_4+5l_5+6l_6 \equiv 0 \pmod{7},$$

wenn diejenigen l, die weggelassen sind, gleich Null genommen werden; für die beiden ersten Systeme l wird nun $t=0$, für die sechs anderen $t=2$, und also, da hier $n! = p-1$ ist,

$$c_0 = 2,\quad c_1 = 0,\quad c_2 = 3.$$

Für eine *beliebige* Primzahl p von der Form $6k+1$ und für $n=3$ ist die Anzahl der Werthsysteme s_1, s_2, s_3, für welche $s_1+s_2+s_3 \equiv 0 \pmod{p}$ ist, gleich $(p-1)(p-2)$. Es ist daher $c_0+c_1+c_2 = p-2$; ferner wird, da

$$(\Sigma_r\, \omega^{hr} x^{g^r})^3 = p(c_0+c_1\omega^h+c_2\omega^{2h}) \qquad (r=0, 1, \ldots p-2)$$

ist, die Zahl $\pm a$ in der Gleichung $4p = a^2 + 27b^2$ durch die Bestimmung

$$3c_0 - (c_0 + c_1 + c_2) = \pm a \quad \text{oder} \quad 3c_0 - (p-2) = \pm a$$

gegeben. Nach obigen Darlegungen ist nun $(p-1)c_0$ gleich der Anzahl der Werthsysteme s_1, s_2, s_3, wofür $s_1 s_2 s_3$ kubischer Rest von p ist, und da $s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0 \pmod{p}$, also

$$s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \equiv 3 s_1 s_2 s_3 \pmod{p}$$

ist, so resultirt folgende bemerkenswerthe Lösung der Gleichung $4p = a^2 + 27b^2$: *Es wird*

$$a^2 = (3c_0 - p + 2)^2,$$

wenn $(p-1)c_0$ *die Anzahl der verschiedenen Systeme von Zahlen*

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3 = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots \quad p-1$$

bedeutet, wofür die Summe $s_1 + s_2 + s_3$ *durch p theilbar und zugleich die neunfache Summe der Kuben* $9(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3)$ *kubischer Rest von p wird.* So giebt es, um einige einfache Beispiele anzuführen, im Falle $p = 7$, nur die den Bedingungen genügenden Systeme:

$$s_1, \ s_2, \ s_3 = 1, \ 2, \ 4; \quad s_1, \ s_2, \ s_3 = 3, \ 5, \ 6,$$

deren Gesammtanzahl 12 ist, so dass $c_0 = 2$ und $a^2 = 1$ wird. Für $p = 13$ giebt es nur die Systeme

$$s_1, \ s_2, \ s_3 = 1, \ 3, \ 9; \ 2, \ 5, \ 6; \ 4, \ 10, \ 12; \ 7, \ 8, \ 11,$$

deren Gesammtanzahl 24 beträgt, so dass ebenfalls $c_0 = 2$ und aber $a^2 = (3.2 - 11)^2$, also $a^2 = 25$ wird. Für $p = 19$ existiren folgende Systeme:

$$s_1, \ s_2, \ s_3 \equiv h, \ 3h, \ -4h \pmod{19} \qquad (h = 1, 2, \ldots 18),$$

$$s_1, \ s_2, \ s_3 \equiv k, \ 7k, \ -8k \pmod{19} \qquad (k = 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5);$$

die Gesammtanzahl ist daher $6.18 + 6.6$, und da diese den Werth von $18c_0$ giebt, so wird $c_0 = 8$ und $a^2 = (3.8 - 17)^2 = 49$, und es ist in der That $4.19 = 49 + 27$. Ich bemerke schliesslich, dass sich ähnliche elegante Bestimmungen für die Darstellung der Primzahlen in den Formen $a^2 + b^2$ und $a^2 + 2b^2$ aus den obigen Entwickelungen herleiten und aber auch auf die bekannten Resultate der Kreistheilungs-Theorie zurückführen lassen.

Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen.

(Von *Kronecker.*)

I. Sind F_0, F, F_1 ganze algebraische Formen irgend welcher Stufe, und sind F und F_1 in F_0 enthalten, so ist offenbar die componirte Form $F.F_1$ in $(uF+F_1).F_0$ enthalten. Da nun die Form $uF+F_1$, gemäss § 22, IV meiner Festschrift zu Herrn *Kummers* Doctor-Jubiläum (vgl. Bd. 92 dieses Journals), den grössten gemeinsamen Inhalt der Formen F und F_1 bildet, so zeigt sich, dass eine Form, welche zwei andere Formen enthält, nach Multiplication mit deren grösstem gemeinsamen Inhalt, durch das Product derselben theilbar wird. Auch in *dieser* Beziehung behalten also die Gesetze der gewöhnlichen Zahlen für die Formen ihre Gültigkeit.

II. Bedeuten x_0', x_0'', ... die Elemente eines Fundamentalsystems der Species $\mathfrak{S}$, so kann die charakteristische Eigenschaft einer Fundamentalform von $(\mathfrak{S})$ mit den Coefficienten x', x'', ... nach § 24 meiner Festschrift dahin formulirt werden, dass jedes der Producte $x_0^{(h)}$, $x^{(i)}$ als homogene lineare ganze Function von x', x'', ... *selbst*, mit ganzen dem *Stammbereich* angehörigen Coefficienten darstellbar sein muss. *Durch Multiplication einer Fundamentalform mit einer beliebigen Form entsteht hiernach wiederum eine Fundamentalform.* Denn, wenn y irgend eine ganze Grösse des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$ bedeutet, so ist offenbar jedes der Producte $x_0^{(h)} x^{(i)} y$ eine homogene lineare ganze Function der Producte $x^{(i)} y$ mit Stammbereich-Coefficienten, da jedes der Producte $x_0^{(h)} x^{(i)}$ eine ebensolche Function der Grössen $x^{(\ )}$ ist. Sind nun die beiden Fundamentalformen *erster Stufe*

$$\sum_{h,i} u^{(h)} v^{(i)} x^{(h)} y^{(i)}, \quad \sum_{k} w^{(k)} z^{(k)} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots)$$

einander relativ äquivalent, so wird dies nach § 23, II meiner citirten Festschrift durch Gleichungen

$$x^{(h)} y^{(i)} z^0 = x^0 \sum_{k} a_{hik} z^{(k)}, \quad x^0 z^{(k)} = z^0 \sum_{h,i} b_{hik} x^{(h)} y^{(i)} \qquad (h, i, k = 1, 2, \ldots)$$

charakterisirt, in welchen x^0, z^0 ganze, dem Art-Bereich ($\mathfrak{S}$) angehörige Grössen, die Coefficienten a_{hik}, b_{hik} aber ganze Grössen des Stammbereichs bedeuten. Ist die Form $\Sigma w^{(k)} z^{(k)}$ eine Grundform von nur n Gliedern, wo n die Ordnung der Species $\mathfrak{S}$ bezeichnet, so sind die n den Werthen $k = 1, 2, \ldots n$ entsprechenden Functionen der Unbestimmten u, v:

$$\sum_{h,i} a_{hik} u^{(h)} v^{(i)} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots)$$

von einander unabhängig, und es können also dafür ebensoviel unabhängige Variable oder Unbestimmte $w', w'', \ldots w^{(n)}$ gesetzt werden. Unter den gemachten Voraussetzungen wird daher

$$z^0 \sum_h u^{(h)} x^{(h)} . \sum_i v^{(i)} y^{(i)} \quad \text{in} \quad x^0 \sum_k w^{(k)} z^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

durch die Substitution

$$w^{(k)} = \sum_{h,i} a_{hik} u^{(h)} v^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} h, i = 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

transformirt. Bei dieser Substitution besteht aber auch die Gleichung (vgl. S. 105 meiner Festschrift):

$$\mathrm{Nm}\, z^0 . \mathrm{Nm} \sum_h u^{(h)} x^{(h)} . \mathrm{Nm} \sum_i v^{(i)} y^{(i)} = \mathrm{Nm}\, x^0 . \mathrm{Nm} \sum_k w^{(k)} z^{(k)},$$

und also, nach Weglassung der grössten gemeinsamen Theiler auf beiden Seiten:

$$\mathrm{Fm} \sum_h u^{(h)} x^{(h)} . \mathrm{Fm} \sum_i v^{(i)} y^{(i)} = \mathrm{Fm} \sum_k w^{(k)} z^{(k)}.$$

Die Substitution, mittels deren das Product zweier primitiver Grundformen von beliebig vielen Gliedern

$$\mathrm{Fm} \sum_h u^{(h)} x^{(h)}, \quad \mathrm{Fm} \sum_i v^{(i)} y^{(i)} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots)$$

in eine primitive Fundamentalform von nur n Gliedern

$$\mathrm{Fm} \sum_k w^{(k)} z^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

transformirt wird, bestimmt sich hiernach unmittelbar als diejenige, mittels welcher die aus den beiden algebraischen Formen $\Sigma u^{(h)} x^{(h)}$, $\Sigma v^{(i)} y^{(i)}$ componirte Form in irgend eine ihr relativ äquivalente lineare Grundform von nur n Gliedern, $\Sigma w^{(k)} z^{(k)}$, übergeführt wird.

Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin für das Jahr 1884.

Die bis jetzt zur Begründung einer rein geometrischen Theorie der Curven und Flächen höherer Ordnung gemachten Versuche sind hauptsächlich deswegen wenig befriedigend, weil man sich dabei — ausdrücklich oder stillschweigend — auf Sätze gestützt hat, die der analytischen Geometrie entlehnt sind und grösstentheils allgemeine Gültigkeit nur bei Annahme imaginärer Elemente geometrischer Gebilde besitzen. Diesem Uebelstande abzuhelfen giebt es, wie es scheint, nur *ein* Mittel: *es muss der Begriff der einem geometrischen Gebilde angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dass an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, Ebenen wirklich existirende Elemente treten, und dass dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und geometrisch bewiesen werden können.*

Für die Curven und Flächen zweiter Ordnung hat dies *v. Staudt* in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ mit vollständigem Erfolge ausgeführt. Die Akademie wünscht, dass in ähnlicher Weise auch das im Vorstehenden ausgesprochene allgemeine Problem in Angriff genommen werde, und fordert die Geometer auf, Arbeiten, welche dieses Problem zum Gegenstande haben und zur Erledigung desselben Beiträge von wesentlicher Bedeutung bringen, zur Bewerbung um den im Jahre 1884 zu ertheilenden *Steiner*schen Preis einzureichen. Selbstverständlich muss in diesen Arbeiten die Untersuchung rein geometrisch durchgeführt werden; es ist jedoch nicht

nur zulässig, sondern wird auch ausdrücklich gewünscht, dass die erhaltenen Resultate auf analytisch-geometrischem Wege erläutert und bestätigt werden.

Die ausschliessende Frist für die Einsendung der Bewerbungsschriften, welche in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache verfasst sein können, ist der 1. März 1884. Jede Bewerbungsschrift ist mit einem Motto zu versehen und dieses auf dem Aeusseren des versiegelten Zettels, welcher den Namen des Verfassers enthält, zu wiederholen. Die Ertheilung des Preises von 1800 Mark erfolgt in der öffentlichen Sitzung am *Leibniz*-Tage im Juli 1884.

STOR[illegible]E AREA

